N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 14
Analyse asymptotique

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Effectuer le dl...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{th}(x)$.

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

---

2. à l'ordre 3 en 0 de
$\sin(x) + \mathrm{sh}(x) - \tan(x) - \mathrm{th}(x)$.

$o(x^5)$

---

3. à l'ordre 3 en 0 de
$(e^x + \sin(x))(1 - \ln(1+x))$.

$1 + x - x^2 + o(x^2)$.

---

4. à l'ordre 3 en 1 de $e^x + \ln(x)$.

$e + (1+e)(x-1) + 1/2(e-1)(x-1)^2 + 1/6(2+e)(x-1)^3$

---

5. à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $\cos(x) - \sin(x)$.

$-\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$.

---

6. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Remarquons que $e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, donc

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}),$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{100}\frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x\left(1-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}+o(e^{-x}x^{100})\right)\right)\\ &= 1+\ln\left(1-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}+o(e^{-x}x^{100})\right)\\ &= 1-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}+o\left(-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}\right).\end{aligned}$$

Or, $-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^{100}}{100!}$, donc $o\left(-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}\right)=o(x^{100})$. De même, $e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}=\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})$ Donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{100}\frac{x^k}{k!}\right)=1-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2(x)}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$

Exercice 3. Déterminer la limite ℓ, quand n tend vers $+\infty$, de

$$u_n=\left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)^{n^2},$$

ainsi qu'un équivalent simple de $u_n-\ell$.

On écrit que

$$\begin{aligned}u_n &= \left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)^{n^2}\\ &= \exp\left[n^2\ln\left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\right]\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n^2\ln\left(2\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{16n^3}\right)-\left(1+\frac{2}{2n}-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{4n^2}-\frac{3}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n^2\left(\frac{1}{4n^2}-\frac{3}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ &= e^{\frac{1}{4}}-\frac{3e^{\frac{1}{4}}}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

donc la limite ℓ est $e^{\frac{1}{4}}$ et un équivalent de $u_n - \ell$ est $-\dfrac{3e^{\frac{1}{4}}}{8n}$

Exercice 4. *Études locales*.

1. Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité (et, le cas échéant, la position relative de la courbe et de la tangente) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)}$, au point d'abscisse 0.

Déterminons un dl en 0 de $\dfrac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)} = e\dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)}$. Déjà,

$$e^{\sin(x)} - 1 = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} - 1 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

De plus, $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc

$$\frac{e^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente est donc $y = e + \dfrac{ey}{2}$, et la courbe est localement sous sa tangente.

---

2. Étudier, au voisinage de 0, $g : x \mapsto \dfrac{x^x - 1}{1 - x + \ln x}$.
3. Étudier, au voisinage de $+\infty$, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}x - 1}$.

Exercice 5. *Étude d'une bijection réciproque*. Soit $f(x) = x + \ln x$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note $g = f^{-1}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Trouver le développement limité de g en 1 à l'ordre 2 .
4. Donner un développement asymptotique de g en $+\infty$ à trois termes (on pourra remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(y) + \ln(g(y)) = y$)).

Comme indiqué par l'énoncé, on remarque en effet que pour tout y dans $\mathbb{R}$, $f(g(y)) = y$, i.e.

$$g(y) + \ln(g(y)) = y.$$

Mais, comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $g(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, en particulier, $\ln(g(y)) \underset{y\to+\infty}{=} o(g(y))$. Donc $g(y) + \ln(g(y)) \underset{y\to+\infty}{\sim} g(y)$, donc $g(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y$. On a donc

$$g(y) - y = -\ln(g(y)) \underset{y\to+\infty}{\sim} -\ln(y),$$

par le passage des équivalents au ln qu'il faut toujours justifier. Mais donc, on a $g(y) = y - \ln(y) + o(\ln(y))$, donc

$$\begin{aligned} g(y) &= y - \ln(g(y)) \\ &\underset{y\to+\infty}{=} y - \ln(y - \ln(y) + o(\ln(y))) \\ &\underset{y\to+\infty}{=} y - \ln(y) - \ln\left(1 - \frac{\ln(y)}{y} + o\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)\right) \quad \text{(en factorisant par ce qui est gros !)} \\ &\underset{y\to+\infty}{=} y - \ln(y) + \frac{\ln(y)}{y} + o\left(\frac{\ln(y)}{y}\right) \end{aligned}$$

Exercice 6. **1.** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.

2. Démontrer que u_n possède une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

2 Exercices faits en TD

Exercice 7. ●○○ Effectuer le développement limité...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1-x} - e^x$.
2. à l'ordre 5 en 0 de $\sin(x)\cos(2x)$.
3. à l'ordre 3 en 0 de $(x^3+1)\sqrt{1-x}$.
4. à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.
5. à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$.
6. à l'ordre 4 en 0 de $(\ln(1+x))^2$.
7. à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\sin(x)$.
8. à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.
9. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\sin x)$.
10. à l'ordre 3 en 1 de $\cos(\ln(x))$.
11. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+e^x)$.
12. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(2+\sin x)$.
13. à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$.
14. à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+\sqrt{1+x})$.
15. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(3e^x + e^{-x})$.
16. à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{1/x}$.
17. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

18. à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$.

19. à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{\mathrm{Arctan} x}{\tan x}$.

20. à l'ordre 2 en 1 de $\dfrac{x-1}{\ln x}$.

21. à l'ordre 6 en 0 de $(\cos(x))^{\sin(x)}$.

22. à l'ordre 4 en 1 de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

23. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\dfrac{\mathrm{th}(x)}{x}\right)$.

24. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Je ne détaillerai pas les calculs de chaque dl, mais indiquerai les réponses en précisant, si besoin est, la grosse difficulté.

1. somme classique de dl : $\dfrac{1}{1-x} - e^x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)$.
2. produit classique de dl : $\sin(x)\cos(2x) = x - \dfrac{13}{6}x^3 + \dfrac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.
3. produit classique de dl, en remarquant que le premier terme est déjà un dl : $(x^3+1)\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{15}{16}x^3 + o(x^3)$
4. somme classique de dl : $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = 2 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5}{64}x^4 + o(x^4)$.
5. produit classique de dl :
   $\cos(x)\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
6. produit classique de dl : $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \dfrac{11x^4}{12} + o(x^4)$.
7. **attention, dl pas en** 0 **!** On pose $u = x - \dfrac{\pi}{3}$. Alors $\sin\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{u}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \dfrac{u^3}{12} + o(u^3)$, donc
   $$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$
   Attention on ne développe pas les puissances
8. somme classique de dl si on pense à séparer le ln. Attention juste à une (mini) composition avec le x^2.
   $$In\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$
9. composition standard de dl : $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
10. composition + dl pas en 0 : à l'ordre 3 en 1 de $\cos(\ln(x)) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

11. attention, ce qu'il y a à l'intérieur du ln ne tend pas vers 0 ! Il faut écrire $\ln(1+e^x) = \ln(2\frac{1+e^x}{2}) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$, et ensuite faire un changement de variables.
$\ln(1+e^x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$.

12. attention, ce qu'il y a à l'intérieur ne tend pas vers 1 !
$\ln(2+\sin x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

13. composition de fonctions :$e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + o(x^3)$.

14. composition, mais attention à la limite à l'intérieur du ln !
$\ln(1+\sqrt{1+x}) = \ln(2) + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + o(x^2)$.

15. encore une fois, il faut **avant tout** repérer la limite à l'intérieur du ln. Ici on se rend compre que cette limite est égale à 4, donc on va nécessairement tout factoriser par 4, et on trouvera du $\ln(4)$ à l'ordre 0.
$\ln(3e^x + e^{-x}) = \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$.

16. on a une puissance, on utilise **obligatoirement** l'exponentielle, et on trouve : $(1+x)^{1/x} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o(x^2)$

17. attention, pour le quotient à l'intérieur, il faut remarquer que le numérateur et le dénominateur sont tous deux équivalents à x : ces x vont se simplifier dans les dl, mais il faudra par conséquent pousser le dl à un ordre de plus :
$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$.

18. quotient avec simplifications. $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = 1 - x + \frac{2x^2}{3} - \frac{11x^3}{24} + o(x^3)$.

19. on détermine le dl de Arctan par primitivation, puis on effectue le quotient : $\frac{\mathrm{Arctan} x}{\tan x} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$.

20. quotient avec simplifications + on n'est pas en 0 ! : $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{12} + o((x-1)^2)$.

21. On repasse par la forme exponentielle : $\cos(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$. Or, $\sin(x) \sim x$ donc il suffit de développer $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 5. De même, $\ln(\cos(x))\sin(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ donc il suffit de développer $\sin(x)$ à l'ordre 4. On a, en posant $u = \cos(x) - 1$, $\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Or, $u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5),$$

donc

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\cos(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^6) = -\frac{x^3}{2} + o(x^6)\end{aligned}$$

Donc, en posant $u = \sin(x)\ln(\cos(x))$, $u \sim -\frac{x^3}{2}$ donc il suffit de développer e^u à l'ordre 2 en u : $e^u = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ donc $e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8} + o(x^6)$, d'où le résultat voulu !

22. On pose $u = x - 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{x^2} &= \frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2} \\
&= \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)\right) \underbrace{\left(1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + o(u^3)\right)}_{\text{ordre 3 car le terme de gauche est } \sim u} \\
&= u - 2u^2 + 3u^3 - 4u^4 - \frac{u^2}{2} + u^3 - \frac{3}{2}u^4 + \frac{u^3}{3} - \frac{2}{3}u^4 - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \\
&= u - \frac{5}{2}u^2 + \frac{13}{3}u^3 - \frac{77}{12}u^4 + o(u^4) \\
&= (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4)
\end{aligned}$$

23. On détermine le développement limité de $\text{th}(x)$ en remarquant que $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$, et en faisant comme le développement limité de tan. On trouve $\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$, donc

$$\frac{\text{th}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4).$$

Ensuite, il suffit de faire le dl de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 (le premier terme étant éauivalent à $-x^2/3$, et on trouve (excusez-moi pour les coefficients...)

$$\ln\left(\frac{\text{th}(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + o(x^4).$$

24. Question piège (et un 20 en DS à quelqu'un qui fait effectivement le dl à l'ordre 99). Remarquons que $e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, donc

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}),$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x\left(1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x}x^{100})\right)\right) \\
&= 1 + \ln\left(1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x}x^{100})\right) \\
&= 1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o\left(-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}\right).
\end{aligned}$$

Or, $-\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^{100}}{100!} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^{100}}{100!}$, donc $o\left(-\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^{100}}{100!}\right) = o(x^{100})$. De même, $\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^{100}}{100!} = \dfrac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$ Donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{100}\frac{x^k}{k!}\right) = 1 - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

Exercice 8. ●●○ Déterminer un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
En déduire la limite, quand x tend vers 0^+, de $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$

Ici, il ne s'agit pas directement de développements limités. Il faut d'abord se ramener à une situation qui permet les dl. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} &= \frac{1}{x}\left(2 - \frac{x}{\sin(x)} - \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(2 - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-1} - \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-1} &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^{-1}\\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\end{aligned}$$

et, de même, en faisant attention au changement de signe, $\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{7x^4}{360} + o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned}2 - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-1} - \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)^{-1} &= 2 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360}\right) + o(x^4)\\ &= -\frac{7}{180}x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

donc

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = -\frac{7}{180}x^3 + o(x^3),$$

de limite nulle quand x tend vers 0.

Exercice 9. ●●○ En s'intéressant d'abord au dl de $f'(x)$, déterminer la dl à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$ où $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Dérivons f :

$$f'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Or, pour tout réel θ, $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$, d'où

$$f'(x) = \frac{}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

d'où, en intégrant,

$$\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Exercice 10. ●●○ Déterimner les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\cos(x)-x}{\sin(x)-\ln(1+x)}$

Le numérateur tend vers 2 en 0, le dénominateur vers 0, et $\sin(x)-\ln(1+x) = x-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos(x)-x}{\sin(x)-\ln(1+x)} = +\infty$.

---

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)^{x^2}$

Par l'écriture exponentielle, on est ramenés à considérer

$$x^2\ln\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right).$$

Écrivons d'abord

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1} = x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}.$$

Or, $\sqrt[3]{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+o(u)$. Donc, en faisant un développement asymptotique à l'ordre $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on obtient

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-1+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

Donc
$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1} \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

Donc
$$\ln\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x},$$

donc
$$x^2\ln\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)\sim -x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

En passant les limites à l'exponentielle, on en déduit que la limite recherchée est 0.

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$

On passe par la forme exponentielle :
$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)\right).$$

Or, $a^{1/n}=1+\dfrac{\ln(a)}{n}+o(1/n)$ et $a^{1/n}=1+\dfrac{\ln(b)}{n}+o(1/n)$, donc
$$\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}=1+\frac{\ln(ab)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

donc
$$n\ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)\sim\frac{\ln(ab)}{2},$$

donc
$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ln(ab)/2}=\sqrt{ab}.$$

Exercice 11. *Détermination d'équivalents*. ●●○

1. Déterminer un équivalent en $\dfrac{\pi}{2}$ de $f(x)=\cos(\cos x)-\sin x$.

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x)=\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1$.

On écrit que
$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1=e^{x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)}-1$$

Mais

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) &= x\ln\left(\frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \\ &= x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} e^{x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)} - 1 &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

Exercice 12. ●●○ On définit $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ pour tout réel x non nul.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur à choisir pour $f(0)$.

On sait que $\dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0, avec la valeur 0 en 0.

---

2. Montrer que f, ainsi prolongée, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'utiliser le théorème du prolongement de la classe $\mathscr{C}^1$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}.$$

Or, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc

$$x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x-(1+x^2)\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{(1+x^2)x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par le théorème de prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

---

3. Étudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f. Dessiner le graphe de f.

---

f est clairement paire, et sur $\mathbb{R}_+$. Pour les variations, il faut étudier le signe de $g : x \mapsto x - (1+x^2)\text{Arctan}(x)$. Dérivons (encore !) g :

$$g' : x \mapsto 1 - 2x\text{Arctan}(x) - 1 = -2x\text{Arctan}(x) \leqslant 0,$$

donc g décroît sur $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Enfin, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où l'allure de la représentation graphique.

---

4. Donner un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ sous la forme $a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dfrac{a_3}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Là, il faut utiliser le fait que $\text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\dfrac{1}{x}$ lorsque $x > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{x}}{x} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

Exercice 13. ●●◐ Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $f_a : x \in \mathbb{R} \longmapsto a^{(a^x)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de f_a' et f_a''. Montrer que si $a \geqslant 1$, f_a'' ne s'annule pas et que si $a < 1$, f_a'' s'annule en un unique point que l'on notera x_a et dont on déterminera l'expression explicite en fonction de a.

2. Soit $a \in]0,1[$. Calculer $f_a^{(3)}(x_a)$. En déduire que x_a est le paramètre d'un point d'inflexion du graphe de f_a.

3. Déterminer le lieu des points d'inflexion du graphe de la fonction f_a lorsque a varie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14. ●●○ Étudier l'équation de la tangente ainsi que la position relative de la courbe d'équation $y = (\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$, au point d'abscisse 0.

Il suffit de faire un développement limité en 0 de l'expression considérée : On écrit que $(\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\text{ch}(x))}{x}}$. Or, $\text{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc

$$\ln(\text{ch}(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x}} &= e^{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}-\frac{x^3}{12}+o(x^3), \\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3),
\end{aligned}$$

donc la tangente à la courbe en 0 a pour équation $y = 1+\frac{x}{2}$ et la courbe est localement au-dessus de sa tangente car $(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{8}$.

Exercice 15. ●●○ Étudier les asymptotes éventuelles en $+\infty$ des courbes représentatives des fonctions suivantes, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à son asymptote :

1. $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

Pour traiter concrètement ce genre de problème, mieux vaut effectuer un développement asymptotique de l'expression plutôt que d'étudier $\frac{f(x)}{x}$:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+1+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) = x+2+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la courbe de f a pour asymptote la droite d'équation $y = x+2$ et comme $f(x)-(x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

---

2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$.

De même, on essaie de faire un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)} \\
&= \sqrt[3]{x^3+2x^2-x-2} \\
&= x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+o(x^2)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{9x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{2}{3}-\frac{7}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = x+\frac{2}{3}$ est asympote à $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_g$ est sous son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. *Le retour de la Suite définie implicitement*. ●●○

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + \mathrm{e}^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^x$. La fonction f est continue, croissante strictment, tend vers $-\infty$ en $-\infty$, vers $+\infty$ en $+\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone aux limites, il existe une unique solution à l'équation $x + \mathrm{e}^x = n$.

---

2. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent simple de x_n.

Pour tout entier n, $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$ et, par croissance de f, (x_n) est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge ou tend vers $+\infty$. Elle ne peut converger, car si elle convergeait vers ℓ, on aurait $x_n + \mathrm{e}^{x_n} \xrightarrow[\ell]{}$, absurde car $x_n + \mathrm{e}^{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc $x_n \xrightarrow[+]{} \infty$. Or, par croissances comparées, $x_n = o(\mathrm{e}^{x_n})$, donc $x_n + \mathrm{e}^{x_n} \sim \mathrm{e}^{x_n}$, donc $\mathrm{e}^{x_n} \sim n$. n tendant vers une limite différente de 1, on peut composer les équivalents par $\ln$, d'où $x_n \sim \ln(n)$.

---

3. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln(n)$.

On cherche un équivalent de $x_n - \ln(n)$. Remarquons que

$$\mathrm{e}^{x_n - \ln(n)} = \mathrm{e}^{x_n}\mathrm{e}^{-\ln(n)} = \frac{\mathrm{e}^{x_n}}{n}.$$

Or, $x_n + \mathrm{e}^{x_n} = n$, i.e.

$$\frac{\mathrm{e}^{x_n}}{n} = \frac{n - x_n}{n} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

Donc

$$x_n - \ln(n) = \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right).$$

Or, $\dfrac{x_n}{n} \sim \dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, donc

$$x_n - \ln(n) \sim -\frac{x_n}{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n}.$$

Exercice 17. *La vengeance de la suite définie implicitement*. ●●◐ On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, l'unique solution $u_n \in [0, 1]$ de l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$. Justifier l'existence de u_n, donner la monotonie de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et déterminer sa limite ℓ. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.