N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

ADS : actions de groupe et dénombrement

Consignes générales

- temps minimal de préparation : 2h.
- vous devez lire l'article, le comprendre dans les grandes lignes, afin de **restituer** les idées importantes de l'article. Certains résultats peuvent être prouvés, ou, du moins, les idées des preuves doivent être données.
- votre présentation doit être faite **sur papier blanc, orientation paysage** (avec de feutres, en format paysage), ou bien en pdf (avec PowerPoint – ou version libre de PowerPoint, KeyNote ou Beamer).
- faire moins de 10 pages/slides, avec peu de texte dessus.
- l'oral durera 15 minutes : il s'agira de présenter ce que vous avez compris de l'article.

Consignes particulières

- le problème est assez simple à comprendre, je pense.
- en revanche, la solution fait appel à la notion d'action de groupe : il pourra être intéressant de se demander ce que cette notion signifie et de chercher un peu en-dehors de l'article !
- il faut **absolument** faire des desssins, pour que l'on voie les orbites, les fixateurs, etc. !
- dans beaucoup de problèmes de dénombrement, une solution informatique gloutonne est possible : cela peut être intéressant de la présenter !

Les colliers de G.Polyà

Nous allons ici exposer un résultat de dénombrement, qui donne une méthode efficace et systématique pour compter le nombre de coloriages possibles pour un ensemble sous l'action d'un groupe. Il fut à l'origine utilisé en chimie pour compter les isomères possibles d'une molécule. La démonstration met en oeuvre quelques outils élémentaires de théorie des groupes, nous supposerons par la suite que la notion d'action de groupe est connue du lecteur. On peut par exemple trouver les définitions élémentaires de théorie des groupes ainsi qu'un cours assez complet dans le premier chapitre de [**?**].Voir aussi à ce propos les texte de rappels, disponible sur ce site.

1 Quelques problèmes de dénombrement

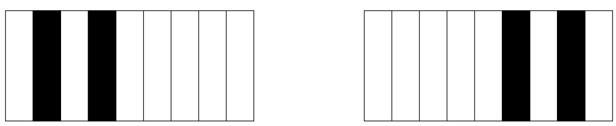
Commençons par énoncer trois problèmes de dénombrement :

Problème 1 .

(i) *Combien y a-t'il de drapeaux (fixes) distincts à neuf bandes dont deux noires et sept blanches ?*

(ii) *Combien y a-t'il de drapeaux (mobiles) distincts à neuf bandes dont deux noires et sept blanches ?*

Autant le premier problème est extrêmement simple, la réponse étant bien sûr $\mathrm{C}_9^2 = 36$ drapeaux possibles, autant le deuxième est un tout petit peu plus compliqué. Il faut faire attention de ne pas compter deux fois le même drapeau dans deux positions différentes. Par exemple, les deux drapeaux suivants sont identiques, puisqu'obtenus par symétrie axiale l'un par rapport à l'autre.



Cela dit, la solution reste assez simple : parmi les coloriages du drapeau fixe, 4 sont symétriques par rapport à l'axe du drapeau, et les 32 autres n'en constituent plus que 16 si l'on autorise ladite réflexion. Soit au total 20 drapeaux distincts.

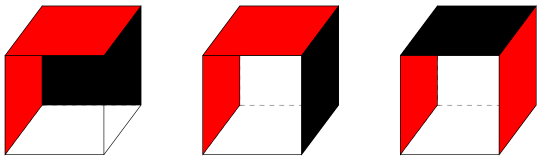
Problème 2 .

(i) *De combien de façons peut-on colorier les faces d'un cube (fixes) pour avoir deux faces rouges, une face noire et trois faces blanches ?*

(ii) *De combien de façons peut-on colorier les faces d'un cube (mobile) pour avoir deux faces rouges, une face noire et trois faces blanches ?*

Là encore, la réponse à la première question est immédiate : le nombre recherché est $\mathrm{C}_6^2 * \mathrm{C}_4^1 = 60$.

Pour ce qui est de la deuxième, c'est un peut plus compliqué là aussi : on se rend compte après quelques efforts que toutes les solutions trouvées lorsque le cube est fixe se ramènent à l'une des trois situations suivantes, qui sont bien sûr distinctes.



Problème 3 .

(i) *Combien y a-t'il de colliers (fixes) distincts à* 67 *perles dont : deux noires et sept bleues, deux jaunes et cinquante six blanches ?*

(ii) *Combien y a-t'il de colliers (mobiles) distincts à* 67 *perles dont : deux noires et sept bleues, deux jaunes et cinquante six blanches ?*

Encore une fois, le premier problème est simple : il y a $\mathrm{C}_{67}^2 * \mathrm{C}_{65}^7 * \mathrm{C}_{58}^2 = \dfrac{67!}{56! * 4 * 7!}$. Soit environs $2,54.10^{15}$ possibilités.

En revanche, dénombrer de façon simple les colliers répondant à la deuxième question relève de la gageure. Il nous faut donc trouver un outil adapté à la situation.

Or, dans les trois problèmes que nous avons posé, la deuxième question concerne les coloriages d'un ensembles modulo l'action d'un groupe de transformation de cet ensemble : dans le premier cas, il s'agit du groupe à deux éléments engendré par la réflexion axiale, dans le deuxième cas c'est le groupe de déplacements du cube et dans le troisième cas le groupe diédral D_{67}, composé de l'identité, de 66 rotations non triviales et de 67 réflexions. On pourra trouver dans [?] une introduction assez bien faite à la théorie des groupes, par le biais notamment des groupes de tranformations d'objets géométriques tels que ceux que nous étudions ici. Pour le lecteur qu'un ouvrage en anglais rebute, on trouve dans [?] une présentation presque aussi bien faite, en français.

2 Un peu de théorie des groupes

Nous allons ici présenter une version qui se veut la plus détaillée possible d'un théorème de G. Polyà, développé à l'origine pour la chimie (il s'agissait alors de pouvoir dénombrer les isomères d'une molécule donnée). On peut en trouver une version parmi les plus accessibles dans [?] (page 90/96) ; voir aussi [?], constitué d'une réédition en anglais de l'article originel de G. Polyà, article intitulé *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für die Gruppen, Graphen* *und chemische Verbindungen* et paru en 1937 dans *Acta Mathematica*, et d'une seconde partie de commentaires par R.C. Read.

Nous avons ici essayé de séparer le résultat en deux parties, afin de faire apparaître de manière plus claire l'endroit où intervient réellement l'argument de théorie des groupes, l'isolant ainsi du reste du théorème qui se réduit essentiellement à un jeu d'écritures formelles pour aboutir à une formulation simple et utilisable.

2.1 Notations et premières définition

Soit X un ensemble fini, de cardinal n, sous l'action d'un groupe G. Soit R l'ensemble $[\![1\,;\, q]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers de 1 à q, où q est un entier désormais fixé.

Dans toute la suite, un coloriage de X en (au plus) q couleurs désignera une application de X dans l'ensemble $\mathrm{R} = [\![1\,;\, q]\!]$.

On parlera d'un coloriage de type $(n_1, \dots, n_q)$ pour désigner un coloriage qui envoie respectivement n_i éléments sur la couleur i ($i \leq q$).

Enfin on utilisera la notation $|\mathrm{Y}|$ pour désigner le cardinal de l'ensemble Y.

L'action de G sur X induit une action naturelle sur R^{X}, l'ensemble des coloriages de X en q couleurs, par :

$$\begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{R}^{\mathrm{X}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{X}} \\ \quad \sigma, f \mapsto \sigma.f \end{cases}$$

où $\sigma.f$ désigne le coloriage qui à un élément x de X associe la couleur $f(\sigma.x)$.

Nous cherchons ici à dénombrer les coloriages possibles d'un type donné modulo l'action du groupe G, c'est-à-dire que l'on cherche le nombre de classes d'équivalence de ces coloriages, sous l'action de G.

Soit ξ un type de coloriage (c'est-à-dire un q-uplet $(n_1, \dots, n_q)$). Définissons R_ξ comme l'ensembles des coloriages de type ξ. Deux coloriages conjugués sous l'action de G ayant même type, les R_ξ sont stables par l'action de G. Par restriction, G induit donc une action de groupe sur R_ξ. Définissons également F_ξ comme l'ensemble des classes d'équivalences de coloriages de type ξ.

Tout le problème, dans les trois exemples que l'on s'est donné en introduction, est de dénombrer un ensemble qui correspond à l'un de ces F_ξ,en effet nous cherchons à dénombrer les classes d'équivalences (ou orbites) de coloriages d'un type donné, sous l'action d'un groupe de transformations de l'ensemble colorié.

2.2 Une première méthode

Pour compter le nombre de classes en question, nous avons essentiellement besoin de pouvoir appliquer astucieusement la formule de Burnside :

Lemme 2.1 *(Formule de Burnside) Soit* G *un groupe fini agissant sur un ensemble* Y *fini. Alors le nombre d'orbites sous l'action de* G *est donné par la formule :*

$$\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma \in \mathrm{G}} |\mathrm{N}(\sigma)|$$

où $\mathrm{N}(\sigma)$ *désigne l'ensemble des éléments de* Y *fixés par* σ.

Soit C l'ensemble $\{(\sigma, x) \in \mathrm{G}\times\mathrm{Y}, \sigma.x = x\}$. Il s'agit de dénombrer l'ensemble C de deux façons différentes : l'une fait intervenir le nombre recherché, c'est-à-dire le nombre d'orbites, l'autre permettant alors de calculer ce nombre.

Tout d'abord, on peut écrire :

$$\mathrm{C} = \bigcup_{x\in\mathrm{Y}} \{(\sigma, x), \sigma.x = x\}$$

Cette union est naturellement disjointe, nous pouvons donc passer aux cardinaux, ce qui donne :

$$|\mathrm{C}| = \sum_{x\in\mathrm{Y}} |\{(\sigma, x), \sigma.x = x\}| = \sum_{x\in\mathrm{Y}} |\mathrm{G}(x)|$$

où $\mathrm{G}(x)$ désigne le stabilisateur de x, c'est-à-dire le sous groupe de G constitué des éléments qui fixent x.

Or si x est un élément de Y, et si w désigne l'orbite de x sous l'action de G, nous savons que tous les éléments de w ont des stabilisateurs conjugués à celui de x et ont donc même cardinal que lui. On a de plus $|\mathrm{G}| = |w| * |\mathrm{G}(x)|$. (C'est le théorème de Lagrange.)

Soit Ω l'ensemble des orbites de Y sous l'action de G. On obtient pour la somme précédente :

$$\begin{aligned} |\mathrm{C}| &= \sum_{w\in\Omega} \sum_{x\in\Omega} |\mathrm{G}(x)| \\ &= \sum_{w\in\Omega} |w| * |\mathrm{G}(x)| \\ &= \sum_{w\in\Omega} |\mathrm{G}| \\ &= |\Omega| * |\mathrm{G}| \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire C sous la forme de l'union disjointe :

$$\mathrm{C} = \bigcup_{\sigma\in\mathrm{G}} \{(\sigma, x), \sigma.x = x\}$$

Soit en passant aux cardinaux :

$$|\mathrm{C}| = \sum_{\sigma\in\mathrm{G}} |\{x, \sigma.x = x\}| = \sum_{\sigma\in\mathrm{G}} |\mathrm{N}(\sigma)|$$

De ces deux expressions de $|\mathrm{C}|$, on tire alors immédiatement :

$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma\in\mathrm{G}} |\mathrm{N}(\sigma)|$$

□

Nous avons vu que pour ξ un type donné, G induit une action de groupe sur l'ensemble R_ξ.

Appliquons la formule de Burnside à ces action de groupes. Le nombre d'orbites (*i.e.* de classes d'équivalence) de coloriages contenues dans R_ξ est donc :

$$\boxed{|\mathrm{F}_\xi| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma\in\mathrm{G}} |\mathrm{R}_\xi(\sigma)|} \qquad \textbf{(1)}$$

où $\mathrm{R}_\xi(\sigma)$ désigne l'ensemble des coloriages de R_ξ fixes par σ. C'est-à-dire :

$$\mathrm{R}_\xi(\sigma) = \{f \in \mathrm{R}_\xi, \sigma.f = f\}$$

Il suffit donc, pour résoudre nos trois problèmes, de pouvoir dénombrer les ensembles $R_\xi(\sigma)$ pour chaque élément σ du groupe G. Cela dit, tout cela reste assez fastidieux et nous allons voir que ces problèmes se simplifient en utilisant quelques notations adéquates.

2.3 Application à nos problèmes

(1) Dans le cas du drapeau, le groupe d'isométrie est constitué de l'identité et de la réflexion axiale.

- Le nombre de coloriages à 2 bandes noires et 7 bandes blanches fixés par l'identité est $C_9^2 = 36$.
- Le nombre de coloriages à 2 bandes noires et 7 bandes blanches fixés par la réflextion axiale est lui de 4 (les 2 bandes noires sont nécessairement symétriques).
- En appliquant la formule **(1)**, on trouve donc un nombre d'orbites de drapeaux à 2 bandes noires et 7 bandes blanches de :

$$\frac{1}{2}(C_9^2 + C_4^1) = 20$$

(2) Le groupe qui nous intéresse ici est le groupe de déplacements du cube, qui possède 24 éléments :

- L'identité, qui fixe tous les coloriages possibles du cube avec deux faces rouges, une face noire et trois faces blanches, soit 60 coloriages possibles.
- Les six rotations d'angle plus ou moins $\frac{\pi}{2}$ autour des trois axes passant par les milieu de deux faces opposées. Ces rotations laissent fixes deux faces et ont chacune un 4-cycle.
  Un coloriage fixé par une telle rotation a donc au moins 4 faces de la même couleur. Aucun coloriage avec deux faces rouges, une face noire et trois faces blanches n'est donc fixé par une telle rotation.
- Les trois rotation d'angle π autour de ces mêmes axes. Là, il y a deux 2-cycles au lieu du 4-cycle. L'un de ces deux cycles doit être constitué de faces rouges, l'autre de faces blanches. Les deux faces restantes sont alors dans le désordre noire et rouge. Pour une telle rotation, il y a donc $2 * 2 = 4$ coloriage fixés du type voulu (à multiplier par 3 au final car nous avons trois rotation de cette sorte).
- Les six rotations d'angle π autour des six axes joignant les milieux de deux arêtes opposées, qui ont chacune trois 2-cycles.
  Un coloriage fixé par une rotation de cette sorte possède nécessairement un nombre de faces pair de chaque couleur...
- Enfin, les huit rotations d'angle plus ou moins $\frac{2\pi}{3}$ autour des quatre axes joignant deux sommets opposés. Ces rotations ont chacune deux 3-cycles. Là encore elles ne fixent aucun coloriage du type désiré.

Au total, le nombre de cubes différents avec deux faces rouges, une face noire et trois faces blanches est donc bien, en appliquant la formule **(1)** :

$$\frac{1}{24}(60 + 3 * 4) = 3$$

(3) Le groupe qui nous intéresse ici est le groupe de déplacements du collier, c'est-à-dire D_{67}. Il se compose de :

- L'identité, qui fixe $C_{67}^2 * C_{65}^7 * C_{58}^2$ coloriages du collier en deux perles noires, sept bleues, deux jaunes et cinquante cinq blanches.
- Soixante six rotations, qui n'ont chacune qu'un seul cycle, à 67 éléments (en effet 67 est premier, donc chacune des rotations engendre toutes les autres).

  Un coloriage fixé par une telle rotation est donc nécessairement uniforme (toutes les perles de la même couleur.
- Enfin, soixante sept réflexions dont les axes sont respectivement les soixante sept axes de symétrie du collier, chacun coupant une perle en deux et laissant 33 perles entières de chaque côté. Ces réflexions ont chacune une perle fixe et trente trois 2-cycles.

  Un telle réflexion fixe donc un nombre de coloriages en deux perles noires, sept bleues, deux jaunes et cinquante cinq blanches de :

  $$C_{33}^1 * C_{32}^1 * C_{31}^3$$

  En effet, nous avons $C_{33}^1 = 33$ choix pour les deux perles noires, qui doivent être symétriques par rapport à l'axe de la réflexion, puis 32 choix pour les perles jaunes, et enfin C_{31}^3 façon de choisir trois paires de perles bleues (la septième étant nécessairement la perle traversée par l'axe de la réflexion).

Le nombre de colliers (mobiles) distincts à 67 perles dont deux noires, sept bleues, deux jaunes et cinquante six blanches est donc, en appliquant la formule **(1)** :

$$\frac{1}{134}\left(C_{67}^2 * C_{65}^7 * C_{58}^2 + 67 * C_{33}^1 * C_{32}^1 * C_{31}^3\right)$$

Soit environs $1,9.10^{13}$ solutions.

Cet exemple illustre bien l'efficacité de la méthode : le résultat se calcule assez facilement, alors qu'il est hors de question de dénombrer les coloriages "à la main" comme pour les deux premiers problèmes.

3 Le formalisme du théorème de Polyà

Nous venont de voir comment résoudre tous les problèmes du type de ceux qui nous intéressent ici en applicant la formule **(1)**, qui est un cas particulier de la formule de Burnside.

Cela dit, tout cela reste assez fastidieux et nous allons voir que ces problèmes se simplifient grandement en utilisant quelques notations adéquates. Ceci au détriment peut être d'un peu de clarté : l'outil est performant mais un peu moins intuitif.

3.1 Un polynôme adapté

Nous allons par la suite considérer les couleurs (les entiers $1, \ldots, q$) comme des indéterminées. Plus précisément :

Définition Soit A l'anneau $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_q]$, et w l'application de R dans A qui à i associe l'indéterminée X_i. Soit f un coloriage de X. On définit le poids de f, noté $W(f)$, par la formule :

$$W(f) = \prod_{x \in X} w(f(x))$$

Ce poids se calcule aisément : il découle de sa définition que le poids d'un coloriage de type $(n_1, \ldots, n_q)$ est $X_1^{n_1} \ldots X_q^{n_q}$.

Exemple : Par exemple, si l'ensemble X possède 4 éléments a_1, a_2, a_3, a_4 que l'on colorie en trois couleurs, le coloriage :

$$f : a_1 \mapsto 2, a_2 \mapsto 3, a_3 \mapsto 2, a_4 \mapsto 1$$

aura pour poids $w(2)w(3)w(2)w(1) = X_1 X_2^2 X_3$.

Notons que nous avons une bijection naturelle entre poids et types de coloriages. Par la suite, la lettre ξ désignera un élément de l'anneau A, c'est-à-dire un poids. Et les résultats obtenus précédemment sur le cardinal des F_ξ restent bien sûr valables si l'on parle de poids. En particulier, deux coloriages conjugués sous l'action de G ont donc même poids. On peut alors définir le poids d'une classe d'équivalence de coloriage par :

$$W\left(\widetilde{f}\right) = W(f)$$

où f désigne un représentant quelconque de la classe $\widetilde{f}$.
Définition L'inventaire W des coloriages de X sous l'action de G est le polynôme :

$$W = \sum_{\widetilde{f} \in F} W\left(\widetilde{f}\right)$$

Exemple Pour reprendre l'exemple précédent, dans lequel l'ensemble X a 4 éléments et n'est sous l'action d'aucun groupe (c'est-à-dire que le groupe G est réduit à l'identité et que l'on peut identifier les coloriages et les classes de coloriages toutes réduites à un seul élément), l'inventaire des coloriages sera :

$$W = (X_1 + X_2 + X_3)^4$$

En effet chaque terme du développement de ce polynôme peut être associé à un unique coloriage de l'ensemble $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Propriété 3.1 *Le nombre de coloriages de type $(n_1, \ldots, n_q)$ (à équivalence près) est égal au coefficient du monôme en $X_1^{n_1} \ldots X_q^{n_q}$ dans l'inventaire* W.

En effet l'on a construit le polynôme W pour qu'il ait cette propriété : chaque classe d'équivalence de coloriage de type $(n_1, \ldots, n_q)$ ayant pour poids $X_1^{n_1} \ldots X_q^{n_q}$, l'on retrouve dans W autant de tels monômes qu'il y a de classe d'équivalence de coloriage de type $(n_1, \ldots, n_q)$.

□

3.2 Le théorème de Polyà

Théorème 3.2 *(G.Polyà)*
L'inventaire W *se calcule par la formule :*

$$\mathrm{W} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma \in \mathrm{G}} \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_1^i + \ldots + \mathrm{X}_q^i\right)^{e_i(\sigma)}$$

où $e_i(\sigma)$ désigne le nombre de cycles de longueur i de σ.

Utilisant la propriété **??**, on obtient comme expression de l'inventaire :

$$\mathrm{W} = \sum_{\xi \in \mathrm{A}} |\mathrm{F}_\xi| \xi$$

Mais alors, grâce à l'égalité **(1)**, on peut remplacer $|\mathrm{F}_\xi|$ par sa valeur pour trouver :

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\xi \in \mathrm{A}} \xi \sum_{\sigma \in \mathrm{G}} |\mathrm{R}_\xi(\sigma)| \\ &= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma \in \mathrm{G}} \sum_{\xi \in \mathrm{A}} \xi |\mathrm{R}_\xi(\sigma)| \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Comme les éléments de $\mathrm{R}_\xi(\sigma)$ sont par définition de poids ξ, on a :

$$\begin{aligned} \xi |\mathrm{R}_\xi(\sigma)| &= \sum_{f \in \mathrm{R}_\xi(\sigma)} \xi \\ &= \sum_{f \in \mathrm{R}_\xi(\sigma)} \mathrm{W}(f) \end{aligned}$$

Et lorsque l'on somme ces expression sur tous les éléments ξ de A, il vient :

$$\sum_{\xi \in \mathrm{A}} \xi |\mathrm{R}_\xi(\sigma)| = \sum_{\xi \in \mathrm{A}} \sum_{f \in \mathrm{R}_\xi(\sigma)} \mathrm{W}(f) = \sum_{f \in \bigcup\limits_{\xi \in \mathrm{A}} \mathrm{R}_\xi(\sigma)} \mathrm{W}(f)$$

Or l'union des ensembles $\mathrm{R}_\xi(\sigma)$ lorsque ξ décrit A n'est autre que l'ensemble des coloriages fixés par σ, on obtient :

$$\sum_{\xi \in \mathrm{A}} \xi |\mathrm{R}_\xi(\sigma)| = \sum_{f \in \mathrm{R}^\mathrm{X}, \sigma.f = f} \mathrm{W}(f)$$

Lemme 3.3 *Soit σ un élément de* G*. Alors on obtient l'expression de la somme* $\sum\limits_{f \in \mathrm{R}^\mathrm{X}, \sigma.f = f} \mathrm{W}(f)$ *par la formule :*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_1^i + \ldots + \mathrm{X}_q^i\right)^{e_i(\sigma)}$$

Les coloriages fixés par un élément σ de G sont clairement les coloriages constants sur chaque cycle de l'élément σ. Soit $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p)$ une énumération des cycles de σ. Soit $(m_1, \ldots, m_p)$ les cardinaux des ensembles $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p)$.

On a une bijection naturelle entre l'ensemble des coloriages de X fixés par σ et l'ensemble des coloriages de $\mathrm{S} = [\![1\,; p]\!]$: à un coloriage f de X fixé par σ, on associe le coloriage $\varphi(f)$ de S qui à $i \leq p$ associe la couleur de X_i par le coloriage f.

Reformulé de cette façon, on obtient pour la somme précédente l'expression :

$$\sum_{f\in \mathrm{R}^{\mathrm{X}},\sigma.f=f} \mathrm{W}(f) = \sum_{g\in \mathrm{R}^{\mathrm{S}}} \mathrm{W}\left(\varphi^{-1}(g)\right)$$

Or, pour $g \in \mathrm{R}^{\mathrm{S}}$, on a immédiatement $\mathrm{W}\left(\varphi^{-1}(g)\right) = \prod_{i=1}^{p} w\,(g(i))^{m_i}$.

D'où l'expression :

$$\sum_{f\in \mathrm{R}^{\mathrm{X}},\sigma.f=f} \mathrm{W}(f) = \sum_{g\in \mathrm{R}^{\mathrm{S}}} \prod_{i=1}^{p} w\,(g(i))^{m_i}$$

Enfin on reconnaît dans cette dernière expression le développement de l'expression :

$$\prod_{i=1}^{p} \sum_{y\in \mathrm{R}} w(y)^{m_i} = \prod_{i=1}^{p} \left(\mathrm{X}_1^{m_i} + \ldots + \mathrm{X}_q^{m_i}\right)$$

En regroupant les facteurs identiques (*i.e.* de même degré) et en indiçant le produit par le degré des facteurs, on obtient :

$$\prod_{i\in \mathbb{N}} \left(\mathrm{X}_1^i + \ldots + \mathrm{X}_q^i\right)^{e_i(\sigma)}$$

où $e_i(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ de longueur i. Et comme l'ensemble X a exactement n éléments, les cycles de σ sont au plus de longueur n et l'on peut borner notre produit par n. Il vient :

$$\sum_{f\in \mathrm{R}^{\mathrm{X}},\sigma.f=f} \mathrm{W}(f) = \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_1^i + \ldots + \mathrm{X}_q^i\right)^{e_i(\sigma)}$$

□

Remplaçant dans l'égalité **(2)** l'expression $\sum_{\xi\in \mathrm{A}} \xi|\mathrm{R}_\xi(\sigma)|$ par cette dernière valeur, on obtient le résultat voulu, à savoir :

$$\mathrm{W} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma\in \mathrm{G}} \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_1^i + \ldots + \mathrm{X}_q^i\right)^{e_i(\sigma)}$$

□

Corollaire 3.4 *Le nombre total de coloriages de* X *sous l'action de* G *en au plus q couleurs est obtenu en calculant :*

$$\mathrm{W}(1,\ldots,1) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma\in \mathrm{G}} \prod_{i=1}^{n} i^{e_i(\sigma)}$$

En effet la valeur de W au q-uplet $(1,\ldots,1)$ n'est autre que la somme des coefficients de tous les monômes de W, soit d'après la propriété **??** la somme des nombres de coloriage de tous les types possibles.

Et d'après le théorème de Polyà, cette valeur est bien obtenue par l'expression $\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\sigma\in \mathrm{G}} \prod_{i=1}^{n} i^{e_i(\sigma)}$.

□

3.3 Application à nos trois problèmes

(1) Dans le cas du drapeau, le groupe d'isométrie est constitué de l'identité et de la réflexion axiale.

- L'identité possède 9 cycles de longueur 1, ce qui nous donne un terme en $(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)^9$.
- La réflexion possède un cycle de longueur 1 et 4 cycles de longueur 2, ce qui nous donne un terme en $(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2\right)^4$.
- Au total, l'inventaire des coloriages en deux couleurs est donc :

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}\left((\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)^9+(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2)^4\right)$$

Le nombre de coloriages ayant 2 bandes noires (couleur 1) et 7 bandes blanches (couleur 2) est donc le coefficient de $\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2^7$ dans le polynôme W, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{C}_9^2+\mathrm{C}_4^1)=20$$

(2) Le groupe qui nous intéresse ici est le groupe de déplacements du cube, qui possède 24 éléments :

- L'identité, qui nous donne le terme $(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^6$.
- Les six rotations d'angle plus ou moins $\frac{\pi}{2}$ autour des trois axes passant par les milieu de deux faces opposées. Ces rotations laissent fixes deux faces et ont chacune un 4-cycle. Le terme correspondant est donc $6\,(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^2\left(\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\mathrm{X}_3^4\right)$.
- Les trois rotation d'angle π autour de ces mêmes axes. Là, il y a deux 2-cycles au lieu du 4-cycle. Le terme correspondant est donc

$$3\,(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^2\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\mathrm{X}_3^2\right)^2$$

- Les six rotations d'angle π autour des six axes joignant les milieux de deux arêtes opposées, qui ont chacune trois 2-cycles. Ce qui nous donne le terme $6\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\mathrm{X}_3^2\right)^3$.
- Les huit rotations d'angle plus ou moins $\frac{2\pi}{3}$ autour des quatre axes joignant deux sommets opposés. Ces rotations ont chacune deux 3-cycles. Ce qui nous donne le terme $8\left(\mathrm{X}_1^3+\mathrm{X}_2^3+\mathrm{X}_3^3\right)^2$.
- Au total, l'inventaire des coloriages est donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{W}\ &=\frac{1}{24}\left((\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^6+6\,(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^2\left(\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\mathrm{X}_3^4\right)\right)\\&+\frac{1}{24}\left(3\,(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^2\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\mathrm{X}_3^2\right)^2\right)\\&+\frac{1}{24}\left(6\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\mathrm{X}_3^2\right)^3+8\left(\mathrm{X}_1^3+\mathrm{X}_2^3+\mathrm{X}_3^3\right)^2\right)\end{aligned}$$

Pour trouver la réponse à notre problème, il suffit de calculer le coefficient du terme en $\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3^3$ dans l'expression développée de W. On se rend rapidement compte que seuls les deux premiers termes nous donnent des monômes en $\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3^3$, et que le coefficient cherché est $\frac{1}{24}(\mathrm{C}_6^2*\mathrm{C}_4^1+3\mathrm{C}_2^1*\mathrm{C}_2^1)=3\,!$

Notons enfin que le nombre de coloriages possibles du cube en trois couleurs au plus est, d'après le corollaire du théorème de Polyà : $W(1, 1, 1) = 57$.

(3) Le groupe qui nous intéresse ici est le groupe de déplacements du collier, c'est-à-dire D_{67}. Il se compose de :

– L'identité, qui nous donne le terme $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^{67}$.

– soixante six rotations, qui n'ont chacune qu'un seul cycle, à 67 éléments (en effet 67 est premier, donc chacune des rotations engendre toutes les autres). Ceci nous donne le terme $66(X_1^{67} + X_2^{67} + X_3^{67} + X_4^{67})$.

– Enfin, soixante sept réflexions dont les axes sont respectivement les soixante sept axes de symétrie du collier, chacun coupant une perle en deux et laissant 33 perles entières de chaque côté. Ces réflexions ont chacune une perle fixe et trente trois 2-cycles. Nous obtenons le terme $67(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2)^{33}$.

– D'où l'inventaire des coloriages, qui est cette fois :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{134}\Big((X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^{67} + 66\left(X_1^{67} + X_2^{67} + X_3^{67} + X_4^{67}\right)\Big) \\ &+ \frac{67}{134}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2\right)^{33} \end{aligned}$$

Le nombre de colliers distincts à 67 perles dont deux noires (couleur 1), sept bleues (couleur 2), deux jaunes (couleur 3) et cinquante six blanches (couleur 4) est donc le coefficient de $X_1^2 X_2^7 X_3^2 X_4^{55}$ dans le polynôme W.

On trouve : $\frac{1}{134}\left(C_{67}^2 * C_{65}^7 * C_{58}^2 + 67C_{33}^1 * C_{32}^3 * C_{29}^1\right)$.

Soit environs $1,9.10^{13}$ solutions.

N.B. L'intérêt de cette méthode par rapport à celle développée dans la partie précédente ne saute peut-être pas aux yeux. Il réside essentiellement dans le caractère unificateur du polynôme défini. En effet calculer le nombre de coloriages du cubes ayant une face rouge, une noire et les quatre dernières blanches est ici immédiat, tandis qu'avec notre première méthode, il aurait fallu tout reprendre. Idem pour ce qui est de calculer le nombre de colliers possible si l'on change en bleu deux perles blanches, par exemple.

Références

[1] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ecole Normale Supérieure, 1990.

[2] L. Comtet, *Analyse Combinatoire II*, PUF "Le mathématicien", 1970.

[3] M.A. Armstrong, *Groups and Symetry*, Springer, Undergraduate texts in Mathematics.

[4] P.S. Alexandroff, *Introduction à la théorie des groupes*, Dunod.

[5] G. Polyà and R.C.Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer 1987.