MPSI 1

Mathématiques
DS 06 (4H 00)

Samedi 08 février – 8h-12h

Hormis la page de garde, le sujet comporte cinq pages. Il comprend un exercice d'algèbre générale et trois problèmes d'analyse. Dans les problèmes 1 et 3, les parties sont indépendantes entre elles.

Exercice 1.

1. Décomposer la permutation σ, définie ci-après, en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions et calculer sa signature.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. On suppose que G est fini. En considérant le produit des éléments de G, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \ \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{r + s\sqrt{2} : \ (r, s) \in \mathbb{Q}^2\}$.

5. Vérifier que pour tout $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$, si $r + s\sqrt{2} = 0$ alors $(r, s) = (0, 0)$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Comme en salle !

Traitons la première requête.

Soit $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$. Supposons que $r + s\sqrt{2} = 0$. Alors $s\sqrt{2} = -r$.
Si $s \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{-r}{s} \in \mathbb{Q}$. Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; donc $\boxed{s = 0}$. Donc $\boxed{r = 0}$.
C'est fait !

Traitons la seconde requête.

Premièrement, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est bien une partie de $\mathbb{R}$.

Deuxièmement, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ possède 1 (donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ sont non vides). En effet, $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$ avec $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$.

Troisièmement, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est stable par soustraction et par multiplication.
En effet, soient x et y dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Alors on choisit (r, s) et (t, u) dans $\mathbb{Q}^2$ tels que $x = r + s\sqrt{2}$ et $y = t + u\sqrt{2}$. Alors

$$-x + y = (-r + t) + (-s + u)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

Et

$$x \times y = (r + s\sqrt{2})(t + u\sqrt{2}) = rt + su\sqrt{2}^2 + (ru + ts)\sqrt{2} = rt + sua + (ru + ts)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Quatrièmement et dernièrement, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est stable par passage à l'inverse de tout élément non nul.
En effet, soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$. On choisit $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = r + s\sqrt{2}$. Alors $r + s\sqrt{2} \neq 0$; donc, d'après ce qui précède, $(r, s) \neq (0, 0)$; donc $r - s\sqrt{2} \neq 0$. Donc

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r + s\sqrt{2}} = \frac{r - s\sqrt{2}}{(r + s\sqrt{2})(r - s\sqrt{2})} = \frac{r - s\sqrt{2}}{r^2 - s^2 a} = \frac{r}{r^2 - s^2 a} - \frac{s}{r^2 - s^2 a}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

C'est fait !

Q.E.D.

---

6. Soit φ un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ tel que $\varphi(r) = r$ pour tout réel $r \in \mathbb{R}$. En considérant l'image de i, montrer que φ est soit l'identité soit la conjugaison.

Problème 1. Fonction discrètement convexe.

Dans tout ce problème, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est discrètement convexe pour dire que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Dans toute la suite, on suppose que f est discrètement convexe et on considère $(a, b) \in \mathrm{I}^2$.

Partie I. Combinaison convexe dyadique

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $t \in [0; 1]$, on pose $\Gamma(u, v, t) = u + t(v - u)$.

1. Ici, on suppose $a < b$. Représenter graphiquement sur quatre segments distincts les quatre ensembles de points $E_n := \left\{\Gamma(a, b, k/2^n) : \ k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \quad f\left(a + \frac{k}{2^n}(b - a)\right) \leqslant f(a) + \frac{k}{2^n}\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Raisonnons par récurrence.

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall k \in [\![0, 2^n]\!], \quad f\left(\Gamma\big(a, b, \frac{k}{2^n}\big)\right) \leqslant \Gamma\big(f(a), f(b), \frac{k}{2^n}\big).$$

(I) On a $\;2^0 = 1\;$ et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma(u, v, 0) = u; \Gamma(u, v, 1) = v$. Donc $\mathcal{P}_0$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_{n'}$ pour tout $n' \in [\![0, n]\!]$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$ quelconque. Deux cas se présentent.

Cas 1 : Supposons que k est pair.
Soit alors $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2\ell$. Alors $k/2^{n+1} = \ell/2^n$. Or $2\ell \leqslant 2^{n+1}$; donc $\ell \in [\![0, 2^n]\!]$.
Donc, comme $\mathcal{P}_n$ est vraie,

$$f\left(\Gamma\big(a, b, \frac{k}{2^{n+1}}\big)\right) \leqslant \Gamma\big(f(a), f(b), \frac{k}{2^{n+1}}\big).$$

Cas 2 : Supposons que k est impair.
Soit alors $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2\ell + 1$. Alors $k/2^{n+1} = \big(\ell/2^n + (\ell+1)/2^n\big)/2$. Comme f est discrètement convexe,

$$f\Big(\frac{1}{2}\Gamma\big(a, b, \frac{\ell}{2^n}\big) + \frac{1}{2}\Gamma\big(a, b, \frac{\ell+1}{2^n}\big)\Big) \leqslant \frac{1}{2}f\Big(\Gamma\big(a, b, \frac{\ell}{2^n}\big)\Big) + \frac{1}{2}f\Big(\Gamma\big(a, b, \frac{\ell+1}{2^n}\big)\Big).$$

Or $2\ell < 2\ell + 1 \leqslant 2^{n+1}$; donc $\ell < 2^n$; donc $\ell, \ell+1 \in [\![0, 2^n]\!]$. Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie,

$$f\Big(\Gamma\big(a, b, \frac{\ell}{2^n}\big)\Big) \leqslant \Gamma\Big(f(a), f(b), \frac{\ell}{2^n}\Big)$$
$$f\Big(\Gamma\big(a, b, \frac{\ell+1}{2^n}\big)\Big) \leqslant \Gamma\Big(f(a), f(b), \frac{\ell+1}{2^n}\Big)$$

Or pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(s, t) \in [0; 1]^2$,

$$\frac{1}{2}\Gamma(u, v, s) + \frac{1}{2}\Gamma(u, v, t) = \Gamma\big(u, v, \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t\big).$$

Donc
$$f\Big(\Gamma\big(a, b, \frac{k}{2^{n+1}}\big)\Big) \leqslant \Gamma\big(f(a), f(b), \frac{k}{2^{n+1}}\big).$$

En somme, comme $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$ est quelconque, c'est fait !.

(C) En conclusion, d'après le principe de récurrence, le résultat est démontré.

---

3. On suppose que f est continue. Déduire de ce qui précède que f est convexe.

Soit Soit $t \in [0; 1]$. Nous montrons que :

$$f\big(a + t(b-a)\big) \leqslant f(a) + t\big(f(b) - f(a)\big).$$

Pour tout $n \in [0; 1]$, on pose $t_n = \lfloor 2^n t \rfloor / 2^n$; en sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t - 2^{-n} < t_n \leqslant t$; donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \quad f\big(a + \frac{k}{2^n}(b-a)\big) \leqslant f(a) + \frac{k}{2^n}\big(f(b) - f(a)\big).$$

Or $\lfloor 2^n t \rfloor \in [\![0, 2^n]\!]$ car $t \in [0; 1]$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\big(a + t_n(b-a)\big) \leqslant f(a) + t_n\big(f(b) - f(a)\big).$$

D'une part, $f(a) + t_n\big(f(b) - f(a)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a) + t\big(f(b) - f(a)$. D'autre part, comme f est continue et que $a + t_n(b-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + t(b-a)$, $f\big(a + t_n(b-a)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\big(a + t(b-a)\big)$.
Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient l'inégalité visée.

Partie II. Combinaison convexe rationnelle

Cette partie vise à montrer que

$$\forall t \in \mathbb{Q} \cap [0;1], \quad f\big(a + t(b-a)\big) \leqslant f(a) + t\big(f(b) - f(a)\big).$$

Soit un entier naturel n supérieur à 2. Soit un entier naturel k strictement compris entre 0 et n. Pour tout $i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$, on pose

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a).$$

4. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \leqslant f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a bien $i-1, i+1 \in [\![0, n]\!]$. Puis on a la chaîne d'équivalences :

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) \leqslant f(x_{i+1}) - f(x_i) &\iff 2f(x_i) \leqslant f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) \\ &\iff f(x_i) \leqslant \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})}{2}. \end{aligned}$$

Or les expressions x_i et $\dfrac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}$ sont égales, et f est discrètement convexe. Donc la dernière proposition de la chaîne est vraie ; d'où la première est vraie.

---

5. En déduire que

$$f(x_k) - f(x_0) \leqslant k\Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big) \quad \text{et} \quad f(x_n) - f(x_k) \geqslant (n-k)\Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big)$$

D'abord, d'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f(x_i) - f(x_{i-1}) \leqslant f(x_k) - f(x_{k-1})$. Donc en sommant ces inégalités pour $i \in [\![1, k]\!]$, on obtient $f(x_k) - f(x_0) \leqslant k\Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big)$.
C'est que :

$$f(x_k) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big) \leqslant k\Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big).$$

De même, pour tout $j \in [\![k, n-1]\!]$, $f(x_{j+1}) - f(x_j) \geqslant f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Donc $f(x_n) - f(x_k) \geqslant (n-k)\Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big)$.
C'est que :

$$f(x_n) - f(x_k) = \sum_{j=k}^{n-1} \Big(f(x_{j+1}) - f(x_j))\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big) \geqslant (n-k)\Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big).$$

---

6. Conclure.

D'après ce qui précède, comme $0 < k < n$, on a :

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{k - 0} \leqslant f(x_k) - f(x_{k-1}) \leqslant \Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big) \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_k)}{n - k}.$$

Donc

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{k - 0} \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_k)}{n - k}.$$

A cette inégalité on applique successivement $u \mapsto u \times k(n-k)$, puis $v \mapsto v + (n-k)f(x_0) + kf(x_k)$, puis $w \mapsto w/n$ pour obtenir :

$$f(x_k) \leqslant f(x_0) + \frac{k}{n}(f(x_n) - f(x_0)).$$

C'est que

$$f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big) \leqslant f(a) + \frac{k}{n}\Big(f(b) - f(a)\Big)$$

Soit à présent $t \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$. Montrons que :

$$f\big(a + t(b-a)\big) \leqslant f(a) + t\big(f(b) - f(a)\big).$$

Si $t \in \{0;1\}$, l'inégalité est vraie.
Supposons que $t \in]0;1[$. Comme $t \in \mathbb{Q}$, soit $(d,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ tel que $t = m/d$. Comme $t \in]0;1[$, $0 < m$ et $m < d$. Or $m, d \in \mathbb{Z}$; donc $1 \leqslant m$ et $m + 1 \leqslant d$. Ainsi, t s'écrit m/d avec $d \in [\![2, +\infty[\![$ et $m \in [\![1, d-1]\!]$. D'où l'inégalité.

Problème 2. Méthode d'Euler

Partie I. Questions préliminaires

Les résultats établis dans cette partie pourront être utilisés pour la suite. On établit d'abord la

Proposition 1 (Égalité de Taylor-Lagrange). *Soient un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$; φ une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$; deux points a et b de I. Alors il existe c entre a et b tel que*

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + \frac{\varphi''(c)}{2}(b-a)^2.$$

Pour ce faire, le cas $a = b$ étant trivial, on suppose $a < b$ mais elle s'adapte parfaitement au cas où $a > b$.

1. En considérant la fonction $\psi_A : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(b) - \left[\varphi(x) + \varphi'(x)(b-x) + \frac{A}{2}(b-x)^2\right]$, pour un réel A judicieusement choisi, montrer la conclusion de la proposition 1.

Comme $(b-a)^2/2 \neq 0$, on choisit l'unique réel A tel que

$$\varphi(b) - \left[\varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + A\frac{(b-a)^2}{2}\right] = 0.$$

En effet, c'est l'unique point d'annulation d'une fonction affine dont le coefficient de linéarité non nul.

Ainsi, la fonction ψ_A est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et la même valeur en a et b. Donc, d'après le théorème de Rolle, on choisit c dans $]a,b[$ tel que

$$\psi_A'(c) = 0.$$

Or

$$\psi_A'(c) = -\varphi''(c)(c-b) + A(c-b) \quad \text{et} \quad c-b \neq 0.$$

Donc

$$A = \varphi''(c).$$

D'où le résultat à prouver !

---

2. On suppose que φ est de dérivée seconde positive. Déduire de l'égalité de Taylor-Lagrange que la courbe de φ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{I}$. On choisit c entre x_0 et x tel que

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)\varphi'(x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \geqslant \varphi(a) + (x-x_0)\varphi'(x_0),$$

Comme $\varphi''(x_0) \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(x) \geqslant \varphi(a) + (x-x_0)\varphi'(x_0).$$

C'est que la courbe de φ est au-dessus de sa tangente en x_0.

Un second résultat préliminaire.

Proposition 2. *Soient une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$; et deux réels strictement positifs A et B. On suppose que pour tout k dans $\mathbb{N}$,*

$$0 \leqslant a_{k+1} \leqslant (1+A).a_k + B.$$

Alors pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant a_n \leqslant (1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A}B \leqslant \mathrm{e}^{nA}a_0 + \frac{\mathrm{e}^{nA}-1}{A}B.$$

3. Montrer la conclusion de la proposition 2.

On démontre le résultat par récurrence ! L'initialisation est évidente, car $(1+A)^0 a_0 + \dfrac{(1+A)^0 - 1}{A} B = a_0$.

Pour l'hérédité, soit k dans $\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant a_k \leqslant (1+A)^n a_0 + \dfrac{(1+A)^n - 1}{A} B$. Alors $0 \leqslant a_{k+1}$ et

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leqslant A.a_k + B \\ &\leqslant A\left((1+A)^n a_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B\right) + B \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &\leqslant A.(1+A)^n a_0 + ((1+A)^n - 1)B + B \\ &\leqslant A(1+A)^n a_0 + (1+A)^n B \leqslant \boxed{(1+A)^{n+1} a_0 + (1+A)^n B.} \end{aligned}$$

Notre but est donc de démontrer que $(1+A)^n \leqslant \dfrac{(1+A)^{n+1} - 1}{A}$. Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned} (1+A)^n \leqslant \frac{(1+A)^{n+1} - 1}{A} &\Leftrightarrow A(1+A)^n \leqslant (1+A)^{n+1} - 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + A.(1+A)^n \leqslant (1+A)^n + A.(1+A)^n \\ &\Leftrightarrow 1 \leqslant (1+A)^n, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Donc $\boxed{(1+A)^n \leqslant \dfrac{(1+A)^{n+1} - 1}{A}}$, d'où l'hérédité et le résultat !

Ensuite, on remarque que

$$\boxed{(1+A)^n = \mathrm{e}^{n \ln(1+A)} \leqslant \mathrm{e}^{nA}} \text{ par l'inégalité } \ln(1+x) \leqslant x.$$

Ceci entraîne la seconde inégalité.

Partie II. Description de la méthode

On cherche à approcher les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, où F est une fonction dérivable, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où la fonction inconnue y est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le **schéma d'Euler à** $n+1$ **points** consiste à poser

- le **pas** de la méthode $h_n = \dfrac{b-a}{n}$,
- les **temps discrétisés** $(t_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définis par $t_{n,k} = a + kh_n$,
- la suite des **valeurs approchées de la solution** $(y_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie par $y_{n,0} = y(a)$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$,
$$y_{n,k} = y_{n,k-1} + h_n F(y_{n,k-1}).$$

Cette formule s'explique simplement : $y_{n,k}$ est censé être une approximation de $y(t_{n,k})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{y_{n,k}-y_{n,k-1}}{h_n} &\approx \frac{y(t_{n,k})-y(t_{n,k-1})}{h_n}\\ &\approx \frac{y(t_{n,k})-y(t_{n,k-1})}{t_{n,k}-t_{n,k-1}}\\ &\approx y'(t_{n,k-1})\\ &\approx F(y(t_{n,k-1}))\\ &\approx F(y_{n,k-1}).\end{aligned}$$

4. Proposer un programme Python `euler(F,a,b,y0,n)` qui prend en arguments une fonction `F`, deux flottants `a<b`, une condition initiale `y0`, un entier `n` et qui renvoie deux listes : la liste des temps discrétisés et la liste des valeurs approchées de la solution.

On propose

```python
def euler(F,a,b,y0,n):
    T = [a]
    t = a
    Y = [y0]
    y = y0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        y = y + h*F(y)
        t = t+h
        Y.append(y)
        T.append(t)
    return T,Y
```

Partie III. Preuve de la convergence

Dans cette partie, y est une solution $\mathscr{C}^1$ de l'équation différentielle. On suppose de plus que F est $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée par $K > 0$.

5. Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$, que y' et y'' sont bornées sur $[a, b]$.
On note $C = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y'(t)|$ et $D = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y''(t)|$.

Déjà, comme $y'(t) = F(y(t))$ pour tout t, comme y est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, y' est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, donc y est $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.
y' est donc continue sur **le segment** $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes.
De même, y'' est continue sur **le segment** $[a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes.

---

6. Démontrer que $\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2,\ |F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $|F'|$ est majorée par K, on en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que pour tous w et z dans $\mathbb{R}$, $|F(w) - F(z)| \leqslant K|w - z|$.

On admettra aussi que pour tous s et t dans $[a, b]$,

$$|y(s) - y(t)| \leqslant C|s - t| \text{ et } |y'(s) - y'(t)| \leqslant D|s - t|.$$

7. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer que

$$|y(t_{n,k+1}) - y_{n,k+1}| \leqslant (h_n.\mathrm{K} + 1)\,|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2} D$$

On pourra utiliser la question 1.

On utilise la relation de récurrence ! On sait que

$$y_{n,k+1} = y_{n,k} + h_n F(y_{n,k})$$

et, par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe c entre $t_{n,k}$ et $t_{n,k+1}$ tel que

$$y(t_{n,k+1}) = y(t_{n,k}) + h_n y'(t_{n,k}) + \frac{h_n^2}{2} y''(c).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|y(t_{n,k+1}) - y_{n,k+1}| &= \left| y(t_{n,k}) + h_n y'(t_{n,k}) + \frac{h_n^2}{2} y''(c) - (y_{n,k} + h_n F(y_{n,k})) \right| \\
&= \left| y(t_{n,k}) - y_{n,k} + h_n \left(F(y(t_{n,k})) - F(y_{n,k}) \right) + \frac{h_n^2}{2} y''(c) \right| \\
&\leqslant |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + h_n \left| F(y(t_{n,k})) - F(y_{n,k}) \right| + \frac{h_n^2}{2} |y''(c)| \\
&\leqslant |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + h_n K \left| y(t_{n,k}) - y_{n,k} \right| + \frac{h_n^2}{2} D \\
&\leqslant (h_n.\mathrm{K} + 1)\,|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2} D.
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré !

On note alors l'erreur d'ordre n

$$\mathrm{err}_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |y_{n,k} - y(t_{n,k})|.$$

8. Démontrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{err}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)} - 1}{K} \frac{h_n}{2} D$$

De la question précédente et la question 3, on déduit que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$|y(t_{n,k+1}) - y_{n,k+1}| \leqslant (h_n.\mathrm{K}+1)\,|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| + \frac{h_n^2}{2}D,$$

donc, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$|y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \leqslant \mathrm{e}^{nh_nK}\,|y(t_{n,0}) - y_{n,0}| + \frac{\mathrm{e}^{nh_nK}-1}{h_nK}\frac{h_n^2}{2}D = \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}\frac{h_n}{2}D,$$

car la méthode d'Euler est initialisée en posant $y_{n,0} = y(a)$. Le majorant précédent étant indépendant de k, on en déduit une majoration de l'erreur comme désiré !

---

9. En déduire que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,

$$\left|\frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}D + C.$$

On pourra écrire que
$|y_{n,k+1} - y_{n,k}| = |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}|$.

Soit k dans $[\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
|y_{n,k+1} - y_{n,k}| &= |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1}) + y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \\
&\leqslant |y_{n,k+1} - y(t_{n,k+1})| + |y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k})| + |y(t_{n,k}) - y_{n,k}| \\
&\leqslant 2\mathrm{err}_n + |y(t_{n,k+1}) - y(t_{n,k})| \\
&\leqslant 2\frac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}\frac{h_n}{2}D + C|t_{n,k+1} - t_{n,k}|.
\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant par $|t_{n,k+1} - t_{n,k}|$, et comme $|t_{n,k+1} - t_{n,k}| = h_n$, on obtient le résultat désiré.

On note de plus g_n la fonction définie ainsi :

- pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ $g_n(t_{n,k}) = y_{n,k}$
- g_n est affine sur chaque segment $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

10. Démontrer qu'il existe une constante M telle que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$,

$$|g_n(r) - g_n(s)| \leqslant M|r - s|.$$

Comme g_n est affine sur $[t_{n,k}, t_{n,k+1}]$, pour tous $(r, s) \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$ avec $r \neq s$,

$$\frac{g_n(r) - g_n(s)}{r - s} = \frac{g_n(t_{n,k+1}) - g_n(t_{n,k})}{t_{n,k+1} - t_{n,k}} = \frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{t_{n,k+1} - t_{n,k}}.$$

C'est simplement la pente de la fonction affine ! Ainsi, le résultat est immédiat par la question précédente, avec $M = \dfrac{\mathrm{e}^{K(b-a)}-1}{K}D + C$.

11. Démontrer que pour tout x dans $[a,b]$, $g_n(x) - y(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On pourra, pour x et n fixés, considérer k tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$.

Soit x dans $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit k un entier tel que $x \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}]$. Alors

$$\begin{aligned} |g_n(x) - y(x)| &= |g_n(x) - g_n(t_{n,k}) + g_n(t_{n,k}) - y(t_{n,k}) + y(t_{n,k}) - y(x)| \\ &\leqslant |g_n(x) - g_n(t_{n,k})| + |g_n(t_{n,k}) - y(t_{n,k})| + |y(t_{n,k}) - y(x)| \\ &\leqslant M|x - t_{n,k}| + \mathrm{err}_n + C|t_{n,k} - x| \\ &\leqslant (M+C)h_n + \mathrm{err}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

Problème 3. Suites réelles convergentes

Dans tout ce problème, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelle qu'elle soit. *On pensera à s'aider de représentations graphiques.*

Partie I. Suites constantes

On considère les propositions suivantes :

(1) $\exists \ell \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in [\![0, \infty[\![, \quad u_n = \ell$.

(2) $\forall i \in [\![0, \infty[\![, \forall j \in [\![0, \infty[\![, \quad u_j = u_i$.

(3) $\forall n \in [\![0, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} = u_n$.

(4) $\forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_p = u_0$.

1. Montrer que les quatre propositions ci-avant sont équivalentes.

Il s'agit de verbaliser correctement.

Partie II. Suites stationnaires

On considère les propositions suivantes :

(a) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N, \infty[\![, \quad u_n = \ell$.

(b) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall i \in [\![N, \infty[\![, \forall j \in [\![N, \infty[\![, \quad u_j = u_i$.

(c) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} = u_n$.

(d) $\exists N \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{N+p} = u_N$.

2. Montrer que les quatre propositions ci-avant sont équivalentes.

Il n'y a rien à dire à part qu'on traite cela comme plus haut.

---

3. En revenant à la définition, montrer par l'absurde que la suite réelle $((-1)^n)_n$ est divergente.

Fait en salle.

---

4. Montrer que parmi les suites réelles à valeurs entières les suites convergentes sont les suites stationnaires.

Soit (a_n) une suite réelle à valeurs entières.

Supposons que la suite est stationnaire. Alors elle converge vers la valeur en laquelle elle stationne.

Supposons que la suite converge et appelons ℓ sa limite. Alors, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - 0,25 \leqslant a_n \leqslant \ell + 0,25$ pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{N+p} - a_N \in [-0,5; 0,5] \cap \mathbb{Z}$, donc $a_{N+p} - a_N = 0$, donc $a_{N+p} = a_N$. Donc la suite est stationnaire.

Q.E.D.

Partie III. Suites quasi-stationnaires

On considère les propositions suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \quad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

(ii) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall i \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \forall j \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \quad u_j \in [u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon]$.

(iii) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall n \in [\![N_\varepsilon, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{n+p} \in [u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon]$.

(iv) $\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \exists N_\varepsilon \in [\![0, \infty[\![\ / \ \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad u_{N_\varepsilon + p} \in [u_{N_\varepsilon} - \varepsilon, u_{N_\varepsilon} + \varepsilon]$.

5. Montrer la chaîne d'implications suivante : (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv).

Il suffit de l'écrire en parlant correctement, et **sans radoter**.

On suppose que la proposition (iv) est vraie. Pour tout entier naturel n, on appelle a_n et b_n les deux réels définies par

$$a_n \overset{def.}{=} \inf \left\{ u_{n+p} : \ p \in [\![0, \infty[\![\right\} \quad \text{et} \quad b_n \overset{def.}{=} \sup \left\{ u_{n+p} : \ p \in [\![0, \infty[\![\right\}.$$

6. Montrer que les deux suites réelles $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ et $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ sont **bien définies** et qu'elles sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque (variable). Posons

$$U_n \overset{def.}{=} \{u_{n+p} \ : \ p \in [\![0, +\infty[\![\} = \{u_{n'} \ : \ n' \in [\![n, +\infty[\![\}.$$

Premièrement, montrons que $(a_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ et $(b_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ sont bien définies, en montrant que la suite $(u_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ est bornée.

Par hypothèse, on pose $\varepsilon = 10^{-2025}$ puis on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N - \varepsilon \leqslant u_{N+p} \leqslant u_N + \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Alors le minimum et le maximum de la liste de réels $(u_0, u_1, \ldots, u_N, u_N + \varepsilon, u_N - \varepsilon)$ sont respectivement un minorant et un majorant de $(u_k \ : \ n \in \mathbb{N})$.

D'où U_n est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$; donc les deux réels a_n et b_n sont bien définis.

C'est fait !

Deuxièmement, montrons que $(a_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ et $(b_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ sont respectivement croissante décroissante.

Soit $x \in U_{n+1}$ quelconque. On a $x \in U_n$. Or a_n et b_n sont respectivement un minorant et un majorant de U_n. Donc $x \geqslant a_n$ et $x \leqslant b_n$. Ainsi, x étant quelconque dans U_{n+1}, a_n et b_n sont respectivement un minorant et un majorant de U_{n+1}. Donc $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

C'est fait !

Troisièmement et dernièrement, montrons que $(b_k - a_k \ : \ k \in \mathbb{N})$ tend vers 0.

D'abord, on remarque que cette suite est décroissante d'après les sens de variations ci-avant et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leqslant u_k \leqslant b_k$; donc $b_k - a_k \geqslant 0$.

Qu'on donne un réel $\varepsilon > 0$, quelque petit qu'il soit. Posons $\varepsilon' = \min(10^{-2025}, \varepsilon/2)$ en sorte que $\varepsilon' \in]0; 10^{-2025}$ et $2\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Comme plus haut, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N - \varepsilon' \leqslant u_{N+p} \leqslant u_N + \varepsilon'$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par suite, $u_N - \varepsilon' \leqslant a_N$ et $b_N \leqslant u_N + \varepsilon'$; puis $b_N - a_N \leqslant 2\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. D'où, d'après les remarques plus haut, $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$.

C'est fait !

Q.E.D.

---

7. En déduire les équivalences visées.

Appelons ℓ la limite commune des deux suites réelles adjacentes ci-avant.

Qu'on donne un réel $\varepsilon > 0$, quelque petit qu'il soit. Comme (a_n) et (b_n) tendent vers ℓ, et que $\varepsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $a_n \geqslant \ell - \varepsilon$ et $b_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Or, pour tout entier $n \geqslant N$, $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. Donc pour tout $n \in [\![N, +\infty$, $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Q.E.D.

On considère la proposition suivante :

(v) $\exists (r_n)_n \in \ell_0(\mathbb{R}_+) \; / \; \forall n \in [\![0, \infty[\![, \forall p \in [\![0, \infty[\![, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant r_n$.

Où $\ell_0(\mathbb{R}_+)$ désigne ici l'ensemble des suites réelles positives de limites nulles.

8. Montrer que les propositions (i), (ii), (iii) et (iv) ci-avant sont équivalentes à (v).

D'abord, les quatre propositions (i), (ii), (iii) et (iv) étant équivalentes, soit elles sont toutes les quatre vraies, soit elles sont toutes les quatre fausses. Il s'agit donc de montrer l'équivalence entre la cinquième et la conjonction des quatre première : $(v) \iff \big((i) \wedge (ii) \wedge (iii) \wedge (iv)\big)$. On peut montrer deux implications.

On suppose $(i) \wedge (ii) \wedge (iii) \wedge (iv)$. On sait que toute suite convergente est bornée puis, pour tout entier naturel n, on peut poser le réel r_n égal la borne supérieure de $\{|u_{n+p} - u_n| \ : \ p \in [\![0, +\infty[\![\}$, ensemble non vide et bornée d'après l'inégalité triangulaire...

On suppose (v). On montre (iii) en quantifiant. Donc $(i) \wedge (ii) \wedge (iii) \wedge (iv)$.

***