DM12
Pour le lundi 03/03

(avec corrigé)

Problème 1. Suite récurrente associée à une fonction

1. Démontrer la

Proposition 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*
Si $f(I) \subset I$, on peut définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$: « u_n est définie et appartient à I » .
L'initialisation est évidente, et, pour l'hérédité, si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $u_n \in \mathrm{I}$, donc $f(u_n)$ est définie, et appartient à I car $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.
D'où l'hérédité et le résultat !

---

2. Démontrer la

Proposition 2 (Seule proposition au programme)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *vérifiant $f(I) \subset I$.*
On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ *Alors* si $(u_n)_n$ *converge* **vers** $\ell \in \boldsymbol{I}$, alors $f(\ell) = \ell$.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathrm{I}$. Alors, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et, par continuité de f, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
Donc, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

---

3. Démontrer que si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Illustrer sur un dessin.

Fait dans le poly de cours !

---

4. Démontrer que si f est décroissante sur I, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées. Illustrer sur un dessin.

Fait dans le poly de cours !

On donne alors le point de méthode suivant.

Méthode 1. *Plan d'étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une application continue.*

- *Etudier f : étudier ses variations ; déterminer ses points fixes et le signe de $x \mapsto f(x) - x$. Récapituler ces résultats* **dans un tableau unique** *.*
- *Déterminer à l'aide du tableau précédent un intervalle stable par f contenant u_0.*
- *Placer u_n par rapport aux points fixes.*
- *Sens de variations de $(u_n)_n$: $\forall n \quad u_{n+1} - u_n = (f - Id)(u_n)$ de signe déjà étudié. Remarque : si f est croissante, en général $(u_n)_n$ est monotone.*
- *Conclure : les calculs précédents montrent que la suite converge (croissante et majorée, décroissante et minorée). auquel cas la limite est un point fixe de f, ou au contraire tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (croissante non majorée ou décroissante non minorée).*

5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1+x^2}{2}$. Alors f est décroissante, puis croissante ; d'où le tableau de variations. De plus, $f(x) - x = \dfrac{1+x^2-2x}{2} = \dfrac{(1-x)^2}{2} \geqslant 0$ pour tout x.
Ainsi, $[0, 1]$ est stable par f. D'où la disjonction nécessaire :

- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1,
- si $u_0 > 1$, comme $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ pour tout n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Sa seule limite finie possible étant 1, l'unique point fixe de f qui est continue, et ayant $u_n \geqslant u_0 > 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$, alors par récurrence immédiate, $u_n \in [0, 1]$ pour tout n. De plus, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, donc converge vers 1, l'unique point fixe de f, cette fonction étant continue.
- si $u_0 \in [-1, 0]$, alors $u_1 \in [0, 1]$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- si $u_0 < -1$, $u_1 > 1$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

---

6. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{3-2x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ et pour tout $x \neq \dfrac{3}{2}$,

$$f' : x \mapsto \frac{3}{(3-2x)^2},$$

donc f est croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
De plus, $f(x) - x = \dfrac{x}{3-2x} - x = \dfrac{x}{3-2x} - \dfrac{3x-2x^2}{3-2x} = -\dfrac{2x(1-x)}{3-2x}$. $x(1-x)$ est positif si

et seulement si $x \in [0,1]$; $3-2x$ est positif si et seulement si $x \leqslant \dfrac{3}{2}$. De plus, cette fonction s'annule uniquement en 0 et en 1 qui sont donc les seules points fixes de f. D'où le tableau de variations.En particulier, $[0,1]$ est stable par f et donc, par récurrence immédiate, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

Étant donné le signe de $x \mapsto f(x)-x$ sur $[0,1]$, on en déduit que si $u_0 \in]0,1[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît. Minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ, point fixe de f satisfaisant $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 < 1$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

7. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$. On montrera que pour une telle suite $u_1 > 1$ et on étudiera séparément les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (qui est clairement un intervalle stable) : tableau de variations.Ainsi, $[0,2]$ est même stable par f ! Et 1 est point fixe de f.
De plus, pour tout x, $f(x)-x = \dfrac{2}{1+x} - \dfrac{x+x^2}{1+x} = \dfrac{2-x-x^2}{1+x} = \dfrac{-(x-1)(x+2)}{1+x}$, strictement positif sur $]0,1[$, strictement négatif sur $]1,+\infty[$.
D'après la proposition de la question 3, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de monotonies contraires.
On sait que, $u_{2(n+1)} = f\circ f(u_n)$ et $u_{2(n+1)+1} = f\circ f(u_{2n+1})$.
De plus, par le tableau de variations de f, on remarque que $[0,1]$ est stable par $f\circ f$, et $[1,2]$ aussi. Ainsi, pour tout n, $u_{2n} \in [0,1]$ et $u_{2n+1} \in [1,2]$.
Étudions plus précisément $f\circ f$:

$$f\circ f : x \mapsto \frac{2}{1+\frac{2}{1+x}} = \frac{2(1+x)}{1+x+2} = \frac{2+2x}{3+x},$$

et

$$f\circ f - \mathrm{Id} : x \mapsto \frac{2+2x}{3+x} - x = \frac{2+2x-x(3+x)}{3+x} = \frac{-x^2-x+2}{3+x} = \frac{-(x-1)(x+2)}{3+x}.$$

Donc, comme $u_0 \in]0,1[$, $u_2 = f\circ f(u_0) > u_0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, donc converge vers 1, seul point fixe strictement positif de $f\circ f$. De même pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante minorée, qui converge donc vers 1.
Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Cas particulier d'une fonction dérivable.

8. Démontrer que si f possède un point fixe sur I (intervalle stable par f), ℓ, si f est dérivable sur I, si $|f'|$ est bornée par $k \in]0,1[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers ℓ.

Fait dans le poly !

Considérations plus théoriques. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet un point fixe attractif x_0, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| < 1$$

9. (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un réel $k \in]0,1[$ tel que la restriction de f à $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit k-lipschitzienne.

On sait que $|f'(x_0)| < 1$. Posons $k = \dfrac{|f'(x_0)| + 1}{2}$. Alors $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |f'(x_0)| < k$, donc il existe un voisinage V (on peut même supposer qu'il s'agit d'un intervalle) de x_0 tel que $\forall x \in V$, $|f'(x)| < k$. Donc f est contractante sur l'intervalle V. Donc, par le cours, la suite (u_n) converge vers x_0 pour tout x de V.

(b) En déduire que suite $\begin{cases} u_0 \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers x_0.

Démontrons alors que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ est stable par f. Soit x dans $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Alors

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| < \alpha,$$

donc $f(x) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Ensuite f est k-contractante sur un intervalle qu'elle stabilise donc, d'après la question 8, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$.

On suppose désormais que f admet un point fixe répulsif x_0, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| > 1$$

10. Démontrer que si la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers x_0, alors elle est stationnaire.

Soit $C \in]f'(x_0), 1[$. Soit V un voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V$, $|f'(x)| \geqslant C > 1$. Comme on a supposé (u_n) convergeant vers x_0, on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \in V$. Posons alors $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors $v_{N+1} = f(u_{N+1}) - f(u_N)$. Par le théorème des accroissements finis, on dispose de c_N entre u_N et u_{N+1} tel que $v_{N+1} = f'(c_N)v_N$. Donc

$$|v_{N+1}| = |f'(c_N)||v_N| \geqslant C|v_N|.$$

Donc pour tout $p \geqslant N$, $|v_p| \geqslant C^{p-N}|v_N|$, suite qui tend vers $+\infty$ sauf si $v_N = 0$. Donc, comme $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, $v_N = 0$, donc, par récurrence évidente, $v_n = 0 \forall n \geqslant N$. Donc u_n est stationnaire.

Problème 2. Équivalent de Stirling

Partie I. Formule de Moivre

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

Par le calcul, on trouve $v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

---

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Or, $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Par l'expression précédente, on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, telle que

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

On sait que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait

$$-\frac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12}.$$

Soit alors $n \geqslant N$. On a $-\frac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12}$, donc $-\frac{1}{12n^2} \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^2} \leqslant \frac{1}{12n^2}$, donc

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \text{ d'où le résultat.}$$

Convergence de la série des (v_n). On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Soit $n \geqslant N$. Alors $S_{n+1} - S_n = v_{n+1} \geqslant 0$, car $n+1 \geqslant N$. Donc (S_n) est croissante à partir du rang N.

---

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

Soit k un entier naturel non nul. Remarquons que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.
On sait que $k \leqslant k+1$, donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$, donc

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

D'où le résultat.
Maintenant, bornons S_n. Soit $n \geqslant N$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} v_k \right| \leqslant |S_N| + \left| \sum_{k=N+1}^{n} v_k \right|.$$

Or, pour $k \geqslant N+1$, $0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} v_k \right| = \sum_{k=N+1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Par l'inégalité $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, réécrite en $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on a

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{n} \leqslant 2,$$

par télescopage. Donc pour tout $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + 2$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |S_N| + 2$. Donc (S_n) est bornée.

---

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

(S_n) est croissante et majorée, donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite réelle ℓ. Or, par télescopage, pour tout n non nul, $S_n = \ln\left(\dfrac{u_1}{u_{n+1}}\right)$. Donc $\dfrac{u_1}{u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$, i.e. $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_1\mathrm{e}^{-\ell}$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_1\mathrm{e}^{-\ell}$, qui est une limite non nulle car $u_1 \neq 0$.

Partie II. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

IPP et récurrence corrigées dans un DM précédent.

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

On sait que pour tout entier naturel n, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. W_n est strictement positive par les formules trouvées question précédente. Donc

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

---

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

Pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc pour tout n dans n, $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. En intégrant les inégalités entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Autrement dit la suite (W_n) est décroissante. Donc pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Par stricte positivité de W_n, $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Or, $\frac{W_{n+2}}{W_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{+infty}{\longrightarrow} 1$.

---

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

Pour tout entier naturel n, posons $a_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = a_n,$$

par la relation de récurrence trouvée en question h. Donc (a_n) est constante, égale à $a_0 = \frac{\pi}{2}$.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. Or, $a_n = (n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$ car $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$ donc $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{2^{2p}\left(C\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2p}2^{2p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{C2^{2p}p\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p}}\frac{1}{C}.$$

Mais $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2p}}$, donc $\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}\dfrac{1}{C} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$, donc $C \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, i.e., comme C est une constante, $C = \sqrt{2\pi}$.