DM12
Pour le lundi 03/03

Autour des suites récurrentes associées à des fonctions et des comparaisons asymptotiques.

Problème 1. Suite récurrente associée à une fonction

1. Démontrer la

Proposition 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*
Si $f(I) \subset I$, on peut définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

2. Démontrer la

Proposition 2 (Seule proposition au programme)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *vérifiant $f(I) \subset I$.*
On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ *Alors* si $(u_n)_n$ *converge* **vers** $\boldsymbol{\ell \in I}$, alors $f(\ell) = \ell$.

3. Démontrer que si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Illustrer sur un dessin.

4. Démontrer que si f est décroissante sur I, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées. Illustrer sur un dessin.

On donne alors le point de méthode suivant.

Méthode 1. *Plan d'étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une application continue.*

- *Etudier f : étudier ses variations; déterminer ses points fixes et le signe de $x \mapsto f(x) - x$. Récapituler ces résultats* **dans un tableau unique** *.*
- *Déterminer à l'aide du tableau précédent un intervalle stable par f contenant u_0.*
- *Placer u_n par rapport aux points fixes.*
- *Sens de variations de $(u_n)_n$: $\forall n \quad u_{n+1} - u_n = (f - Id)(u_n)$ de signe déjà étudié. Remarque : si f est croissante, en général $(u_n)_n$ est monotone.*
- *Conclure : les calculs précédents montrent que la suite converge (croissante et majorée, décroissante et minorée). auquel cas la limite est un point fixe de f, ou au contraire tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (croissante non majorée ou décroissante non minorée).*

5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.

6. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$.

7. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$. On montrera que pour une telle suite $u_1 > 1$ et on étudiera séparément les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Cas particulier d'une fonction dérivable.

8. Démontrer que si f possède un point fixe sur I (intervalle stable par f), ℓ, si f est dérivable sur I, si $|f'|$ est bornée par $k \in]0,1[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers ℓ.

Considérations plus théoriques. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet un point fixe attractif x_0, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| < 1$$

9. (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un réel $k \in]0,1[$ tel que la restriction de f à $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit k-lipschitzienne.

(b) En déduire que suite $\begin{cases} u_0 \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers x_0.

On suppose désormais que f admet un point fixe répulsif x_0, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| > 1$$

10. Démontrer que si la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers x_0, alors elle est stationnaire.

Problème 2. Équivalent de Stirling

Partie I. Formule de Moivre

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Convergence de la série des (v_n)*.* On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

Partie II. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$