Thèmes

1. Suite récurrente associée à une fonction : $u_{n+1} = f(u_n)$

a) *Introduction* : **(i)** Suite arithmétique et suite géométrique complexes : relation de récurrence, formule du terme générale, somme de termes consécutifs, sens de variations (cas réel), comportement asymptotique. **(ii)** Suite arithmético-géométrique complexe : relation de récurrence, formule du terme générale, comportement asymptotique. **(iii)** Cas réel : calcul ou représentation graphique de premiers termes ; puis **conjecture** sur une majoration / minoration, la tendance vers un point, les sens de variations notamment.

b) *Définition bien fondée* : Partie stable.

c) *Limites éventuelles et points fixes* : Suite récurrente associée à une fonction contractante de D dans D : unicité de la limite éventuelle dans D et estimation de la vitesse de convergence le cas échéant. *Aucun « théorème de point fixe » n'est au programme de première année.*

d) *Monotonie (cas réel)* : *Aucun résultat n'est exigible.*

e) *Exemples de problèmes d'antécédent/d'annulation/de point fixe* : Méthode de Newton et illustration. *Aucun résultat n'est exigible.*

2. Analyse asymptotique.

a) *Domination/négligeabilité/équivalence* :
(i) Notations : $\underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(1)$, $\underset{x\to a}{=} o(1)$, et $\underset{x\to a}{\sim} 1$; $\underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, $\underset{x\to a}{=} o(g(x))$, et $\underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Adaptation pour les suites. **(ii)** Croissances comparées : comparaison, au voisinage de $+\infty$, de $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto x^b$ puis de $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto \ln(x)^c$; comparaison, au voisinage de 0, de $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto \ln^c(x)$. Adaptation pour les suites. **(iii)** Comparaisons asymptotiques de suites : $(n^n \ ; \ n \in [\![2, +\infty[\![)$, $(n! \ ; \ n \in [\![2, +\infty[\![)$, $(r^n \ ; \ n \in [\![2, +\infty[\![)$, $(n^s \ ; \ n \in [\![2, +\infty[\![)$, $((\ln n)^t \ ; \ n \in [\![2, +\infty[\![)$. **(iv)** Equivalent de Stirling.

b) *Développements limités en un point réel* : **(i)** Unicité de la partie régulière (des coefficients) du développement limité à l'ordre n. **(ii)** Premiers développements limités : à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ (*expression exacte du reste*) ; puis de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. **(iii)** Existence d'un développement limité à l'ordre n : la formule de Taylor-Young (*non démontrée*) pour une fonction $\mathscr{C}^n$; application au développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{\mathrm{i}\,x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$; déduction du développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **(iv)** Primitivation/intégration d'un développement limité à l'ordre $n-1$ (*non démontrée*) : application à $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$, $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$. **(v)** Opération algébriques et développements limités : combinaison linéaire et application à $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$; produit ; composée (*seulement en exemple*) ; inverse ; quotient.

c) *Application des développement limités* : **(i)** Condition nécessaire de minimum local à l'ordre 2 (en un point intérieur) : Pour que f admette un minimum local en a, point intérieur à I, il est nécessaire que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geqslant 0$ (*Cas de* $x \mapsto x^3$). Adaptation pour le maximum local. **(ii)** Condition suffisante de minimum local à l'ordre 2 (en un point intérieur) : Pour que f admette un minimum local en a, point intérieur à I, il est suffisant que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (*Cas de* $x \mapsto x^4$). Adaptation pour le maximum local.

d) *Notion de développement asymptotique en un point de* $\overline{\mathbb{R}}$: **(i)** Exemple avec une fonction d'une variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ en 0, $x \mapsto e^{1/x}$ en $+\infty$. **(ii)** Exemple avec une suite : $\ln(n!)$ (en lien avec l'équivalent de Stirling).

Exemples de questions de cours

1. Caractérisation des fonctions lipschitziennes de rapport k parmi les fonctions dérivables d'une variable réelle.

2. Suite récurrente associée à une fonction contractante.

3. Croissances comparées.

4. Unicité de la partie régulière (des coefficients) du développement limité d'une fonction à l'ordre n en un point réel.

5. Développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr