

THÈMES**1. Dérivabilité.**

- a) Dérivabilité d'une fonction réelle de la variable réelle :** (i) Définitions et premières propriétés : limite du taux de variation ; admission d'un développement limité à l'ordre un ; dérivée à droite et dérivée à gauche. (ii) Opérations sur les dérivées (en un point) : combinaison linéaire ; produit ; quotient ; composée ; réciproque (*deux dernières démonstrations non exigibles*). (iii) Dérivées d'ordre un entier naturel (sur un intervalle) : exemple de fonction n -fois continûment dérivable mais non $(n + 1)$ -fois dérivable ; combinaisons linéaires, produits, quotients, composées, et réciproques de fonctions n -fois dérivables (resp. continûment dérivables).
- b) Théorèmes liés à la dérivation :** (i) Dérivabilité et extremum local : extremum local et point critique ; condition nécessaire d'extremum local d'une fonction dérivable en un point intérieur. (ii) Dérivabilité et extremum local : extremum local et point critique ; condition nécessaire d'extremum local d'une fonction dérivable en un point intérieur. (iii) **Théorème de Rolle** : condition suffisante d'annulation de la dérivée entre deux points distincts. (iv) **Égalité/théorème des accroissements finis** : multiplicateur pour passer de l'accroissement de a à b à l'accroissement de $f(a)$ à $f(b)$. (v) Corollaires de l'égalité des accroissements finis : inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes ; signe de la fonction dérivée et sens de variations ; théorème de la limite de la dérivée ; théorème de prolongement $\mathcal{C}^1/\mathcal{C}^k/\mathcal{C}^\infty$.
- c) Cas d'une fonction complexe de la variable réelle :** (i) Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1. (ii) Opérations sur les dérivées (en un point) : combinaison linéaire ; produit ; quotient ; composée (on ne parle pas ici de fonction réciproque). (iii) Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

2. Convexité.

- a) Fonction affine/convexe/concave (sur un intervalle) :** (i) Combinaisons convexes : paramétrisation de tout segment d'au moins deux points. (ii) Caractérisation des fonctions affines par les combinaisons convexes. (iii) Fonction convexe/concave et inégalité de Jensen. (iv) Fonction convexe/concave et position de la courbe par rapport à ses **sécantes**. (v) Caractérisation de la convexité/concavité par la **croissance/décroissance des pentes**.
- b) Fonction dérivable convexe/concave :** (i) Caractérisation de la convexité/concavité d'une fonction dérivable par la **croissance/décroissance de la dérivée**. Cas d'une fonction deux fois dérivable. (ii) Fonction convexe/concave et position de la courbe par rapport à ses **tangentes**.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Equivalence entre la dérivabilité en a et l'admission d'un développement limité à l'ordre 1 en a .
2. Formule de Leibniz (*attention à ne pas écrire $f^{(-1)}$*).
3. Composée de deux fonctions n -fois continûment dérivables.
4. Dérivées successives des fonctions puissances entières, exponentielles, logarithmes, cosinus et sinus.
5. Théorème de Rolle.
6. Egalité des accroissements finis.
7. Caractérisation des fonctions lipschitziennes parmi les fonctions dérivables.
8. Caractérisation d'une fonction convexe par la croissance des pentes.
9. Caractérisation d'une fonction dérivable convexe par la croissance de la dérivée.