Chapitre 13
Suite récurrente associée à une fonction

Repris du polycopié de Nicolas LAILLET

Chapitre 13
Suite récurrente associée à une fonction

1 Introduction

Exo 1.

1. Sans calcul, représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite réelle (u_n) telle que :
$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2} \end{cases}$$
2. Conjecturer son comportement de la suite réelle (u_n).
3. En considérant la suite auxiliaire $(u_n - 1)$, démontrer la conjecture.

Exo 2.

1. Sans calcul, représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite réelle (v_n) telle que :
$$\begin{cases} v_0 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{3-v_n}{2} \end{cases}$$
2. Conjecturer le comportement de la suite réelle (v_n).
3. En considérant la suite auxiliaire $(v_n - 1)$, démontrer la conjecture.

Exo 3.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite réelle (w_n) telle que :
$$\begin{cases} w_0 = -2,2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{2}{w_n+1} \end{cases}$$
2. Tout va-t-il pour le mieux dans le meilleur des mondes ?

Cadre de travail : Dans tout le chapitre, D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$

Définition 1 : *Suite récurrente associée à une fonction.*
On appelle suite récurrente associée à f toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\begin{cases} u_0 \in D, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
Pour tout élément a de D, on appelle suite récurrente associée à f de premier terme a toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de ce chapitre est de donner des méthodes et des résultats utiles pour l'étude de telles suites.

Méthode 1. La **PREMIÈRE CHOSE** afin de conjecturer le comportement de la suite (limite éventuelle, majoration/minoration, sens de variations etc) on peut penser à :

1. Représenter graphiquement des premiers termes de la suite :
   - ***a)*** On munit le plan d'un repère orthogonal (unités de graduations éventuellement inégales).
   - ***b)*** On trace la droite représentant $x \mapsto x$ (i.e. la première bissectrice si le repère est orthonormé).
   - ***c)*** On trace la représentation graphique de la fonction f.
   - ***d)*** On place successivement les points de coordonnées : $(u_0, 0)$, $(0, u_1)$, $(u_1, 0)$, $(0, u_2)$, $(u_2, 0)$, $(0, u_3)$ etc.
2. Calculer des premiers termes de la suite, dont on peut indiquer les valeurs dans un tableau.

2 Définition bien fondée

Méthode 2. Pour démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, on démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\text{Le réel } u_n \text{ existe et appartient à } D. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

.

Exemple 2.1.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est effectivement bien définie. On démontre la proposition
   $$u_n \text{ est définie et } u_n > 1 \qquad (\mathcal{P}_n)$$
   Initialisation. u_0 existe et $u_0 > 1$ par hypothèse.
   Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n > 1$.
   Alors $u_n - 1 > 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$ est définie.
   Or, $\sqrt{u_n - 1} > 0$, donc $u_{n+1} > 1$. D'où l'hérédité, et le résultat !
2. **ATTENTION** à l'intervalle à considérer. Ainsi, on choisit $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{1}{2\cos(u_n)}$. Démontrons que u_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourrait vouloir montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, mais cette condition est trop molle pour être héréditaire. On va démontrer un résultat plus restreint.
   $$u_n \text{ est définie et } u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \qquad (\mathcal{P}_n)$$
   Initialisation. u_0 est définie et est nulle, donc dans $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $\cos(u_n) \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.
   Donc $1 \leqslant \dfrac{1}{\cos(u_n)} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{2}}$,
   donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2\cos(u_n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
   donc, comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ (car $\pi^2 > 8$, donc $\dfrac{\pi^2}{16} \geqslant \dfrac{1}{2}$)
   donc u_{n+1} est définie et est dnas $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   D'où l'hérédité et le résultat.

Remarque. L'idée est donc de trouver une partie A de D possédant le premier terme de la suite telle que $f(A) \subset A$.

Définition 2 : *Partie stable.*
On dit qu'une partie A de l'ensemble de définition de f est stable pour dire que l'image directe par la fonction f de la partie A est incluse dans la partie A elle même : $f(A) \subset A$.

Remarque. Si tel est la cas, f induit une fonction de la partie A dans elle-même : la fonction $A \to A, x \mapsto y = f(x)$.

Proposition 1 (Partie stable et itération).
Soit A une partie non vide de D. On suppose que A est stable par f. Ainsi, pour élément a de la partie A, il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque. C'est la suite récurrente associée à la fonction f de premier terme a.
Si tel est la cas, f induit une fonction de la partie A dans elle-même : la fonction $A \to A, x \mapsto y = f(x)$.

Exo 4. On considère la récurrente (x_n) de premier terme égal à 5 associée la fonction :
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2}{x+1} \end{aligned}.$$

1. On admet que cette suite est bien définie. Sans calcul, représenter graphiquement ses cinq premiers termes.
2. Montrer que cette suite est bien définie.

Cadre de travail : Dans toute la suite,

- ▷ On suppose que D est stable par f et on considère la fonction ci-après qu'on note encore f.
$$\begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & x' = f(x) \end{array}.$$
- ▷ On considère une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f :
$$\begin{cases} u_0 \in D, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad (\mathcal{R})$$

Remarque. Les fonctions itérées de f sont alors bien définies et pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a :
$$u_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0).$$

3 Limites éventuelles et régularité

Proposition 2 (Limites éventuelles).
Soit un élément ℓ de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- ▷ ET $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ ;
- ▷ ET ℓ est un élément de D ;
- ▷ ET f est continue en ℓ.

Ainsi, ℓ est solution de l'équation :
$$x = f(x) \quad , \quad x \in D$$
si f est continue en a, alors a est un point fixe de f.

Remarque. Si D est un intervalle et que f est continue, alors les limites éventuelles de la suite sont

- ▷ soit parmi les extrémités de D qui n'appartiennent pas à D.
- ▷ soit parmi les points fixes de f.

▶ ***Démonstration.*** On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ car $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ est extraite de $(u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$.
Par continuité de f en ℓ et par caractérisation séquentielle de la limite, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Par unicité de la limite, on obtient $\ell = f(\ell)$ en passant à la limite dans l'égalité donnée par $\mathcal{R}$. ***QED*** ◀

Remarque.

1. Cette proposition doit être utilisée pour déterminer les candidats possibles pour être limite de (u_n).
2. Exemple : étudier

Exo 5.

1. Réduire autant que possible l'ensemble des limites éventuelles de toute suite récurrente associée à la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x' = \mathrm{e}^x - 1$.
2. Idem avec la suite de l'exo 4.

Proposition 3 (Contraction et points fixes).
Soit un réel k positif strictement inférieur à 1. On suppose que f est une contraction de rapport k. Ainsi,

1. La fonction f admet au plus un point fixe.
2. Pour tout élément a de D, si a est un point fixe de f alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, et la convergence est (sous-)géométrique :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a|.$$

▶ ***Démonstration.***

1. Soient x et y dans D. On suppose que $x = f(x)$ et $y = f(y)$. Alors $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Donc
$$|x - y| \leqslant k|x - y|, \text{ donc } (1 - k).|x - y| \leqslant 0.$$
Comme $1 - k$ est strictement positif, $|x - y| \leqslant 0$ donc $|x - y| = 0$, donc $x = y$.
2. Soit $a \in D$. On suppose que a est un point fixe de f. Soit $n \in [\![1, +\infty[\![$. Alors
$$|u_n - a| = |f(u_{n-1}) - a| = |f(u_{n-1}) - f(a)| \leqslant k^1.|u_{n-1} - a|.$$
Donc, par récurrence,
$$|u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

QED ◀

`Exo 6.` Montrer que la racine carrée de 2 est limite de la suite récurrente associée à $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{1+x}$ et de premier terme 1. Estimer la vitesse de la convergence.

`Remarque.`

1. Une fonction contractante n'a pas nécessairement de point fixe, par exemple $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $]0, 1[$.
2. En revanche, si f est continue $[a, b] \to [a, b]$, elle admet au moins un point fixe.

Le résultat suivant est seulement à titre indicatif afin qu'on évite d'appeler « théorème du point fixe » ce qui n'en est pas un.

Proposition 4 (2ème année, théorème du point fixe pour les contractions, Picard, *version faible*).
On suppose que : $D = \mathbb{R}$ et que f est contractante. Ainsi, f admet un unique point fixe, obtenu comme limite de toute suite récurrente associée à f.

4 Monotonie

Méthode 3. La méthode **de base** pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'étudier la fonction
$$g : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x.$$
Si g est de signe constant sur D, alors alors on connaît les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

`Exemple 4.1.` Étudier la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3 + 2u_n}$.
Par récurrence, u_n est toujours positive : $\mathbb{R}_+$ est stable par f.
On étudie ensuite la fonction f, croissante. Quand on la représente, on remarque que $f(3) = 3$, et que c'est son seul point fixe. On remarque aussi que la fonction est sous ce point fixe avant 3 et au-dessus après 3.
Étudions alors $g : x \mapsto f(x) - x = \sqrt{3 + 2x} - x$. Si $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ si et seulement si $3 + 2x \geqslant x^2$, i.e. ssi $(x - 3)(x + 1) \leqslant 0$, i.e. ssi $x \leqslant 3$. Donc g est positive avant 3, négative après.
De plus, on démontre que $u_0 \leqslant 3 \Rightarrow \forall n,\ u_n \leqslant 3$ et que $u_0 \geqslant 3 \Rightarrow \forall n,\ u_n \geqslant 3$.
Donc si $u_0 \leqslant 3$, (u_n) est croissante majorée donc converge, et si $u_0 \geqslant 3$, (u_n) est décroissante minorée donc converge.
Une autre proposition peut être utile pour déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **mais** elle est hors-programme.
On suppose que la partie D

Proposition 5 (HP, monotonie simple).
On suppose que f est monotone croissante. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, sa monotonie étant dictée par le signe de la première différence :

- ▷ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$,
- ▷ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone décroissante si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$.

Remarque. Cette propriété permet, dans un cas concret, d'éviter d'étudier en détail $x \mapsto f(x) - x$.

▶ ***Démonstration.*** On suppose que $u_0 \leqslant u_1$ et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \leqslant u_1$.
Hérédité. On suppose $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour un certain n. Alors, par croissance de f, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
D'où l'hérédité et le résultat. ***QED*** ◀

Proposition 6 (HP, monotonie double).
On suppose que f est monotone croissante. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone (sauf si elle est constante). En revanche $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

▶ ***Démonstration.*** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f \circ f(u_n)$, donc

$$u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \text{ et } u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

donc, comme f est décroissante, $f\circ f$ est croissante, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. De plus, si $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$, alors en composant par f,

$$u_{2n+1} \geqslant u_{2(n+1)+1},$$

donc les suites sont de monotonies opposées. ***QED*** ◀

Exo 7. Étudier la suite de premier terme égal à 1 associée à la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Exo 8. Étudier la suite de premier terme égal à 1 associée à la fonction $[-1, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \sqrt{1+x}$.

5 Problème d'antécédent/d'annulation/de point fixe

Exemple 5.1. Les problèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 &&, \quad x \in [0; +\infty[\\ x^2 - 2 &= 0 &&, \quad x \in [0; +\infty[\\ x &= 1 + \frac{1}{1+x} &&, \quad x \in]-1; +\infty[\\ x &= x - \frac{x^2-2}{2x} &&, \quad x \in]0; +\infty[. \end{aligned}$$

Ici, D est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'au moins deux points et f est dérivable.

Méthode 4. Méthode de la tangente, aussi connue comme la méthode de Newton.
Pour résoudre un problème d'annulation

$$f(x) = 0 \quad , \qquad x \in D$$

la méthode de la tangente consiste, *sous certaines conditions*, à calculer une solution par approximations successives comme suit :

(1) On choisit une première approximation x_0 ;

(2) A l'étape $n \in [\![1, \infty[\![$, ayant défini x_{n-1}, on définit le réel x_n comme étant le point d'annulation de l'approximation affine de f au point x_{n-1}.

Exo 9. Définir la suite de nombres réels qu'on obtient si on applique la méthode de Newton pour résoudre le problème d'annulation suivante en choisissant pour première approximation le réel 1 :

$$x^2 - a = 0 \qquad x \in [0; +\infty[$$

où a est un réel strictement positif donné.