N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 15
Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$ et en déduire M^{-1}.

On effectue les calculs :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors, en développant le produit, $M^2 - M + 3M - 3I = 0$, i.e. $M^2 = 3I - 2M$.
On a $M^2 + 2M = 3I$, donc $\frac{1}{3}M(M + 2I_3) = I_3$, donc M est inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$. On montrera cette existence par récurrence et on précisera la relation entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n).

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « il existe u_n et v_n tel que $M^n = u_n M + v_n I_3$. » Démontrons cette propostion par récurrence.
Initialisation. $M^0 = I_3 = 0 \times M + 1 \times I_3$.
Hérédité. Supposons que u_n et v_n soient construites jusqu'à un certain rang n, avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $M^k = u_k M + v_k I_3$. Alors

$$M^{n+1} = M \times M^n = M \times (u_n M + v_n I_3) = u_n M^2 + v_n M = u_n(3I_3 - 2M) + v_n M = (v_n - 2u_n)M + 3u_n I_3.$$

Posons alors $u_{n+1} = v_n - 2u_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$.
On a donc construit par récurrence deux suites (u_n) et (v_n) telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$, et on a vérifié que

$$u_0 = 0, \ v_0 = 1, \ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

---

3. Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

On a, d'après les règles du produit matriciel,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On pose alors $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

---

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.

On peut utiliser la formule toute faite ! Mais on peut aussi remarquer que si on calcule P^2, on obtient $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$ donc P est inversible, d'inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

5. On note $B = P^{-1} \times A \times P$. Calculer B^n pour tout n et en déduire une expression de A^n, puis de u_n, v_n et enfin M^n.

On calcule

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$B = P^{-1}AP$, donc $PB = AP$, donc PBP^{-1}. Montrons ensuite par récurrence sur l'entier naturel n que $A^n = PB^nP^{-1}$. L'initialisation vient d'être faite. Ensuite, si $A^n = PB^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = (PB^nP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Héréditaire et vraie au rang n, la proposition est donc vraie pour tout n.

On montre par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
A^n &= PB^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & (-3)^n\\ 3 & -(3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+3(-3)^n & 1-(-3)^n\\ 3-3.(-3)^n & 3+(-3)^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, on montre par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} &= A^n \times \begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+3(-3)^n & 1-(-3)^n\\ 3-3.(-3)^n & 3+(-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-(-3)^n\\ 3+(-3)^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2-(-3)^n}{4}$ et $v_n = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Exercice 2. *Matrices symétriques et antisymétriques*. **1.** Soient A et B deux matrices symétriques. Montrer que A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.

Procédons par équivalences :

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ commutent } &\Leftrightarrow AB = BA\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = (BA)^T\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = A^TB^T\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = AB \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont symétriques}\\
&\Leftrightarrow AB \text{ est symétrique,}
\end{aligned}$$

d'où le résultat !

---

2. Établir un résultat équivalent pour les matrices antisymétriques.

On fait de même :

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ commutent } &\Leftrightarrow AB = BA\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = (BA)^T\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = A^TB^T\\
&\Leftrightarrow (AB)^T = (-A)\times(-B) = AB \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont antisymétriques}\\
&\Leftrightarrow AB \text{ est symétrique,}
\end{aligned}$$

donc A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.

Exercice 3. *Matrices nilpotentes*. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice carrée $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier p tel que $N^p = 0$.

1. Quelles sont les matrices nilpotentes triangulaires supérieures ? *On ne demande pas de justification particulière.*

Quelques petits calculs montrent facilement que les matrices triangulaires nilpotentes sont les matrices triangulaires n'ayant que des 0 sur la diagonale.

---

2. (a) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors AB est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas AB.

Soit p tel que $A^p = 0$ et q tel que $B^q = 0$. Soit $r = \max(p, q)$. Alors $A^r = 0_n$ et $B^r = 0_n$. Donc, comme A et B commutent,

$$(AB)^r = A^r B^r = 0_n \times 0_n = 0_n,$$

donc AB est nilpotente.

En revanche, si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas nilpotente car pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(AB)^n = AB$.

(b) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors $A+B$ est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas $A + B$.

Soit p tel que $A^p = 0$ et q tel que $B^q = 0$. Soit $r = \max(p, q)$. Alors, comme A et B commutent, et par la formule du binôme de Newton,

$$(A + B)^{2r} = \sum_{k=0}^{2r} \binom{2r}{k} A^k B^{2r-k}.$$

Or, si $0 \leqslant k \leqslant r - 1$, alors $2r - k \geqslant r$ donc $B^{2r-k} = 0$ donc $A^k B^{2r-k} = 0_n$. De même, si $k \geqslant r$, alors $A^k = 0_n$ donc $A^k B^{2r-k} = 0_n$. Donc tous les termes de la somme sont nuls donc $(A + B)^{2r} = 0$.

En revanche, si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout p dans $\mathbb{N}$, on montre (par récurrence par exemple) que

$$(A + B)^{2p} = \mathrm{I}_2,\ (A + B)^{2p+1} = A + B,$$

donc $A + B$ n'est pas nilpotente.

3. Soit N une matrice nilpotente. Démontrer que $\mathrm{I}_n - N$ est inversible et donner son inverse sous la forme d'un polynôme en N.

Idée : utiliser la somme des termes d'une suite géométrique : on sait que si N était un réel, alors on aurait $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} N^k = \frac{1-N^p}{1-N}$. Or, si $N^p = 0$, on a en quelque sorte l'inverse de $1-N$. Mais, comme on n'a pas le droit d'écrire de fractions de matrices, on ne va écrire que des produits.

Soit p tel que $N^p = 0$. Posons $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} N^p$ (avec la convention $N^0 = \mathrm{I}_n$). Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n - N)M &= \sum_{k=0}^{p-1} (\mathrm{I}_n - N)N^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} N^k - N^{k+1} \\ &= \mathrm{I}_n - N^p \text{ par télescopage} \\ &= \mathrm{I}_n \text{ car } N^p = 0_n,\end{aligned}$$

et, de même, $M(\mathrm{I}_n - N) = \mathrm{I}_n$, donc $\mathrm{I}_n - N$ est inversible, d'inverse M.

Exercice 4. *Matrices de permutation*. On définit, si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Représenter P_σ si σ est une transposition, un p-cycle. Démontrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.

Exercice 5. *Théorème d'Hadamard*.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.
(On dit que A est à diagonale strictement dominante.) Démontrer que A est inversible.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0_{n,1}$.

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors en écrivant la ligne i_0 de la relation $AX = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0$, donc $a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} a_{i_0,j} x_j$, donc

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \ neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|,$$

ce qui est impossible si $|x_{i_0}| \neq 0$. Donc $|x_{i_0}| = 0$, donc $X = 0$ donc A est inversible.
On a vu en cours une méthode théorique. On peut faire une méthode plus pratique.
Une remarque. Avoir juste $|a_{ii}| > |a_{ij}|$ pour tout j ne suffit pas. Par exemple, si M est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors cette matrice vérifie la propriété $|a_{ii}| > |a_{ij}|$ pour tout j mais n'est pas inversible (la ligne 3 est obtenue comme somme des deux premières).

Mais la méthode d'Arthur peut fonctionner ! Démontrons tout de même que si la matrice est à diagonale strictement dominante, alors la matrice obtenue après chaque étape du pivot de Gauss est aussi à diagonale strictement dominante.
On ne le démontre qu'à la première étape, le reste s'en déduit de la même manière. Notons B la matrice obtenue après avoir fait sur A les opérations $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$. Fixons i dans $[\![1, n]\!]$. Alors $b_{i,1} = 0$ et

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |b_{ij}| &= \sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \right| \text{ (la somme commence à 2 car } b_{i,1} = 0) \\
&\leqslant \sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|.|a_{1j}|}{|a_{11}|}. \\
&\leqslant \sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{1j}|.
\end{aligned}$$

Mais, par le caractère strictement dominant, on peut écrire que

$$\sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|,$$

et que

$$\sum_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}| - |a_{i1}|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |b_{ij}| &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}| - |a_{1i}|) \\
&\leqslant |a_{ii}| - |a_{i1}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}|.|a_{1i}|}{|a_{11}|} \\
&\leqslant |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|.|a_{1i}|}{|a_{11}|} \\
&\leqslant \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}} \right| \text{ par inégalité triangulaire renversée.} \\
&\leqslant |b_{ii}|
\end{aligned}$$

Donc la matrice B est aussi à diagonale strictement dominante. Finalement, le caractère strictement dominant est préservé, ce qui permet d'assurer que la matrice est équivalente en lignes à I_n, donc est inversible !

---

2 Exercices à faire en TD

Stratégie à adopter. Il y a trois types d'exercices dans cette feuille de TD :

- les calculatoires purs : les exercices 6 et 7 sont des prolongements de 1, l'exercice 8 est aussi un simple calcul ; les exercices 14, 15 et 15 sont des calculs bruts sur des systèmes linéaires (utilisation du pivot) ; les exercices 17 et 18 sont des calculs bruts sur des matrices (utilisation du pivot aussi)
- les théoriques purs : ces exercices n'ont absolument pas besoin de faire des calculs explicites de produits matriciels (un peu comme les exercices 2 ou 3). Il s'agit des exercices 10 et de la seconde partie de 13.
- les théorico-calculatoires : exercices très importants, ils vous forcent à calculer des produits matriciels théoriques. Ce sont les exercices 11, 12, le début de 13, et les exercices plus difficiles 19 et 20.

Minimum conseillé. L'exercice 6, l'exercice 10, **si vous avez du mal à calculer, l'exercice 14 et 17**, l'exercice 12 (plus dur !) et l'exercice 13.

2.1 Matrices

Exercice 6. *Puissances de matrices.* ●●○

1. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la puissance n-ième des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On calcule les premières puissances : $A^0 = \mathrm{I}_2$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. On peut conjecturer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence :

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, $A^0 = \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix}$.
- **Hérédité.** Supposons que pour un certain n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 + 2^n \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

D'où l'hérédité et le résultat.

(b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

De même que précédemment, on démontre que pour tout n, $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

(c) Si $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

De même, on démontre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

(d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De même, on démontre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

(e) $M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

On calcule $M_p^2 = \begin{pmatrix} p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

puis $M_p^3 = \begin{pmatrix} 0 & p-1 & \cdots & p-1 \\ p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (p-1)M_p$. On en déduit, par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

- si $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $M_p^n = (p-1)^{k-1}M_p^2$.
- si $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $M_p^n = (p-1)^k M_p$.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

---

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ (avec a et b des réels et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(\theta)u_n - \sin(\theta)v_n \\ v_{n+1} = \sin(\theta)u_n + \cos(\theta)v_n \end{cases}$$

En posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La relation de récurrence ci-dessus nous indique que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = R_\theta U_n$, donc, par récurrence immédiate,

$$U_n = \mathbb{R}_\theta^n U_0 = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta)a - \sin(n\theta)b \\ \sin(n\theta)a + \cos(n\theta)b \end{pmatrix},$$

donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)a - \sin(n\theta)b$ et $v_n = \sin(n\theta)a + \cos(n\theta)b$.

Exercice 7. ●◐○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $-A^3 + A^2 + 5A - \mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

En faisant le calcul, on remarque que $-A^3 + A^2 + 5A - \mathrm{I}_3 = 0_3$. Donc $-A^3 + A^2 + 5A = \mathrm{I}_3$, donc $A(-A^2 + A + 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$, donc A est inversible d'inverse $-A^2 + A + 5\mathrm{I}_3$.

Exercice 8. *Inversibilité des matrices d'ordre* 2. ●●○ Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Calculer $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)\mathrm{I}_2$. À quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

On calcule et on remarque que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)\mathrm{I}_2 = 0$. Disjoignons alors les cas :

- si $ad - bc \neq 0$, alors $-\dfrac{1}{ad-bc}\left(A^2 - (a+d)A\right) = \mathrm{I}_2$, i.e.

$$A \times \frac{1}{ad-bc}\left((a+d)\mathrm{I}_2 - A\right) = \mathrm{I}_2,$$

donc A est inversible d'inverse

$$\frac{1}{ad-bc}\left((a+d)\mathrm{I}_2 - A\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

- si $ad-bc=0$, alors $A(A-(a+d)\mathrm{I}_2)=0$. Si A était inversible, alors en multipliant par A^{-1}, on aurait $A-(a+d)\mathrm{I}_2=0$, i.e. $A=(a+d)\mathrm{I}_2$ donc $a=a+d$ et $d=a+d$ donc $a=d=0$, i.e. $A=0$, absurde ! Donc A n'est pas inversible.

Finalement, A est inversible ssi $ad-bc\neq 0$ et, dans ce cas, $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$.

Exercice 9. ●●○ Soient $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)$, $(c_1,\dots,c_n)$, $(d_1,\dots,d_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & & & \\ & & a_2 & b_2 & & (0) & & \\ & & c_2 & d_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_n & b_n \\ & & & & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible. Déterminer, le cas échéant, l'inverse de A.

L'idée est de faire la même chose que pour la question de cours ! On considère la matrice

$$B=\begin{pmatrix} d_1 & -b_1 & & & & & & \\ -c_1 & a_1 & & & & & & \\ & & d_2 & -b_2 & & (0) & & \\ & & -c_2 & a_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & & d_n & -b_n \\ & & & & & & -c_n & a_n \end{pmatrix}$$

On calcule alors $A\times B$ en faisant... des produits par blocs ! On obtient alors

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_1d_1-b_1c_1 & 0 & & & & & & \\ 0 & a_1d_1-b_1c_1 & & & & & & \\ & & a_2d_2-b_2c_2 & 0 & & (0) & & \\ & & 0 & a_2d_2-b_2c_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_nd_n-b_nc_n & 0 \\ & & & & & & 0 & a_nd_n-b_nc_n \end{pmatrix} = \Bigg((a_1d_1-b_1$$

Exercice 10. *Relation de similitude.* ●○○

1. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $A \sim B$ ssi « il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible vérifiant $A = PBP^{-1}$ » est une relation d'équivalence.

Démontrons que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive :

(i) **Réflexivité.** Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $P = \mathrm{I}_n$. Alors $P^{-1} = P$ et $A = PAP^{-1}$ donc $A \sim A$, donc $\sim$ est réflexive.

(ii) **Symétrie.** Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \sim B$. Alors on dispose de $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors $B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$ avec $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ donc $B \sim A$. Donc $\sim$ est symétrique.

(iii) **Transitivité.** Soient A, B et C trois matrices telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on dispose de P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$. Alors $A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$, donc $A \sim C$. D'où la transitivité.

Donc la relation de conjugaison est une relation d'équivalence.

On appelle cette relation relation de *similitude* et on dit que deux matrices A et B qui satisfont cette relation sont semblables. Soient alors A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblables.

2. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est inversible, alors l'autre aussi.

Supposons que B soit inversible. Alors A est le produit de 3 matrices inversibles, donc A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$. De même, $B = P^{-1}AP$ donc si A est inversible, B est inversible et $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

---

3. Montrer que si $B = \lambda\mathrm{I}_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors $A = B$. Quelle est la classe d'équivalence d'une matrice scalaire ?

Si $B = \lambda\mathrm{I}_n$, alors $A = PBP^{-1} = P\lambda\mathrm{I}_nP^{-1} = \lambda P\mathrm{I}_nP^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda\mathrm{I}_n$, donc $A = B$.
On vient de démontrer que si B est une matrice scalaire (i.e. $B = \lambda\mathrm{I}_n$), alors la classe d'équivalence de B est réduite à un singleton.

---

4. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente (il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$ ou $B^p = 0_n$), alors l'autre aussi.

Soit p tel que $B^p = 0$. Alors $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$ et, par récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$ donc, en particulier, $A^p = PB^pP^{-1} = P \times 0_n \times P^{-1} = 0_n$. Donc A est niplotente. La réciproque est évidente par symétrie.

Exercice 11. *Matrices élémentaires.* ●○○ Soit n un entier non nul. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice avec tous les coefficients nuls, sauf le coefficient (i, j) égal à 1.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Écrivons $E_{i,j} = (a_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$ et $E_{k,\ell} = (b_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$. Alors $a_{r,s} = \delta_{i,r}\delta_{j,s}$ et $b_{r,s} = \delta_{k,r}\delta_{\ell,s}$. Posons finalement $E_{i,j}E_{k,l} = (c_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$. Alors, pour tous r et s dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}b_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}\delta_{k,t}\delta_{\ell,s}.$$

Maintenant, une chose qui peut être faite pour simplifier un peu cette somme est de sortir les symboles de Kronecker qui ne dépendent pas de l'indice de sommation ! On écrit alors

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}b_{t,s} = \delta_{i,r}\delta_{\ell,s} \sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}.$$

Il faut donc déterminer ce que vaut $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}$:

- si $j \neq k$, alors on n'aura jamais de t tel que $j = t$ et $k = t$, donc la somme est nulle.
- si $j = k$, alors $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{j,t}$, et $\delta_{j,t}$ est nul sauf pour $t = j$, donc la somme est réduite à un seul élément, et est finalement égale à 1.

Finalement, $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}$ est nulle si $j \neq k$, égale à 1 si $j = k$, donc $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t} = \delta_{j,k}$.
Finalement,

$$c_{r,s} = \underbrace{\delta_{j,k}}_{\text{ne dépend pas de } (r,s)} \underbrace{\delta_{i,r}\delta_{\ell,s}}_{\text{coefficient matriciel}},$$

donc $(c_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n} = (\delta_{j,k}\delta_{i,r}\delta_{\ell,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n} = \delta_{j,k}(\delta_{i,r}\delta_{\ell,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$, et on reconnaît les coefficients de $E_{i\ell}$. Donc, finalement,

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$$

---

2. Si $A = (a_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$, calculer $E_{i,j} \times A$ et $A \times E_{i,j}$.

La seconde question peut aussi tout à fait se faire formellement.
Posons $A = (a_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$ et $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$ (pour une fois j'utilise un intermédiaire de moins, en donnant directement l'expression de $E_{i,j}$). Alors si on écrit $E_{i,j} \times A = (b_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$, on a, pour tous r et s dans $[\![0, n]\!]$,

$$b_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} e_{r,t}a_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}a_{t,s} = \delta_{i,r} \sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}a_{t,s},$$

la somme n'ayant que des termes nuls sauf pour $t = j$, don

$$b_{r,s} = \delta_{i,r}a_{j,s}.$$

Autrement dit B est une matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf la ligne i qui reçoit les coefficients de la ligne j de A.
De même si l'on écrit $A \times E_{i,j} = C = (c_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$, on obtient

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t} e_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t} \delta_{i,t} \delta_{j,s} = \delta_{j,s} \sum_{t=1}^{n} a_{r,t} \delta_{i,t},$$

donc, de même, $c_{r,s} = \delta_{j,s} a_{r,i}$. Autrement dit la matrice n'a que des coefficients nuls, sauf la j-ième colonne qui reçoit les coefficients de la colonne i de A.

Exercice 12. *Questions de commutation.* ●●○

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

Analyse. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice commutant avec D. Alors on remarque que

$$A \times D = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \ldots & \ldots & \lambda_n a_{1,n} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \ldots & \ldots & \lambda_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} & \lambda_2 a_{n,2} & \ldots & \ldots & \lambda_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$
$$\text{et } D \times A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \ldots & \ldots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \ldots & \ldots & \lambda_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_n a_{n,1} & \lambda_n a_{n,2} & \ldots & \ldots & \lambda_n a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Donc si $AD = DA$, on a, pour $i \neq j$, $\lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, ce qui n'est possible que si $a_{i,j} = 0$. Donc A est diagonale !
Synthèse. On remarque facilement, avec les calculs ci-dessus, que si A est diagonale, alors A commute avec D.

---

2. Déterminer l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA.$$

Analyse. Si A est une matrice commutant avec toutes les autres, en particulier elle commute avec une matrice du type de D, donc elle est diagonale. Soient alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coefficients diagonaux de A.
Enfin, si $P_{i,j}$ est la matrice de permutation telle que $P_{i,j}A$ soit la matrice A avec les lignes i et j échangées, on sait que $AP_{i,j}$ est la matrice A avec les colonnes i et j échangées. Mais alors le coefficient (i,j) de $P_{i,j}A$ est α_j alors que le coefficient (i,j) de $AP_{i,j}$ est α_i. Donc $\alpha_i = \alpha_j$ pour tous i et j. Donc finalement tous les coefficients de A sont égaux, donc A est diagonale avec le même coefficient sur la diagonale : on dit que A est scalaire.

Exercice 13. *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la trace.* ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A^T A) \geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si $A = 0$.

Écrivons $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $B = A^T = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tout i et j,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Donc

$$\text{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0,$$

et cette somme est nulle si, et seulement si tous les termes de la somme sont nuls (comme ils sont positifs), i.e. ssi pour tout i et pour tout k, $a_{ik} = 0$, i.e. ssi A est la matrice nulle.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \text{Tr}((A + xB) \times (A + xB)^T)$.

(a) Développer f et montrer qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 en x.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{Tr}((A + xB) \times (A + xB)^T) \\
&= \text{Tr}((A + xB)(A^T + xB^T)) \\
&= \text{Tr}(AA^T xAB^T + xBA^T + x^2BB^T) \\
&= \text{Tr}(AA^T) + x\text{Tr}(AB^T) + x\text{Tr}(BA^T) + x^2\text{Tr}(BB^T) \\
&= \text{Tr}(A^T A) + x\text{Tr}(AB^T) + x\text{Tr}((BA^T)^T) + x^2\text{Tr}(B^T B) \text{ car } \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) \text{ et } \text{Tr}(M^T) = \text{Tr}(M) \\
&= \text{Tr}(A^T A) + 2x\text{Tr}(AB^T) + x^2\text{Tr}(B^T B),
\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme en x.

(b) En étudiant son signe et son discriminant, montrer que $\text{Tr}(AB^T)^2 \leqslant \text{Tr}(A^T A)\text{Tr}(B^T B)$.

On sait par la question précédente que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\text{Tr}((A+xB)\times(A+xB)^T) \geqslant 0$. Donc le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Donc

$$4\text{Tr}(AB^T)^2 - 4\text{Tr}(A^T A)\text{Tr}(B^T B) \leqslant 0,$$

d'où l'inégalité souhaitée !

2.2 Matrices et systèmes linéaires – méthode du pivot

On présentera les solutions des systèmes linéaires en utilisant la notation Vect.

Exercice 14. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 13 \\ 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$.

Je ne donne que les réponses : pour le premier système, il s'agit de l'ensemble $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour le second système, il n'y a qu'une solution, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. ●◐○ Déterminer pour quels valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases}$$

1. admet une solution unique ;

2. admet une infinité de solutions ;

3. n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = 2$.

Échelonnons le système

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2y + az = b \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a \\ 2y + az = b \\ 2ay + 9z = 2a & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a \\ 2y + az = b \\ (9 - a^2)z = (2 - b)a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_2 \end{cases}$$

Donc, si $a \neq \pm 3$, il y a une unique de solutions. Si $a = \pm 3$, il y a une infinité de solutions si $b = 2$, aucune sinon.
Dans le cas $a = b = 2$, le système se réécrit

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2y + 2z = 2 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

Donc $z = 0$, $y = 1$ et $x = 0$. La solution est le singleton constitué du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées complexes $x, y, z \in \mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} x + iy = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 + i \\ ix - y + (1+i)z = 2 \end{cases}$, **2.** $\begin{cases} x + iy - 3z = 1 \\ ix - y - iz = -1 \\ -x - iy - (3+4i)z = -3 - 2i \end{cases}$.

Pour le premier système, l'unique solution est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$. Pour le second système, il s'agit de la droite $\begin{pmatrix} \frac{3i-1}{2} \\ 0 \\ \frac{i-1}{2} \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. ●◐○ Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ne donnons que les inverses. En cas de problème, me demander !

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. ●●○ Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Écrivons

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 1-m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & 1-m & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & 1-m & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1-m^2} & 2-m & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Deux situations arrivent alors : comme on a une matrice triangulaire supérieure, on connaît sa CNS d'inversibilité :

- si $1 - m^2 = 0$, i.e. $m = \pm 1$, alors la matrice n'est pas inversible.
- si $1 - m^2 \neq 0$, la matrice est inversible. On détermine alors son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & m & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1-m^2} & 2-m & -1 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & m & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2-m}{1-m^2} & -\dfrac{1}{1-m^2} & \dfrac{1}{1-m^2}\end{array}\right)$$

$$\left(L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m^2}L_3\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \dfrac{m^2-2m}{1-m^2} & \dfrac{1+m-m^2}{1-m^2} & \dfrac{-m}{1-m^2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \dfrac{2-m}{1-m^2} & -\dfrac{1}{1-m^2} & \dfrac{1}{1-m^2}\end{array}\right)$$

$$(L_1 \leftarrow L_1 - mL_3)$$

La matrice est donc inversible d'inverse

$$\frac{1}{1-m^2}\begin{pmatrix}m^2-2m & 1+m-m^2 & -m\\ 1-m^2 & 1-m^2 & 0\\ 2-m & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Pour la seconde matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & m & 0 & 0 & 1\\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0\\ m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & m & 0 & 0 & 1\\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 & 0 & -m\end{array}\right) \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & m & 0 & 0 & 1\\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1\end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Remarque : ici, on voit bien l'intérêt de ne pas avoir divisé directement par le pivot. En effet, on a directemet une matrice triangulaire, et on a directement la disjonction de cas suivante, faite en remarquand que $2-m-m^2 = -(m-1)(m+2)$.

- si $m = 1$, alors $1-m = 0$ et $2-m-m^2 = 0$ donc la matrice n'est pas inversible.
- si $m = 2$, alors $1-m \neq 0$ et $2-m-m^2 = 0$, donc la matrice n'est pas inversible.
- sinon, la matrice est inversible : on part de

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m+1 & 0 & -\frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m+1 & 0 & -\frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} \end{array}\right)$$

$$\left(L_3 \leftarrow -\frac{1}{(m-1)(m+2)} L_3\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} - \frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} - \frac{(m+1)^2}{(m-1)(m+2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} & \frac{-1}{(m-1)(m+2)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{m+1}{(m-1)(m+2)} \end{array}\right)$$

$$\left(L_1 \leftarrow L_1 - (m+1)L_3 \ ; \ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\right)$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est

$$\frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. *Inverse de la matrice des coefficients binomiaux*. ●●◐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A la matrice définie par $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tous i et j dans $\mathbb{N}$, $a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$ (coefficient binomial).

1. Représenter A dans le cas $n = 3$.

Dans le cas où $n = 3$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de AU.

On calcule le produit matriciel, en écrivant que $AU = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, où pour tout i, $v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k =$

$\sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} x^k = (x+1)^{i-1}$, donc $AU = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ \vdots \\ (x+1)^{n-1} \end{pmatrix}$.

---

3. Soit V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ \vdots \\ (x+1)^{n-1} \end{pmatrix}$. En posant $y = x+1$, exprimer les coordonnées de V, puis de U, en fonction de y. En déduire une matrice B telle que $U = BV$.

On écrit que

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ (y-1) \\ (y-1)^2 \\ \vdots \\ (y-1)^n \end{pmatrix},$$

donc, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} u_i = (y-1)^{i-1} &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^{i-1-k} y^k = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{i-k} y^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{i-k} y^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} v_k, \end{aligned}$$

où pour tous i et j, $b_{ij} = (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$. Donc si l'on pose $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $U = BV$.

---

4. En déduire un inverse possible de A et vérifier que cet inverse potentiel est un inverse effectif.

On peut alors vouloir dire que B est l'inverse de A. Cependant, le fait que $V = AU$ et $U = BV$, i.e. $BAU = U$, ne suffit pas à affirmer que A est inversible, car U est un simple vecteur. Il faut donc effectuer concrètement le produit matriciel AB (ou BA). Posons $AB = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} &= \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!}\frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\ &= \frac{(i-1)!}{(i-k)!}\frac{1}{(j-1)!(k-j)!} \times \frac{(i-j)!}{(i-j)!} \\ &= \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!}\frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!} \\ &= \binom{i-1}{j-1}\binom{i-j}{k-j}\end{aligned}$$

Exercice 20. *Relation d'équivalence.* ●●● Soient n et p deux entiers naturels non nuls, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes **et** sur les colonnes.

1. Démontrer que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si, et seulement s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

On dira désormais, si A et B sont équivalentes en lignes-colonnes, que A et B sont équivalentes.

2. Démontrer que A est équivalente à une matrice de la forme $J_{n,p,r}$ où $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$,

   avec r « 1 » dans la diagonale.

3. Démontrer que si $n = p$ et A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.