Thèmes

1. Analyse asymptotique (*questions de cours seulement*).

a) *Domination/négligeabilité/équivalence* :

(i) Notations : $\underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(1)$, $\underset{x\to a}{=} o(1)$, et $\underset{x\to a}{\sim} 1$; $\underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, $\underset{x\to a}{=} o(g(x))$, et $\underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Adaptation pour les suites. **(ii)** Croissances comparées : comparaison, au voisinage de $+\infty$, de $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto x^b$ puis de $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto \ln(x)^c$; comparaison, au voisinage de 0, de $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto \ln^c(x)$. Adaptation pour les suites. **(iii)** Comparaisons asymptotiques de suites : $(n^n \ ; \ n \in [\![2,+\infty[\![)$, $(n! \ ; \ n \in [\![2,+\infty[\![)$, $(r^n \ ; \ n \in [\![2,+\infty[\![)$, $(n^s \ ; \ n \in [\![2,+\infty[\![)$, $((\ln n)^t \ ; \ n \in [\![2,+\infty[\![)$. **(iv)** Equivalent de Stirling (*non démontré*).

b) *Développements limités en un point réel* : **(i)** Unicité de la partie régulière (des coefficients) du développement limité à l'ordre n. **(ii)** Premiers développements limités : à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ (*expression exacte du reste*) ; puis de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. **(iii)** Existence d'un développement limité à l'ordre n : la formule de Taylor-Young (*non démontrée*) pour une fonction $\mathscr{C}^n$; application au développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{\mathrm{i}\,x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$; déduction du développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **(iv)** Primitivation/intégration d'un développement limité à l'ordre $n-1$ (*non démontrée*) : application à $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$. **(v)** Opération algébriques et développements limités : combinaison linéaire et application à $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$; produit ; composée (*seulement en exemple*) ; inverse ; quotient.

c) *Application des développements limités* : **(i)** Condition nécessaire de minimum local à l'ordre 2 (en un point intérieur) : Pour que f admette un minimum local en a, point intérieur à I, il est nécessaire que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geqslant 0$ (*Cas de* $x \mapsto x^3$). Adaptation pour le maximum local. **(ii)** Condition suffisante de minimum local à l'ordre 2 (en un point intérieur) : Pour que f admette un minimum local en a, point intérieur à I, il est suffisant que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (*Cas de* $x \mapsto x^4$). Adaptation pour le maximum local.

d) *Notion de développement asymptotique en un point de* $\overline{\mathbb{R}}$: **(i)** Exemple avec une fonction d'une variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ en 0, $x \mapsto e^{1/x}$ en $+\infty$. **(ii)** Exemple avec une suite : $\ln(n!)$ (en lien avec l'équivalent de Stirling).

2. Matrices et systèmes linéaires

a) *Opérations sur les matrices* : **(i)** Définitions : matrice, taille/format, coefficient, ligne, colonne, diagonale et représentation ; vecteur ligne/colonne. **(ii)** Addition, multiplication par un scalaire : matrice somme, produit par un scalaire, matrice nulle et propriétés opératoires ; symbole de Kronecker et matrices élémentaires (de la base canonique). **(iii)** Produit matriciel : matrice produit, matrice identité et propriétés opératoires ; multiplication par les matrices élémentaires de la base canonique ; égalité de deux matrices et vecteurs lignes et/ou colonnes ; lignes et colonnes d'une matrice produit ; (*la maîtrise d'aucun autre produit par blocs n'est exigible*). **(iv)** Transposition : propriétés opératoires. **(v)** Opérations (inversibles) élémentaires sur les lignes, sur les colonnes : matrice d'opération (inversible) élémentaire : échange, transvection, dilatation ; opération (inversible) élémentaire sur les lignes (resp. sur les colonnes) et multiplication par la gauche (resp. par la droite) par une certaine matrice d'opération (inversible) élémentaire

b) *Systèmes linéaires* : **(i)** Écriture matricielle d'un système linéaire : passage du système à l'égalité matricielle et inversement. **(ii)** Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible : « une solution particulière plus les solutions du système linéaire homogène associé ». **(iii)** Opérations élémentaires et méthode du pivot (*aucune compétence technique n'est exigible*) : échelonnement d'une matrice en lignes ou en colonnes et résolution d'un système linéaire ; matrice non carrée et relation entre les lignes ou les colonnes.

c) *Matrices carrées* : **(i)** Formes particulières : scalaire, diagonale, triangulaire, symétrique, antisymétrique ; partie symétrique et partie antisymétrique. **(ii)** Structure d'anneau non commutatif à diviseurs de zéro (ordre supérieur à 2) : matrice nilpotente ; différence de puissances d'un même ordre et puissance d'une somme pour deux matrices qui commutent l'une à l'autre ; sous-anneaux des matrices triangulaires supérieures/inférieures. **(iii)** Matrices carrées inversibles : groupe linéaire : matrices inversibles élémentaires ; inversion d'une matrice carrée d'ordre 2 ; propriétés opératoires de l'inversion ; inversion par résolution d'un système ; inversion par opérations (inversibles) élémentaires. **(iv)** Inversibilité d'une matrice triangulaire.

Exemples de questions de cours

1. Croissances comparées.

2. Unicité des coefficients d'un développement limité à l'ordre n en un point réel.

3. Développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

4. Associativité du produit matriciel.

5. Matrice transposée d'un produit.

6. Produit de deux matrices élémentaires de bases canoniques et multiplication par une matrice élémentaire.

7. Opération inversible) élémentaire et multiplication par la gauche, par la droite.

8. Matrices triangulaires supérieures et multiplication.

9. Caractérisation de l'inversibilité par résolution d'un système linéaire.

10. Préservation de l'inversibilité d'une matrice par opérations élémentaires.

11. Inversibilité d'une matrice triangulaire.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr