MPSI 1

Mathématiques
DS 06 (4H 00)

Samedi 08 février – 8h-12h

Hormis la page de garde, le sujet comporte cinq pages. Il comprend un exercice d'algèbre générale et trois problèmes d'analyse. Dans les problèmes 1 et 3, les parties sont indépendantes entre elles.

Exercice 1.

1. Décomposer la permutation σ, définie ci-après, en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions et calculer sa signature.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. On suppose que G est fini. En considérant le produit des éléments de G, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \ \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{r + s\sqrt{2} : \ (r, s) \in \mathbb{Q}^2\}$.

5. Vérifier que pour tout $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$, si $r + s\sqrt{2} = 0$ alors $(r, s) = (0, 0)$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

6. Soit φ un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ tel que $\varphi(r) = r$ pour tout réel $r \in \mathbb{R}$. En considérant l'image de i, montrer que φ est soit l'identité soit la conjugaison.

Problème 1. Fonction discrètement convexe.

Dans tout ce problème, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est discrètement convexe pour dire que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Dans toute la suite, on suppose que f est discrètement convexe et on considère $(a, b) \in \mathrm{I}^2$.

Partie I. Combinaison convexe dyadique

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $t \in [0; 1]$, on pose $\Gamma(u, v, t) = u + t(v - u)$.

1. Ici, on suppose $a < b$. Représenter graphiquement sur quatre segments distincts les quatre ensembles de points $E_n := \left\{\Gamma(a, b, k/2^n) : \ k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \quad f\Big(a + \frac{k}{2^n}(b - a)\Big) \leqslant f(a) + \frac{k}{2^n}\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

3. On suppose que f est continue. Déduire de ce qui précède que f est convexe.

Partie II. Combinaison convexe rationnelle

Cette partie vise à montrer que

$$\forall t \in \mathbb{Q} \cap [0; 1], \quad f\big(a + t(b - a)\big) \leqslant f(a) + t\big(f(b) - f(a)\big).$$

Soit un entier naturel n supérieur à 2. Soit un entier naturel k strictement compris entre 0 et n.
Pour tout $i \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, on pose

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a).$$

4. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \leqslant f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

5. En déduire que

$$f(x_k) - f(x_0) \leqslant k\Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big) \quad \text{et} \quad f(x_n) - f(x_k) \geqslant (n-k)\Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big)$$

6. Conclure.

Problème 2. Méthode d'Euler

Partie I. Questions préliminaires

Les résultats établis dans cette partie pourront être utilisés pour la suite. On établit d'abord la

Proposition 1 (Égalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soient un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$; φ une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$; deux points a et b de I. Alors il existe c entre a et b tel que*

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + \frac{\varphi''(c)}{2}(b-a)^2.$$

Pour ce faire, le cas $a = b$ étant trivial, on suppose $a < b$ mais elle s'adapte parfaitement au cas où $a > b$.

1. En considérant la fonction $\psi_A : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(b) - \left[\varphi(x) + \varphi'(x)(b-x) + \frac{A}{2}(b-x)^2\right]$, pour un réel A judicieusement choisi, montrer la conclusion de la proposition 1.

2. On suppose que φ est de dérivée seconde positive. Déduire de l'égalité de Taylor-Lagrange que la courbe de φ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Un second résultat préliminaire.

Proposition 2. *Soient une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$; et deux réels strictement positifs A et B. On suppose que pour tout k dans $\mathbb{N}$,*

$$0 \leqslant a_{k+1} \leqslant (1+A).a_k + B.$$

Alors pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant a_n \leqslant (1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A}B \leqslant \mathrm{e}^{nA} a_0 + \frac{\mathrm{e}^{nA} - 1}{A}B.$$

3. Montrer la conclusion de la proposition 2.

Partie II. Description de la méthode

On cherche à approcher les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, où F est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où la fonction inconnue y est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le **schéma d'Euler à** $n+1$ **points** consiste à poser

- le **pas** de la méthode $h_n = \dfrac{b-a}{n}$,

- les **temps discrétisés** $(t_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définis par $t_{n,k} = a + kh_n$,
- la suite des **valeurs approchées de la solution** $(y_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par $y_{n,0} = y(a)$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$,
$$y_{n,k} = y_{n,k-1} + h_n F(y_{n,k-1}).$$

Cette formule s'explique simplement : $y_{n,k}$ est censé être une approximation de $y(t_{n,k})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h_n} &\approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{h_n}\\ &\approx \frac{y(t_{n,k}) - y(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}}\\ &\approx y'(t_{n,k-1})\\ &\approx F(y(t_{n,k-1}))\\ &\approx F(y_{n,k-1}).\end{aligned}$$

4. Proposer un programme Python `euler(F,a,b,y0,n)` qui prend en arguments une fonction `F`, deux flottants `a<b`, une condition initiale `y0`, un entier `n` et qui renvoie deux listes : la liste des temps discrétisés et la liste des valeurs approchées de la solution.

Partie III. Preuve de la convergence

Dans cette partie, y est une solution $\mathscr{C}^1$ de l'équation différentielle. On suppose de plus que F est $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée par $K > 0$.

5. Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$, que y' et y'' sont bornées sur $[a, b]$.
On note $C = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y'(t)|$ et $D = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y''(t)|$.

6. Démontrer que $\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2,\ |F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

On admettra aussi que pour tous s et t dans $[a, b]$,

$$|y(s) - y(t)| \leqslant C|s - t| \text{ et } |y'(s) - y'(t)| \leqslant D|s - t|.$$

7. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer que

$$|y\left(t_{n,k+1}\right) - y_{n,k+1}| \leqslant \left(h_n.\mathrm{K} + 1\right)|y\left(t_{n,k}\right) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2}D$$

On pourra utiliser la question 1.

On note alors l'erreur d'ordre n

$$\mathrm{err}_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |y_{n,k} - y(t_{n,k})|\,.$$

8. Démontrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{err}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K}\frac{h_n}{2}D$$

9. En déduire que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\left|\frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K}D + C.$$

On pourra écrire que
$|y_{n,k+1} - y_{n,k}| = |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}|$.

On note de plus g_n la fonction définie ainsi :

- pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ $g_n(t_{n,k}) = y_{n,k}$
- g_n est affine sur chaque segment $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

10. Démontrer qu'il existe une constante M telle que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$,
$$|g_n(r) - g_n(s)| \leqslant M|r - s|.$$

11. Démontrer que pour tout x dans $[a, b]$, $g_n(x) - y(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On pourra, pour x et n fixés, considérer k tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

Problème 3. Suites réelles convergentes

Dans tout ce problème, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelle qu'elle soit. *On pensera à s'aider de représentations graphiques.*

Partie I. Suites constantes

On considère les propositions suivantes :

(1) $\exists \ell \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in [\![0, \infty[\![, \quad u_n = \ell$.

(2) $\forall i \in [\![0, \infty[\![, \forall j \in [\![0, \infty[\![, \quad u_j = u_i$.

(3) $\forall n \in [\![0, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} = u_n$.

(4) $\forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_p = u_0$.

1. Montrer que les quatre propositions ci-avant sont équivalentes.

Partie II. Suites stationnaires

On considère les propositions suivantes :

(a) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N, \infty[\![, \quad u_n = \ell$.

(b) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall i \in [\![N, \infty[\![, \forall j \in [\![N, \infty[\![, \quad u_j = u_i$.

(c) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} = u_n$.

(d) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{N+p} = u_N$.

2. Montrer que les quatre propositions ci-avant sont équivalentes.

3. En revenant à la définition, montrer par l'absurde que la suite réelle $((-1)^n)_n$ est divergente.

4. Montrer que parmi les suites réelles à valeurs entières les suites convergentes sont les suites stationnaires.

Partie III. Suites quasi-stationnaires

On considère les propositions suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \quad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

(ii) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall i \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \forall j \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \quad u_j \in [u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon]$.

(iii) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} \in [u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon]$.

(iv) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{N_\varepsilon + p} \in [u_{N_\varepsilon} - \varepsilon, u_{N_\varepsilon} + \varepsilon]$.

5. Montrer la chaîne d'implications suivante : (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

On suppose que la proposition (iv) est vraie. Pour tout entier naturel n, on appelle a_n et b_n les deux réels définies par

$$a_n \stackrel{def.}{=} \inf \left\{ u_{n+p} : \ p \in [\![0, \infty[\![\right\} \quad \text{et} \quad b_n \stackrel{def.}{=} \sup \left\{ u_{n+p} : \ p \in [\![0, \infty[\![\right\}.$$

6. Montrer que les deux suites réelles $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ et $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ sont **bien définies** et qu'elles sont adjacentes.

7. En déduire les équivalences visées.

On considère la proposition suivante :

(v) $\exists (r_n)_n \in \ell_0(\mathbb{R}_+) \ / \ \forall n \in [\![0, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant r_n$.

Où $\ell_0(\mathbb{R}_+)$ désigne ici l'ensemble des suites réelles positives de limites nulles.

8. Montrer que les propositions (i), (ii), (iii) et (iv) ci-avant sont équivalentes à (v).

***