

Notes de révision du cours de mathématiques

MPSI

Walter NGAMBOU, walter.ngambou@ac-versailles.fr

Lycée Pasteur, 2024–2025
Version du 9 février 2025

Chapitre 14

Analyse asymptotique

Sommaire

1	Relations de comparaison asymptotique	1
1.1	Définitions	1
1.2	Comparaisons asymptotiques de référence	6
1.3	Règles de manipulation des $o/\sim/O$	7
2	Développements limités	8
2.1	Définition	8
2.2	Développements limités usuels en 0	11
2.3	Propriétés opératoires	12
3	Notion de développement asymptotique	16
4	Applications	17
4.1	Calculs de limites	17
4.2	Étude locale de courbes	17
4.3	Étude en $+\infty$	19
4.4	Étude de suites définies implicitement	20

Le but de ce chapitre est de justifier des choses du type $\sin(\theta) \approx \theta$, qu'on utilise tout le temps en physique. Deux philosophies vont se compléter : celle des équivalents, qui permet d'avoir très rapidement des limites de suite, et celle des développements limités, dont on va avoir besoin dès qu'il faut faire des opérations plus fines ou quand les équivalents auront montré leurs limites.

Dans tout le chapitre, I désignera un intervalle.

1 Relations de comparaison asymptotique

1.1 Définitions

Commençons l'étude des équivalents par l'étude d'équivalents de suites. Et même par définir les notions de négligeabilité, de prépondérance, d'équivalence.

Définition 1 : *Comparaison à une suite à valeurs non nulles.*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que $v_n \neq 0$ APCR.

1. On dit que u_n est dominée par v_n quand n tend vers $+\infty$, et que « u_n est un grand O de v_n quand n tend vers $+\infty$ » et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ pour dire que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, i.e. $\exists C > 0, |u_n| \leq C|v_n|$.
2. On dit que u_n est négligeable devant v_n quand n tend vers $+\infty$, et que « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ », et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, pour dire que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. On dit que u_n est équivalente à v_n quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ pour dire que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Remarque.

1. Première chose **fon-da-men-tale** : la notation $\underset{n \rightarrow +\infty}{=}$ ne signifie pas une **égalité** entre deux objets, mais une **appartenance** à l'ensemble des $o(v_n)$. Ainsi, $n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^3)$, $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^3)$, mais on n'a pas $n = n^2$.
Si vous pensez à cela dès maintenant, vous éviterez de massacrer les o .
2. Lorsqu'on prononce « petit o », on fait la liaison, ce qui donne l'impression que c'est un « petit tau ». Ne faites pas l'erreur ;) Et pensez bien qu'il s'agit de la lettre O, pas du chiffre 0.

Définition 2 : *Comparaison à une suite quelconque.*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- (i) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ (« u_n est un grand O de v_n ») pour dire qu'il existe une suite bornée (ε_n) telle que

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ APCR}$$

- (ii) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ (« u_n est un petit o de v_n ») pour dire qu'il existe une suite (ε_n) satisfaisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ telle que

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ APCR}$$

- (iii) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ pour dire qu'il existe une suite ε_n satisfaisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ telle que

$$u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n \text{ APCR}$$

Notation. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites complexes.

1. On note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n)$ si $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.
2. On note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + O(w_n)$ si $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$.

Remarque.

1. Encore une fois, il s'agit d'une **notation**.

2. Ainsi, $n^2 + 2n + \frac{1}{n} = n^2 + o(n^2)$.

3. On remarque que

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \\ &\Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n). \end{aligned}$$

Ainsi, $n^2 + 2n + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$.

4. Retenons dès maintenant, avant de parler de fonctions, ce fait important : trouver un équivalent passe souvent par le fait de « nettoyer les o » .

Exo 1.

1. Trouver des équivalents les plus simples possibles des suites suivantes :

$$\triangleright \sin \frac{1}{n},$$

$$\triangleright \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2},$$

$$\triangleright \cos \frac{1}{n},$$

$$\triangleright \tan \frac{1}{n},$$

$$\triangleright 200n^5 + 2n^5 + 8n^4 + 3n.$$

2. Que signifie $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell \neq 0$?

3. Que signifie $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$?

Définition 3 : *Domination, négligeabilité/prédominance, équivalence entre fonctions.*

Soit $I \subset \mathbb{R}$, a un point adhérent à I , $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. si g ne s'annule pas sur un voisinage de a ,

a) On dit que f est dominée par g au voisinage de a , et que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ quand x tend vers a , et que « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ quand x tend vers a », et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ pour dire que $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a .

b) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , et que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand $x \rightarrow a$, et que « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x tend vers a », et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ pour dire que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

c) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , et que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a , et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ pour dire que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

2. Cas général.

On dit que $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)) \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \end{cases}$ pour dire qu'il existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) =$

$g(x)h(x)$ au voisinage de a , et $\begin{cases} h \text{ est au voisinage de } a \text{ bornée} \\ h \text{ tend en } a \text{ vers } 0 \\ h \text{ tend en } a \text{ vers } 1 \end{cases}$.

Remarque.

1. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a .

2. **ATTENTION** au point a ! En effet,

$$\triangleright \frac{x^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ donc } x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$$

- ▷ $\frac{x^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$
- ▷ $\frac{x^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ donc $x^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x$.

Mais pourquoi avoir introduit ces notations, notamment les équivalents ?

Propriété 1 (Équivalence asymptotique et limite).

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell.$$

b) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

2. Soit $I \subset \mathbb{R}$, a adhérent à I , $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell.$$

b) soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarque.

1. Le (b) **n'est pas** une équivalence : si $\ell = 0$ ou $\ell = \pm\infty$, on peut avoir $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ mais $\neg(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n)$. Par exemple, si $u_n = n$, $v_n = n^2$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais on n'a pas $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
2. À partir de maintenant, on va arrêter de séparer suites et fonctions : on écrira les propriétés pour les fonctions seulement, en sachant qu'elles seront adaptables pour les suites.

1.2 Comparaisons asymptotiques de référence

Propriété 2 (Prépondérances classiques – croissances comparées).

1. Si $a < b$, $x^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^b)$,
2. Si $a < b$, $x^b \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^a)$,
3. Si $0 < a < b$, $a^x \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(b^x)$,
4. (croissances comparées) Si $a, b > 0$,
 $\ln(x)^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^b)$, $x^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{bx})$, $\ln(x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{-b})$,
5. (prépondérances classiques avec les factorielles) Si $x > 0$,
 $x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$ et $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^n)$.

Propriété 3 (Équivalents classiques).

Tous les équivalents de cette proposition sont pris en 0.

1. $\tan(x) \sim x$
2. $\sin(x) \sim x$
3. $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$

► **Démonstration.** Les deux premiers relèvent de considération géométriques. Puis tous se démontrent avec un taux d'accroissement, sauf

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \cos(2x/2)}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

QED ◀

Remarque. Il faut comprendre que les deux choses suivantes sont très différentes :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x \text{ et } e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

En effet, le premier équivalent est vrai, mais est tout aussi vrai que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x^2$ ou que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - 234823489 \sin(x) + x^{1348129048932849014385}$: le rapport des deux fonctions tend vers 1.

En revanche, pour le second équivalent, c'est très différent : on a soustrait le « gros » terme de e^x , i.e. 1, et on regarde plus finement. Là, il n'y a qu'une possibilité : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Maintenant, un équivalent de la factorielle de $n!$ lorsque l'entier naturel n devient infiniment grand. Ce résultat est non trivial.

Propriété 4 (Équivalent de Stirling).

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n e^{-n} n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

Exo 2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite réelle $\left(\binom{2n}{n}/4^n : n \in \mathbb{N}\right)$.

1.3 Règles de manipulation des $o/\sim/O$

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I .

Propriété 5 (Liens entre les comparaisons).

1. Entre o et \sim : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.
2. Entre o et O : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.
3. Entre \sim et O : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.

Propriété 6 (Attributs de chaque relation).

1. o est transitive : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$,
2. \sim est une relation d'équivalence,
3. O est réflexive et transitive.

Remarque. On n'a pas d'antisymétrie : $2x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$ et $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(2x + 1)$.

Propriété 7 (Équivalent par encadrement).

Si $f \leq g \leq h$ ET $f \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h$.

Remarque. Un encadrement au voisinage de a est suffisant (on restreint les fonctions).

On adapte pour les suites.

2 Développements limités

2.1 Définition

Définition 4 : *Développement limité en un point de la droite réelle.*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, a un point ou une borne de I , n un entier. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en I s'il existe $n + 1$ réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$ est appelée partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a .

Le premier ordre non nul du développement limité de f en a est, s'il existe, $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

Remarque.

1. L'idée fondamentale des développements limités est la suivante : $(x-a)^{k+1} \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^k)$. Ainsi, un développement limité est une manière de présenter des approximations de plus en plus précises d'une fonction f au voisinage d'un point a .
2. Si k est le premier ordre non nul du $DL_n(a)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_k(x-a)^k$.
3. Les équivalents classiques nous ont permis d'écrire que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Ainsi, $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$: il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle.
4. Toute fonction n'admet pas nécessairement de DL :

▷ $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de $DL_0(0)$. Sinon, on aurait $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + o(1)$, i.e. $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_0$, impossible car $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

▷ $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de $DL_1(0)$. En effet, si on avait $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + o(x)$, alors, $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_0$, donc $a_0 = 0$. Mais alors

$$\frac{\sqrt{x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + o(1),$$

absurde car $\frac{\sqrt{x}}{x}$ tend vers $+\infty$ en 0.

▷ Si f est un polynôme, f admet un DL à tout ordre en 0 : ainsi, si $f(x) = 5x^6 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$, le $DL_4(0)$ de f est

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + x^2 + 2x^3 - x^4 + o(x^4).$$

Propriété 8.

- (i) La partie régulière d'un développement limité est unique.
- (ii) Si f admet un DL à l'ordre n en a , alors elle admet un DL à l'ordre m pour tout entier $m \leq n$: si

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

On a fait ainsi la **troncature à l'ordre k** de la partie régulière du $DL_n(a)$ de f .

► **Démonstration.**

1. On suppose que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

et que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Supposons que $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$. Alors $\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \neq b_i\}$ est une partie de \mathbb{N} , non vide, et admet par conséquent un plus petit élément k . Alors $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ mais $a_k \neq b_k$.

Mais alors si on pose $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x - a)^i$, alors

$$f(x) - g(x) = a_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

et

$$f(x) - g(x) = b_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

donc

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^k} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} a_k \text{ et } \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^k} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b_k,$$

d'où $a_k = b_k$, absurde ! Donc $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$.

2. Évident.

QED ◀

Remarque.

1. Admettre en a un nombre dérivé est équivalent à admettre en a un développement limité à l'ordre 1.

2. Est-ce que être n -fois dérivable en a est équivalent à admettre en a un développement limité à l'ordre n ? C'est faux pour les ordres supérieurs. En effet, soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + o(x^2)$, donc f admet un $DL_2(0)$, mais f n'est pas deux fois dérivable en 0 (cf. chapitre sur la dérivabilité)

2.2 Développements limités usuels en 0

Propriété 9 (Formule de Taylor-Young).

Soient n un entier naturel non nul, f une fonction complexe n -fois continûment dérivable (de classe \mathcal{C}^n) sur I et $a \in I$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (x-a)^n \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \cdot o(1) \end{aligned}$$

Propriété 10 (DL usuels en 0).

- (i) $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- (ii) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- (iii) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

(iv) En particulier, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$

et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

(v) Pour \sin ,

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2p+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

mais, on a aussi

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

(vi) Pour \cos ,

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2p}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

mais, on a aussi

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

(vii) $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Exo 3. Ecrire les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto 1/\sqrt{1+x}$, et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

2.3 Propriétés opératoires

Maintenant qu'on a les développements limités usuels, comment les manipuler ?

Propriété 11 (Combinaison linéaire).

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , de parties régulières P_n et Q_n . Alors $f + \lambda g$ admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière $P_n + \lambda Q_n$, quel que soit le complexe λ .

Exemple 2.1. En pratique ! Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$\ln(1+x) - \sin(x)$.

Pour le reste (produit, quotient, etc...), on va avoir besoin de parler de « troncature » :

Définition 5 : *Troncature.*

La troncature à l'ordre p d'une partie régulière $P_n = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ est simplement

$$\sum_{k=0}^p a_k(x-a)^k.$$

Propriété 12 (Produit).

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , de parties régulières P_n et Q_n . Alors fg admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière la troncature à l'ordre n de $P_n Q_n$.

Exemple 2.2. En pratique! Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\sin(x) \cos(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Bon, on n'y est presque pour déterminer nos « formes indéterminées ». Il ne manque plus que les quotients!

Propriété 13 (Composition).

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a et en $f(a)$ respectivement, de parties régulières P_n et Q_n . Alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière la troncature à l'ordre n de $Q_n \circ P_n : x \mapsto Q_n(P_n(x))$.

Exemple 2.3. En pratique! Déterminons le DL à l'ordre 4 en 0 de

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Propriété 14 (Inverse).

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en a , **telle que** $f(a) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un DL en a à l'ordre n , calculé grâce à la composition de fonctions.

Exemple 2.4. Déterminons le développement limité de $\frac{1}{\cos(x)}$ en 0, et déduisons-en le développement limité de $\tan(x)$ en 0!

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

QUESTION : que faire si $f(a) = 0$???

Propriété 15 (Quotient).

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en a telle que $f(x) \sim \lambda(x-a)^\alpha$ et g admettant un DL à l'ordre n en a telle que $g(x) \sim \mu(x-a)^\beta$ avec $\beta \leq \alpha$. Alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en a .

Exemple 2.5. Déterminer de DL de $\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^4)$ à l'ordre 2 en 0.

Une dernière technique est très utile dans la détermination de développements limités.

Propriété 16 (Primitivation/intégration d'un DL).

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre $n-1$ en a , F une primitive de f . Alors F admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , obtenu en primitivant terme à terme le DL de f : si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}),$$

alors

$$F(x) = F(a) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_{n-1}\frac{(x-a)^n}{n} + o((x-a)^n).$$

Exo 4. En déduire les développements limités à l'ordre 5 en 0 de \ln , Arctan et Arcsin .

Remarque. En revanche, on n'a pas le droit de dériver les développements limités !

Propriété 17.

Si f admet un DL à l'ordre n en a ET que f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en a , alors la partie régulière du DL à l'ordre $n - 1$ de f' est la dérivée de la partie régulière du DL à l'ordre n de f .

Remarque. Un contre-exemple nécessaire : $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Il peut être utile d'écrire les DL en factorisant par le premier ordre non nul : c'est la *forme normalisée* d'un DL.

Définition 6.

La *forme normalisée* de $a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ est

$$x^k (a_k + a_{k+1} x + \dots + a_n x^{n-k} + o(x^{n-k})).$$

Question : que faire quand on n'est pas en 0 ??

Propriété 18.

Si, et seulement si, $h \mapsto f(a + h)$ admet un DL à l'ordre n en 0, alors f admet un DL à l'ordre n en a .

Méthode 1.

DL à l'ordre 3 en 2 de \ln .

DL à l'ordre 3 en 1 de e^x

DL à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\sin(x)$.

3 Notion de développement asymptotique

Une extension de la notion de développement limité est la notion de développement asymptotique, pour des grandeurs qui tendent vers l'infini.

Exemple 3.1. Lorsqu'on écrit $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on peut en déduire que

$$\sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On n'a plus vraiment un développement limité, mais un développement asymptotique.

Définition 7.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, a un point ou une borne de I . On dit que f admet un développement asymptotique à p termes en a s'il existe g_1, \dots, g_p fonctions non nulles telles que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_p(x) + o(g_p(x)),$$

et, pour tout i dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $g_{i+1}(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_i(x))$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un développement asymptotiques à p termes s'il existe $(v_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (v_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ p suites telles que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \dots + v_n^{(p)} + o(v_n^{(p)}),$$

et, pour tout i dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $v_n^{(i+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n^{(i)})$.

Méthode 2. Il y a essentiellement deux manières de déterminer un développement asymptotique.

▷ ou bien il s'agit de composer une fonction et un développement limité usuel.

Exemple : Déterminer un développement asymptotique en 0 de $x \mapsto x^x$.

▷ ou bien on cherche un équivalent de $f(x)$ (ou de u_n), puis, si cet équivalent est $g(x)$, on cherche un équivalent de $f(x) - g(x)$, et on continue ainsi.

Exemple : Déterminer un développement asymptotique de $(\ln(n!)) : n \in$

⟨ \mathbb{N}^*).

Exo 5. Déterminer le développement asymptotique en 0 de $\frac{1}{\sin(x)}$.

Exo 6. Déterminer le développement asymptotique de $\frac{1}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0.

4 Applications

Maintenant que nous avons vu comment calculer des développements limités, il est temps de voir comment les appliquer.

4.1 Calculs de limites

À l'aide de développements limités, on peut calculer des limites !

Exo 7. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

4.2 Étude locale de courbes

Les développements limités servent à mieux comprendre le comportement local de courbes.

Propriété 19 (Position par rapport à une tangente).

1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si a est un point de I , on rappelle que le DL à l'ordre 1 de f en a , s'il existe, donne l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

2. Si on a mieux :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x - a) + b_p(x - a)^p + o((x - a)^p),$$

avec $b_p \neq 0$, alors la parité de p et le signe de b_p donnent la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse a .

Propriété 20 (Condition **nécessaire** de minimum/local à l'ordre 2).

Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. On suppose que a est intérieur à I .

1. Si f atteint un minimum local en a , alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
2. Si f atteint un maximum local en a , alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

Remarque. Cette condition est non suffisante comme le prouve $x \mapsto x^3$.

Propriété 21 (Condition **suffisante** d'extremum local à l'ordre 2).

Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, alors f atteint un extremum local en a , sa nature étant donnée par le signe de f'' : si $f''(a) > 0$, alors f atteint un minimum local en a . Sinon, f atteint un maximum local en a .

Remarque.

1. Cette condition est non nécessaire comme le prouve $x \mapsto x^4$.
2. On pourrait généraliser en regardant la première dérivée d'ordre > 1 qui soit non nulle : si elle est paire, on a un extremum local.
3. Au contraire, si $f'(a)$ est quelconque, que $f''(a) = 0$ et que $f'''(a) \neq 0$, on a un **point d'inflexion** de la courbe, c'est-à-dire un changement de position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente.

4.3 Étude en $+\infty$

Exemple 4.1. Étudions deux exemples : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + x^{3/2}}$. On a les développements asymptotiques suivants :

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

De même,

$$g(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{8} + o(1).$$

Et on peut tracer les allures des deux courbes.

On en déduit les deux propriétés/définitions suivantes :

Propriété 22 (et définition).

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, alors f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$. Sa position relative est déterminée par le signe de ε au voisinage de $+\infty$.
2. Aussi,
 - ▷ si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \pm\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique d'équation $x = 0$;
 - ▷ si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a \in \mathbb{R}$, alors on étudie $f(x) - ax$:
 - si $f(x) - ax \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \pm\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique d'équation $y = ax$
 - si $f(x) - ax \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} b \in \mathbb{R}$, la courbe de f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$. Dans ce cas la position de la courbe et de son asymptote au voisinage de l'infini est déterminée par le signe de $f(x) - ax - b$.

4.4 Etude de suites définies implicitement

Nous allons, au travers d'un exemple, rappeler, et prolonger, l'étude d'une suite définie implicitement.

Exo 8.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^{-\frac{x}{n}} = x$ admet une unique solution x_n .
2. Déterminer le sens de variations de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite ℓ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.
5. Déterminer un développement asymptotique de à trois termes de x_n .

SOMMAIRE

14 Analyse asymptotique

1	Relations de comparaison asymptotique	1
1.1	Définitions	1
1.2	Comparaisons asymptotiques de référence	6
1.3	Règles de manipulation des $o/ \sim /O$	7
2	Développements limités	8
2.1	Définition	8
2.2	Développements limités usuels en 0	11
2.3	Propriétés opératoires	12
3	Notion de développement asymptotique	16
4	Applications	17
4.1	Calculs de limites	17
4.2	Étude locale de courbes	17
4.3	Étude en $+\infty$	19
4.4	Etude de suites définies implicitement	20