# TD 13
# Suite récurrente d'ordre un associée à une fonction

## 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** ●○○ Étudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}. \end{cases}$

**Exercice 2.** *Approximation de $\sqrt{a}$.* ●●○ Soit $a > 0$ et $(u_n)$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

**1.** Étude de la convergence de $(u_n)$
   (a) Démontrer que $u_n$ est bien définie pour tout $n$ et, si elle converge, son éventuelle limite.
   (b) Démontrer que $u_n \to \sqrt{a}$ et que la convergence est géométrique. *On étudiera $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et on remarquera que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leqslant 1$.*

**2.** **Détermination de la vitesse de convergence.** On va démontrer que la convergence est bien meilleure qu'une convergence géométrique. On définit, pour tout entier naturel $n$,

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Déterminer une expression simple de $\varepsilon_n$ en fonction de $\varepsilon_0$.

**3.** Montrer que $|\varepsilon_0| < 1$, et montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| u_n - \sqrt{a} \right| \leqslant 2u_0.|\varepsilon_0|^{2^n}$$

Il s'agit d'une convergence très rapide de $u_n$ vers $\sqrt{a}$.

**4.** Application : donner **sans calculatrice** une approximation de $\sqrt{2}$ par un rationnel à $10^{-3}$ près.

## 2 Exercices à chercher en TD

**Exercice 3.** ●●○ Étudier les suites suivantes

**1.** $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 > 0, \ u_1 > 0, \\ u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2. \end{cases}$

**Exercice 4.** ●●○ Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$. On établira déjà que la fonction $f$ servant à définir la relation de récurrence a deux points fixes, qu'on ne cherchera pas à calculer.

**Exercice 5.** *Une suite récurrente plus coriace !*. ●●◐ Étudier la suite $\begin{cases} u_0 = \alpha \in [0,1], \\ u_{n+1} = (1-u_n)\sin(u_n). \end{cases}$

**Exercice 6.** *Vraiment une suite récurrente ?*. ●●○
On définit une suite $(u_n)$ par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \end{cases}$

1. Déterminer la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

**Exercice 7.** *Une étude de suite récurrente avec une étude de fonction poussée*. ●●○ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $]0,1]$ est stable par $f$.
2. Montrer que $f$ est croissante sur $]0,1]$.
3. Montrer que $f$ admet un unique point fixe sur $]0,1]$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Exercice 8.** ●●● Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in ]0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Démontrer que ou bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. (et que ce « ou » est exclusif)

**Indications**

1 Démontrer que $u_n$ est positive pour tout $n$, et chercher l'unique point fixe de $f$. Montrer qu'alors $(u_n)$ est croissante majorée par $\alpha$.

2
  1. Questions très détaillées ! Penser à faire une récurrence pour la (c) et pour montrer qu'on a une convergence géométrique.
  2. Montrer que $\varepsilon_n = \varepsilon_0^{2^n}$
  3. Utiliser une récurrence.

3 Penser à d'abord chercher les limites éventuelles : cela peut fortement guider la démonstration !

5 Problème, on n'a pas de fonction contractante. Il faut donc étudier les variations de $(u_n)$ (qui est décroissante), montrer qu'elle est minorée et montrer que $f$ admet un unique point fixe.

6 Penser, si $n \geqslant 1$, que $u_0 + \cdots + u_{n-1} = (\sqrt{u_0 + \cdots + u_{n-1}})^2$ : la relation de récurrence entre $u_n$ et $u_{n+1}$ se trouve alors assez facilement !

7 Démontrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n} + 1}$, puis déterminer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en utilisant la relation de récurrence !

8 Pour la deuxième question, supposer que $(u_n)$ est n'est pas stationnaire et tend vers $\ell \neq 0$, et déterminer une absurdité. Il peut être utile de démontrer que dans ce cas, $\dfrac{1}{u_n}$ n'est jamais entier.