Constructions de la droite réelle

1. Coupures de Dedekind.

2. Complétion de Méray-Cantor.

3. Quasi-morphismes de Z.

4. Nombres surréels, réels non standard.

Pierre-Jean Hormière

« Synthèse, dit le ciel. L'homme dit : Analyse ! »
Victor Hugo, *Toute la Lyre*

Introduction.

Dès 1858, dans ses cours de calcul différentiel au Polytechnikum de Zurich, Richard Dedekind déplorait l'absence de fondements rigoureux de l'analyse réelle, et tentait de donner une définition purement arithmétique de la continuité et des nombres irrationnels. Il publia en 1872 le résultat de ses recherches, sous le titre *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuité et nombres irrationnels). En 1869 le français Charles Méray avait défini les irrationnels comme limites de suites de Cauchy de rationnels, et Georg Cantor développa une approche analogue en 1872 et 1883.

Richard Dedekind (1831-1916)

Georg Cantor (1845-1918)

L'idée de Dedekind est géométrique : tout nombre réel x, qu'il soit rationnel ou irrationnel, coupe la droite réelle en deux demi-droites, donc il coupe aussi la droite rationnelle en deux demi-droites, disons : $\alpha = \{ r \in \mathbf{Q} \,;\, r < x \}$ et $\beta = \{ s \in \mathbf{Q} \,;\, s \geq x \}$.

α et β sont deux demi-droites adjacentes de **Q**, formant une partition de **Q**. Du coup, pour construire la droite réelle en supposant connue la seule droite rationnelle, Dedekind définit les « coupures » de **Q**, comme des couples de demi-droites adjacentes, munit leur ensemble $\mathfrak{D}$ d'une structure de corps commutatif totalement ordonné et complet. Enfin, il plonge **Q** dans $\mathfrak{D}$, en identifiant le rationnel r à la coupure qu'il détermine $\alpha = \{ q \in \mathbf{Q} \,;\, q < r \}$ et $\beta = \{ q' \in \mathbf{Q} \,;\, q' \geq r \}$.

L'idée de Méray et Cantor, fort différente, procède également par analyse et par synthèse : tout réel est limite d'une suite de rationnels ; cette suite vérifie le critère de Cauchy. On peut donc définir un réel au moyen d'une suite de Cauchy de rationnels ; mais comme deux suites de Cauchy dont la différence tend vers 0 ont même limite, il faut plutôt voir un nombre réel comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels pour cette relation d'équivalence. Vue sous cet angle, la droite réelle est un espace quotient.

L'approche de Dedekind met l'accent sur les propriétés de l'ordre, mais la définition des opérations (addition, multiplication) est assez pénible. John Conway a généralisé cette approche en direction des nombres surréels. Dans l'approche de Méray-Cantor, la définition des opérations est aisée, mais la définition de l'ordre est plus technique. Par la suite, Hensel et Ostrowski ont généralisé cette approche en cherchant toutes les valeurs absolues sur le corps **Q** et en définissant les corps *p*-adiques $\mathbf{Q}_p$ par le même procédé de complétion. L'exposé ici proposé est écrit en langage moderne ; on trouvera dans le livre de Jacqueline Boniface des extraits des mémoires de Méray, Cantor, Dedekind, mais aussi Weierstrass, Heine, etc.

Comme on voit, les mathématiques ont une histoire. Mais l'enseignement des mathématiques a aussi une histoire. Lorsque j'étais élève en terminale C, au lycée Berthollet d'Annecy, en 1968-69, le professeur de maths Henri Dupont-Roc a construit la droite réelle par la méthode des coupures. L'année suivante, en math. sup., Georges Vidiani a construit la droite réelle par la méthode de complétion de Cantor. En ce temps-là, les professeurs de mathématiques construisaient, par analyse et par synthèse, les ensembles de nombres avant d'en étudier les propriétés. Cette époque lointaine est révolue. L'empirisme règne en maître dans l'enseignement actuel : il est impératif, pour la bonne marche du système, que les jeunes gens d'aujourd'hui admettent et acceptent le monde, y compris le monde mathématique, tel qu'il est, et qu'ils ne cherchent pas à le reconstruire par la voie de la pensée. Cela pourrait développer l'imagination, le sens de l'abstraction, et donner des idées subversives : lire Spinoza, Marx, Freud, Bourbaki, s'interroger sur l'intérêt de bétonner les 2000 hectares de Notre-Dame-des Landes pour le plus grand profit des marchands de béton.

1. Coupures de Dedekind.

« Si les points d'une droite sont répartis en deux classes, de telle manière que tous les points de la première classe soient placés à gauche de tous les points de la seconde, alors il existe un unique point de division, qui engendre cette répartition en deux classes, cette coupure de la droite en deux parties. »

Richard Dedekind

1.1. Coupures et complété de Dedekind d'un ensemble ordonné.

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble muni d'un ordre total, noté $\leq$.
On note $x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y)$ l'ordre strict associé.
Nous supposerons que E possède au moins deux éléments, et vérifie les deux propriétés suivantes :

(S1) E n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément ;

(S2) L'ordre de E est « dense » : entre deux éléments distincts de E il y en a toujours un troisième :

$$\forall (x, y) \in E\times E \quad x < y \;\Rightarrow\; \exists v \in E \quad x < v < y \;.$$

Ces deux propriétés sont équivalentes à celle-ci :

$$(\,I\,) \quad \forall (x, y) \in E\times E \quad x < y \;\Rightarrow\; \exists (u, v, w) \in E\times E\times E \quad u < x < v < y < w \,.$$

Elles impliquent que l'ensemble E est infini. La réciproque est fausse : pour l'ordre naturel, **Z** ne vérifie pas (S2), tandis que **Q** vérifie (S2).

Définition 1 : On appelle **coupure de Dedekind** de E un couple d = (A, B) de parties de E vérifiant :

(D 1) (A, B) est une partition de E , i.e. A et B sont non vides, disjoints et de réunion E.

(D 2) $(\forall x \in A) \quad (\forall y \in B) \quad x < y$;

(D 3) A n'a pas de plus grand élément.

A est appelée **partie gauche**, et B **partie droite** de la coupure d.
On note $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{D}(E)$, l'ensemble des coupures de Dedekind de E.

Propriétés :

1) Il découle de (D1) et (D2) que (D'2) $\forall a \in A \quad x \leq a \;\Rightarrow\; x \in A$; $\forall b \in B \quad b \leq y \;\Rightarrow\; y \in B$.

2) Réciproquement, si (A, B) vérifie (D1) et (D'2), alors (A, B) vérifie (D1) et (D2).

3) A tout élément $x \in E$ on associe la coupure $d(x) = (A(x), B(x))$, où :

$$A(x) = \{ a \in E ; a < x \} =]\leftarrow, x[\quad \text{et} \quad B(x) = \{ b \in E ; x \leq b \} = [x, \rightarrow[.$$

$d(x)$ est bien une coupure car, en vertu de (I), $A(x)$ n'a pas de plus grand élément.
De plus, $x = \sup A = \min B$.
Sans l'axiome (D3), tout $x \in E$ définirait deux coupures : $(]\leftarrow, x[\,, [x, \rightarrow[)$ et $(]\leftarrow, x]\,,]x, \rightarrow[)$.
Les coupures de la forme $d(x)$ seront dites **élémentaires**. Les autres, si elles existent, seront appelées **ouvertes** [1] : dans ce cas, B n'a pas de plus petit élément.

4) B est le complémentaire de A, et c'est aussi l'ensemble des majorants de A. La donnée de d équivaut donc à celle de A. A est une partie de E, non vide, majorée, telle que :
$\forall a \in A \quad x \leq a \Rightarrow x \in A$, et ne possédant pas de plus grand élément.
Réciproquement, si A possède ces propriétés, $(A, E - A)$ est une coupure de E.

5) A est le complémentaire de B. La donnée de d équivaut donc à celle de B. B est une partie non vide minorée, telle que $\forall b \in B \quad b \leq x \Rightarrow x \in B$, et que, si B a une borne inférieure dans E, cette borne inférieure appartient à B. Réciproque facile.

<u>Exemple</u> : Les ensembles $A = \{ a \in \mathbf{Q} ; a^2 < 2 \text{ ou } a \leq 0 \}$ et $B = \{ b \in \mathbf{Q} ; b > 0 \text{ et } 2 \leq b^2 \}$ définissent une coupure de **Q**, qui n'est pas de la forme $d(r)$, où $r \in \mathbf{Q}$. Cela a été démontré dans le chapitre sur la droite réelle.

Définition 2 : Soient $d = (A, B)$ et $d' = (C, D)$ deux coupures de E. On dit que $d \leq d'$ si $A \subset C$.

Proposition 1 : i) La relation $d \leq d'$ est un ordre total dans l'ensemble $\mathfrak{D}(E)$ des coupures.
ii) L'application $x \in E \rightarrow d(x) \in \mathfrak{D}(E)$ est strictement croissante.
iii) Toute partie non vide majorée de $\mathfrak{D}(E)$ admet une borne supérieure.

<u>Preuve</u> : i) Il est immédiat que $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
Soient $d = (A, B)$ et $d' = (C, D)$ deux coupures. Si $A \subset C$, $d \leq d'$.
Sinon, il existe un élément a de E tel que $a \in A$ et $a \notin C$. Donc $a \in D$.
Tout élément y de B vérifie $a < y$; comme $a \in D$, $y \in D$. Ainsi $B \subset D$; du coup $C \subset A$, et $d' \leq d$.
ii) Si $x \leq y$, $A(x) \subset A(y)$, donc $d(x) \leq d(y)$.
De plus, l'application $x \rightarrow d(x)$ est strictement croissante, car si $x < y$, $A(x) \subset A(y)$ et $A(x) \neq A(y)$, puisque $x \in A(y)$ et $x \notin A(x)$.

iii) Soit $(d_i)_{i\in I} = (A_i, B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, majorée par $d = (C, D)$.
Soient $A = \bigcup_{i \notin I} A_i$ et $B = \bigcap_{i \in I} B_i$. A et B sont complémentaires.

A est non vide car chacun des A_i est non vide, B est non vide car B contient D.

Soient $x \in A$ et $y \in B$; il existe i tel que $x \in A_i$; alors $y \in B_i$ et $x < y$;
Enfin, si A avait un plus grand élément a, cet élément appartiendrait à l'un des A_i, et il en serait le plus grand élément ; c'est impossible. Ainsi, $\delta = (A, B)$ est une coupure. Il est clair que $(\forall i)\ d_i \leq \delta$.
Enfin, si $(\forall i)\ d_i \leq d' = (A', B')$, alors $(\forall i)\ A_i \subset A'$, donc $A \subset A'$ et $\delta \leq d'$.

Conséquence : Ainsi, $\mathfrak{D}(E)$ est un ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie majorée non vide possède une borne supérieure. On plonge E dans $\mathfrak{D}(E)$, en identifiant l'élément x de E à la coupure $d(x)$ qu'il détermine.

Proposition 2 : Soit $\delta = (A, B)$ une coupure de E. Alors dans $\mathfrak{D}(E)$, $\delta = \sup A = \inf B$.

<u>Preuve</u> : En effet, soient a un élément de A, b un élément de B.
On a $a = d(a) \leq \delta \leq b = d(b)$, car $]\leftarrow, a[\ \subset A \subset\ ]\leftarrow, b[$; on a même $a < \delta \leq b$.
Ainsi, δ majore A et minore B.

[1] Si l'on munit E de la topologie de l'ordre, topologie ayant pour base les intervalles ouverts en tous genres de E, A et B sont alors bien ouverts. Mais peu importe.

Soit maintenant $\delta' = (C, D)$ un majorant de A. Pour tout $a \in A$, $a = d(a) \leq \delta'$, i.e. $]\leftarrow, a[\subset C$.
Je dis que $A \subset C$, donc que $\delta \leq \delta'$. En effet, soit $a \in A$; comme A n'a pas de plus grand élément, il existe $a' \in A$ tel que $a < a'$. On a $]\leftarrow, a'[\subset C$, donc $a \in C$.
Enfin, soit $\delta' = (C, D)$ un minorant de B. Pour tout $b \in B$, $\delta' \leq b = d(b)$, i.e. $C \subset\ ]\leftarrow, b[$.
Je dis que $C \subset A$, donc que $\delta' \leq \delta$. En effet, soit $c \in C$; pour tout $b \in B$, $c < b$, donc $c \neq b$.
Ainsi $c \notin B$, donc $c \in A$. Cqfd

Proposition 3 : Soient d et d' deux coupures telles que d < d'. Il existe un élément $x \in E$ tel que

$$d < x < d'.$$

Preuve : Notons d = (A, B), d' = (A', B').
A est strictement inclus dans A', donc il existe un élément $x \in E$ tel que $r \in A'$ et $r \notin A$.
Il en existe même un deuxième, sinon $A' = A \cup \{x\}$ aurait un plus grand élément.
Soient donc x et y deux éléments de E tels que x < y, appartenant à A' mais pas à A.
On a $A \subset A(x) \subset A(y) \subset A'$, les deux premières inclusions étant strictes ; donc $d < d(x) < d'$.

Autre preuve, utilisant davantage l'identification $x \equiv d(x)$: $d' = \sup \{ x \in E ; x < d' \}$.
Comme d < d', il existe forcément un $x \in E$ tel que $d < x < d'$.

Définition 3 : On dit que E est **complet au sens de Dedekind** si toute partie majorée non vide de E admet une borne supérieure.

Proposition 4 : Pour que E soit complet, il faut et il suffit que l'application $d : x \in E \to d(x) \in \mathfrak{D}(E)$ soit bijective, autrement dit que toute coupure soit élémentaire.

Preuve : 1) Supposons E complet. Soit d = (A, B) une coupure de E.
A est majorée non vide ; soit x sa borne supérieure. Je dis que $A =]\leftarrow, x[$.
En effet, $x \notin A$ en vertu de (D 3), donc $A \subset]\leftarrow, x[$. Réciproquement, si $y < x$, $y \notin B$, sans quoi $A \subset]\leftarrow, y[$ et x ne serait pas borne sup de A. Donc $y \in A$.
Ainsi, $A =]\leftarrow, x[$, donc $B = [x, \rightarrow[$ et $d = d(x)$.
2) Supposons réciproquement d bijective. Soit X une partie majorée non vide de E.
Posons $A = \{ a \in E ; \exists x \in X \ \ a < x \}$ et $B = E - A = \{ b \in E ; \forall x \in X \ \ x \leq b \}$; B est l'ensemble des majorants de X. Je dis que d = (A, B) est une coupure.
En effet, A est non vide, majorée ; $\forall a \in A \ \ x \leq a \Rightarrow x \in A$, et A n'a pas de plus grand élément, car si $a \in A$, $\exists x \in X \ \ a < x$ et, en vertu de (I) $\exists b \in X \ \ a < b < x$. Du coup $b \in A$.
Comme d est bijective, il existe $u \in E$ tel que (A, B) = d(u). Alors u = sup A. Je dis que u = sup X.
En effet, u est le plus petit élément de B, qui est l'ensemble des majorants de X.

Conséquence : Avec ces notations, on dit que $\mathfrak{D}(E)$ est un complété de Dedekind de E. Il découle de la prop. précédente que $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(E)) = \mathfrak{D}(E)$. Ainsi, la complétion de Dedekind est un fusil à un coup.

1.2. La droite réelle.

La droite rationnelle **Q** munie de son ordre naturel, vérifie (I).

Définition 4 : On nomme **droite réelle**, et on note **R**, l'ensemble $\mathfrak{D}(\mathbf{Q})$, complété de Dedekind de la droite rationnelle. Les éléments de $\mathfrak{D}(\mathbf{Q})$, c'est-à-dire les coupures de **Q**, s'appellent **nombres réels**.

Propriétés :
1) Soit d = (A, B) un nombre réel.
A est une demi-droite « ouverte » de **Q**, en ce sens que $\forall a \in A \ \ \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \ \ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$.
De plus, les ensembles A et B sont **contigus**, en ce sens que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \ \ \exists (a, b) \in A \times B \ \ \ b - a \leq \varepsilon.$$

En effet, choisissons $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. **Q** étant archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que :

$$a_0 < a_0 + \varepsilon < \ldots < a_0 + n\varepsilon \leq b_0 < a_0 + (n + 1)\varepsilon .$$

Soit k le plus grand indice $\leq n$ tel que $a_0 + k\varepsilon \in A$. Alors le couple $(a, b) = (a_0 + k\varepsilon , a_0 + (k+1)\varepsilon)$ répond à la question.

2) La droite rationnelle **Q** n'est pas complète au sens de Dedekind. Ainsi, les ensembles

$$A = \{ a \in \mathbf{Q} \,;\, a^2 < 2 \text{ ou } a \leq 0 \} \quad \text{et} \quad B = \{ b \in \mathbf{Q} \,;\, b > 0 \text{ et } 2 \leq b^2 \}$$

définissent une coupure de **Q**, qui n'est pas de la forme d(r), où $r \in \mathbf{Q}$.
Les réels qui ne sont pas de la forme r = d(r) s'appellent **nombres irrationnels**. Les irrationnels sont exactement les coupures ouvertes d = (A, B) de **Q** : B n'a pas de plus petit élément, et est une demi-droite ouverte de **Q**.

Proposition 5 : On a les équivalences :

i) $0 \leq d = (A, B) \Leftrightarrow \mathbf{Q}^*_- \subset A \Leftrightarrow B \subset \mathbf{Q}_+$.

ii) $0 < d = (A, B) \Leftrightarrow 0 \in A \Leftrightarrow \mathbf{Q}_- \subset A \Leftrightarrow B \subset \mathbf{Q}^*_+$.

<u>Preuve</u> : $0 \leq d = (A, B)$ signifie que $d(0) \leq d = (A, B)$, c'est-à-dire $A(0) = \mathbf{Q}^*_- \subset A$.

$0 < d = (A, B)$ signifie que $A(0) = \mathbf{Q}^*_- \subset A$, l'inclusion étant stricte ; A contient un rationnel ≥ 0, donc contient 0.

1.3. <u>Le corps des nombres réels</u>.

Il reste à définir dans **R** une addition et une multiplication. Cela ne va pas être si facile.

Si X et Y sont deux parties non vides de **Q**, on note :

$$X + Y = \{ x + y \,;\, x \in X \text{ et } y \in Y \} \quad \text{et} \quad X.Y = \{ x.y \,;\, x \in X \text{ et } y \in Y \}.$$

Rappelons qu'une coupure d = (A, B) est entièrement définie par la donnée de sa <u>partie gauche</u> A, à condition d'imposer à A d'être non vide, majorée, telle que : $\forall a \in A\ x \leq a \Rightarrow x \in A$, et ne possédant pas de plus grand élément.

Définition 5 : Si d = (A, B) et d' = (A', B') sont deux coupures de **Q**, on note

$$d + d' = (C, D) \ , \text{ où } C = A + A' \ , \ D \text{ étant le complémentaire de } C.$$

Proposition 6 : d + d' est une coupure, et (**R**, +) est un groupe commutatif de neutre 0 = d(0).
L'application $r \rightarrow d(r)$ est un morphisme injectif du groupe (**Q**, +) dans le groupe (**R**, +).
De plus l'ordre est compatible avec l'addition : $d \leq d' \Rightarrow (\forall d'')\ d + d'' \leq d' + d''$.

<u>Preuve</u> : 1) C = A + A' est non vide, majorée. C n'a pas de plus grand élément, car si $c = a + a' \in C$, il existe $\alpha > a$ dans A et $\alpha' > a'$ dans A', de sorte que $c < \gamma = \alpha + \alpha' \in C$.
Enfin, soient $c = a + a' \in C$ et $x \leq c$. Ecrivons $x = a + y$. On a $y \leq a'$, donc $y \in A'$ et $x \in C$.

2) L'associativité, la commutativité de l'addition des coupures découlent de l'associativité et le la commutativité de l'addition des parties de **Q**.

3) d(0) = 0 est élément neutre, car Si d = (A, B), $A + \mathbf{Q}^*_- = A$.

4) Je dis que $\forall (r, s) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\quad d(r + s) = d(r) + d(s)$.

Cela revient à dire $]\leftarrow, r[+]\leftarrow, s[=]\leftarrow, r + s[$. En effet $x < r$ et $y < s \Rightarrow x + y < r + s$.
Inversement, si $z < r + s$, soit x un rationnel tel que $z - s < x < r$. Alors $z = x + y$, où $x < r$ et $y < s$.

5) Reste à trouver l'opposée de la coupure d = (A, B). C'est là qu'il y a un problème.
Je dis que si d est le rationnel d(r), l'opposée de d est d(−r), et que, si d = (A, B) est un irrationnel, c'est-à-dire si les demi-droites A et B sont ouvertes, −d = (−B, −A). Vérification laissée au lecteur.

6) Enfin, $d \leq d' \Rightarrow (\forall d'')\ d + d'' \leq d' + d''$. Idem.

Définissons maintenant le produit de deux coupures > 0. Rappelons qu'une coupure d = (A, B) est entièrement définie par la donnée de sa <u>partie droite</u> B. B est une partie non vide minorée, telle que $\forall b \in B\quad b \leq x \Rightarrow x \in B$; de plus, si B a une borne inférieure dans E, cette borne inférieure appartient à B. Enfin, $d > 0 \Leftrightarrow B \subset \mathbf{Q}^*_+$.

Définition 6 : Si d = (A, B) et d' = (A', B') sont deux coupures > 0, on note :

$$d.d' = (C, D) \ , \text{ où } D = B.B' \ , \ C \text{ étant le complémentaire de } D.$$

Proposition 7 : $\mathbf{R}^*_+$ est un groupe multiplicatif commutatif de neutre 1 = d(1), et $r \to d(r)$ est un morphisme injectif de $(\mathbf{Q}^*_+, \times)$ dans $(\mathbf{R}^*_+, \times)$.

Preuve : laissée au lecteur.

Extension à **R** de la multiplication des coupures.

On ne peut étendre en l'état la définition 6 à des coupures de signe quelconque.
Pour multiplier deux coupures de signe quelconque, notons que toute coupure d s'écrit $d = a - b$, où a et b sont des coupures > 0. Si $d = a - b$, et $d' = a' - b'$, on définit le produit d.d' par :

$$d.d' = (a - b).(a' - b') = a.a' + b.b' - a.b' - b.a'.$$

La coupure ainsi obtenue ne dépend pas des couples (a, b) et (a', b') choisis. De plus, quand d et d' sont positives, cette définition coïncide avec l'ancienne.

Proposition 8 : **R** est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication.

Preuve : La vérification des axiomes restants est longue et fastidieuse. On la trouve, paraît-il, dans E. Landau (Grundlagen der Analysis, 1930, une traduction anglaise existe).

Proposition 9 : **R** est archimédien : $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}_+ \quad \exists n \in \mathbf{N} \quad y \leq n.x$.

Preuve : La propriété est évidente pour $y \leq x$. Supposons donc $0 < x < y$.
En vertu de la prop 3, il existe r et $s \in \mathbf{Q}^*_+$ tels que $0 < r < x < y < s$.
(L'existence de s découle de la prop 3 appliquée à 1/y).
Comme le corps **Q** est archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $s \leq n.r$. Et alors $y \leq n.r < n.x$. Cqfd.

Ainsi, **R** est un corps totalement ordonné, archimédien et complet au sens de Dedekind. La propriété des segments emboîtés, la complétude au sens de Cauchy, s'en déduisent aisément, comme on l'a vu dans le chapitre sur la droite réelle.

1.4. Droite de Souslin, hypothèse de Souslin.

Soit S un ensemble totalement ordonné non vide vérifiant :

(S1) S n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément ;

(S2) L'ordre de S est « dense » : entre deux éléments distincts de S il y en a toujours un troisième ;

(S3) Toute partie majorée non vide de S a une borne supérieure, toute partie minorée non vide de S a une borne inférieure ;

(S4) Toute famille d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints est dénombrable.

Les ensembles S vérifiant (S1), (S2) et (S3) sont appelés *continus*. Tout continu qui admet une partie dense dénombrable est isomorphe à **R**. Appelons *continu de Souslin* un continu tel que toute famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints soit au plus dénombrable. L'*hypothèse de Souslin*[2] est l'assertion : tout continu de Souslin est isomorphe à **R**.
On a montré que cette hypothèse est indépendante des axiomes ZFC de la théorie des ensembles.
La compatibilité de cette hypothèse et de l'hypothèse du continu a été établie par Jensen en 1971. Les liens de l'hypothèse de Souslin avec l'axiome de Martin sont évoqués dans l'E.U., Théorie axiomatique des ensembles.

2. Complétion de Méray-Cantor.

« Veux-tu me compléter et que je te complète ? »

Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*

Soit $\mathbb{S} = \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ l'anneau des suites de rationnels, pour les deux lois usuelles : addition et multiplication terme à terme.

2.1. Le corps des nombres réels.

[2] Mikhaïl Souslin (1894-1919), mathématicien russe, élève de Lusin, a rectifié une erreur dans une assertion de Lebesgue relative aux ensembles boréliens. Il a disparu au cours de l'été 1919, pendant la guerre civile.

Définition 1 : Une suite $a = (a_n)$ de rationnels est dite :

- **bornée** s'il existe $M \in \mathbf{Q}_+$ tel que $(\forall n)\ \ | a_n | \le M$.
- **convergente** s'il existe un rationnel a tel que : $\forall\varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ | a_n - a | \le \varepsilon$
- **de Cauchy** (ou fondamentale) si $\forall\varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+\ \ \exists n_0\ \ \forall p, q \ge n_0\ \ | a_p - a_q | \le \varepsilon$.

Théorème 1 : a) Les suites bornées forment un sous-anneau $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{S}$.

b) Les suites de Cauchy forment un sous-anneau $\mathcal{Q}$ de $\mathfrak{B}$. [3]

c) Les suites convergentes forment un sous-anneau $\mathcal{C}$ de $\mathcal{Q}$.

d) Les suites de limite nulle forment un idéal $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$, donc de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$.

<u>Preuve</u> : a) est facile.

b) Une suite de Cauchy est bornée, car $\exists n_0\ \ \forall p, q \ge n_0\ \ | a_p - a_q | \le 1$, donc pour tout n

$$\min(a_0, a_1, \dots , a_{n_0-1} , a_{n_0} - 1) \le u_n \le \max(a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1).$$

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de Cauchy, $(a_n - b_n)$ est de Cauchy, ainsi que $(a_n.b_n)$, car :

$| a_p.b_p - a_q.b_q | = | a_p.(b_p - b_q) + (a_p - a_q).b_q | \le | a_p |.| b_p - b_q | + | a_p - a_q |.| b_q | \le (A + B).\varepsilon$

àpcr, en supposant $(\forall n)\ \ |a_n| \le A$ et $|b_n| \le B$.

c) Toute suite convergente est de Cauchy, car si (a_n) tend vers a,

$\forall\varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ | a_n - a | \le \varepsilon / 2$, et alors $\forall p, q \ge n_0\ \ | a_p - a_q | \le \varepsilon$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathcal{Q}$. Et $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $\mathcal{Q}$, car si (a_n) tend vers a, et (b_n) tend vers b, $(a_n - b_n)$ tend vers $a - b$, et $(a_n.b_n)$ tend vers $a.b$. Enfin, la suite constante égale à 1 converge.

d) Les suites de limite nulle forment un idéal $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{B}$, car elles forment un sous-groupe additif, et si (a_n) tend vers 0 et si (b_n) est bornée, $(a_n.b_n)$ tend vers 0.

Remarques : Le lecteur démontrera les deux résultats suivants :

1) Toute suite de rationnels croissante majorée, resp. décroissante minorée, est de Cauchy.

2) L'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ est <u>stricte</u>. Ainsi, les deux suites de rationnels $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $S_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ et

$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k(k+1)/2}}$ sont de Cauchy, mais elles ne convergent vers aucun rationnel.

On exprime cette propriété en disant que **Q** <u>n'est pas complet</u> (au sens de Cauchy).

Proposition 2 : i) Si (a_n) est une suite de Cauchy, il en est de même de la suite $(|a_n|)$.

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de Cauchy, il en est de même des suites $(\sup(a_n, b_n))$ et $(\inf(a_n, b_n))$.

ii) Soit (a_n) une suite de Cauchy vérifiant : $\exists\alpha > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ | a_n | \ge \alpha$.

Alors la suite $(1/a_n)$, définie pour $n \ge n_0$, prenant des valeurs arbitraires avant, est de Cauchy.

<u>Preuve</u> : i) La première assertion découle de la majoration $| |a_p| - |a_q| | \le | a_p - a_q |$.

La 2ème assertion découle de $\sup(x, y) = \frac{1}{2} (x + y + | x - y |)$ et $\inf(x, y) = \frac{1}{2} (x + y - | x - y |)$.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q} \right| = \left| \frac{a_q - a_p}{a_p.a_q} \right| \le \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$ à partir d'un certain rang.

La suite $(1/u_n)$ n'est pas toujours définie pour $n < n_0$, mais peu importe.

Théorème 3 : L'anneau quotient $\mathcal{Q}/\mathfrak{N}$ est un corps commutatif.

<u>Preuve</u> : Soit (a_n) une suite de Cauchy de rationnels ne tendant pas vers 0.

Cela s'écrit : Non ($\forall\varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+\ \ \exists n_0\ \ \forall n > n_0\ \ | a_n | \le \varepsilon$).

---

[3] $\mathcal{Q}$ comme Augustin Cauchy.

Autrement dit : $\exists\alpha \in \mathbf{Q}^*_+ \quad \forall n_0 \quad \exists n > n_0 \quad |a_n| > \alpha$ (*)

Comme (a_n) est de Cauchy, $\exists n_1 \quad \forall p, q \geq n_1 \quad |a_p - a_q| \leq \dfrac{\alpha}{2}$.

En vertu de (*), $\exists n_2 > n_1 \quad |a_{n_2}| > \alpha$. On a donc, soit $a_{n_2} > \alpha$, soit $a_{n_2} < -\alpha$.

- Si $u_{n_2} > \alpha$, $\forall p \geq n_2 \quad |a_p - a_{n_2}| \leq \dfrac{\alpha}{2}$, donc $a_p > \dfrac{\alpha}{2}$.
- Si $u_{n_2} < -\alpha$, $\forall p \geq n_2 \quad |a_p - a_{n_2}| \leq \dfrac{\alpha}{2}$, donc $a_p < -\dfrac{\alpha}{2}$.

Dans les deux cas, $\exists\beta > 0 \quad \exists n_2 \quad \forall p \geq n_2 \quad |a_n| > \beta$.
En vertu de la prop. 2, ii), la suite (b_n), égale à $(1/a_n)$ à partir de n_0, et prenant des valeurs arbitraires avant, est de Cauchy. Elle vérifie $a.b = (a_n.b_n) \equiv 1 \pmod{\mathcal{N}}$.
Revenant à l'espace quotient, il vient $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Tout élément non nul de $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ est inversible. Cqfd.

Définition 2 : Le corps $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ est appelé **corps des nombres réels**, et noté **R**.

Un **nombre réel** est donc, par définition, une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels pour la relation $a \,\mathcal{R}\, b \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n - b_n| = 0$.

2.2. Plongement de Q dans R.

A tout rationnel r associons la suite (r) constante égale à r. C'est une suite de Cauchy.
L'application $r \to (r)$ est un morphisme injectif d'anneaux de **Q** dans $\mathcal{C}$.
La classe de la suite (r) modulo $\mathcal{N}$ est l'ensemble des suites de rationnels tendant vers r ; notons-la f(r). L'application $f : r \in \mathbf{Q} \to f(r) \in \mathcal{C}/\mathcal{N} = \mathbf{R}$ est un morphisme de corps, nécessairement injectif.
Ainsi, **Q** est isomorphe à un sous-corps de **R**. Si l'on convient d'identifier r et f(r), ce que nous ferons dans la suite, alors **Q** devient un sous-corps de **R**.

2.3. R est un corps ordonné.

Munissons **R** d'une relation d'ordre total compatible avec sa structure de corps.
Considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites $a = (a_n)$ de rationnels telles que $\exists r \in \mathbf{Q}^*_+ \ \exists n_1 \ \forall q \geq n_1 \ a_q > r$.
On a aussitôt $(a, b) \in \mathcal{P}\times\mathcal{P} \Rightarrow a + b \in \mathcal{P}$ et $a.b \in \mathcal{P}$; [$a \in \mathcal{P}$ et $a \equiv b \pmod{\mathcal{N}}$] $\Rightarrow b \in \mathcal{P}$.

Notons $\mathbf{R}^*_+$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que si $x = \bar{a}$, alors $a \in \mathcal{P}$, propriété indépendante de la suite a choisie. Notons enfin $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^*_+ \cup \{0\}$, $\mathbf{R}^*_- = -\mathbf{R}^*_+$, $\mathbf{R}_- = -\mathbf{R}_+$.

Proposition 3 : La relation $x \leq y \iff y - x \in \mathbf{R}_+$ est un ordre total sur **R** compatible avec la structure de corps.

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ . \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}_- = \{0\}$, $\mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$.
Cela est laissé en exercice.

Conséquences : en tant que corps cordonné, **R** possède toutes les propriétés énoncées dans le chapitre sur la droite réelle, § 2. En particulier, tout réel a une valeur absolue.

2.4. R est archimédien.

Proposition 4 : $\forall x \in \mathbf{R}^*_+ \ \exists r \in \mathbf{Q}^*_+ \ 0 < r < x$.

Preuve : Soit (a_n) une suite de Cauchy de **Q** représentant x.
Cette suite est élément de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que $\exists r \in \mathbf{Q}^*_+ \ \exists n_1 \ \forall q \geq n_1 \ a_q > r$.
La suite $(a_n - r)$ est élément de $\mathcal{P}$, puisqu'à partir d'un certain rang $a_n - r/2 > r/2$. Donc $0 < r < x$.

Proposition 5 : Le corps **R** est archimédien : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^*_+\times\mathbf{R}_+ \ \exists n \in \mathbf{N} \ \ y \leq n.x$.

Preuve : La propriété est évidente pour $y \le x$. Supposons donc $0 < x < y$.
En vertu de la prop 4, il existe r et s $\in$ $\mathbf{Q}^*_+$ tels que $0 < r < x < y < s$.
(L'existence de s découle de la prop 4 appliquée à 1/y).
Comme le corps **Q** est archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $s \le n.r$. Et alors $y \le n.r < n.x$. Cqfd.

2.6. Suites réelles convergentes.

Définition 3 : Une suite (x_n) de réels est dite **convergente** s'il existe un réel x tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+ \quad \exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad |\, x_n - x \,| \le \varepsilon.$$

Propriétés des suites réelles convergentes.

1) La condition précédente équivaut à : $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \quad \exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad |\, x_n - x \,| \le \varepsilon$.

L'équivalence de ces deux propriétés découle de la prop 4 : $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+ \quad \exists \varepsilon' \in \mathbf{Q}^*_+ \quad 0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

2) Il y a unicité de la limite.

3) Si (x_n) tend vers x et (y_n) tend vers y, $(x_n - y_n)$ tend vers $x - y$.

4) Soient (a_n) une suite de rationnels, a un rationnel. Il revient au même de dire que (a_n) tend vers a en tant que suite de rationnels ou que (a_n) tend vers a en tant que suite de réels.

Ces points, faciles à justifier, sont laissés au lecteur. Etablissons maintenant un résultat capital.

Proposition 6 : Soient (a_n) une suite de Cauchy de nombres rationnels, x le nombre réel qu'elle définit. Alors la suite (a_n) tend vers x dans **R** au sens précédent.

Preuve : On sait que $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \ \exists n_0 \quad \forall p, q \ge n_0 \quad |\, a_p - a_q \,| < \varepsilon$.
Je dis que $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \ \exists n_0 \quad \forall q \ge n_0 \quad |\, x - a_q \,| < \varepsilon$.
En effet, notons x_n le réel défini par la suite constante égale à a_n.
Cela découle de ce que les suites $(\varepsilon - (a_n - a_q))_n$ et $((a_n - a_q) - \varepsilon)_n$ sont toutes deux éléments de $\mathcal{P}$.
Donc les deux classes $(\varepsilon - (x - a_q))$ et $((x - a_q) - \varepsilon)$ sont positives.

2.7. Suites de Cauchy réelles ; R est complet.

Définition 4 : Une suite (x_n) de réels est dite **de Cauchy** s'il existe un réel x tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+ \quad \exists n_0 \quad \forall p, q \ge n_0 \quad |\, x_p - x_q \,| \le \varepsilon.$$

Propriétés des suites de Cauchy :

1) La condition précédente équivaut à : $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^*_+ \quad \exists n_0 \quad \forall p, q \ge n_0 \quad |\, x_p - x_q \,| \le \varepsilon$.

2) Soient (a_n) une suite de rationnels. Il revient au même de dire que (a_n) est une suite de Cauchy en tant que suite de rationnels ou que (a_n) est une suite de Cauchy en tant que suite de réels.

3) Toute suite réelle convergente est de Cauchy.

Théorème 7 : Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy de nombres réels : $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+ \ \exists n_0 \quad \forall p, q \ge n_0 \quad |\, x_p - x_q \,| \le \varepsilon$.
Par densité de **Q** dans **R**, pour tout n on peut choisir un rationnel a_n tel que $|\, a_n - x_n \,| \le \varepsilon$.
Alors $\forall p, q \ge n_0 \quad |\, a_p - a_q \,| \le |\, a_p - x_p \,| + |\, x_p - x_q \,| + |\, x_q - a_q \,| \le 3\varepsilon$.
Donc (a_n) est une suite de Cauchy de rationnels. Soit x le réel qu'elle définit.
Il découle de la prop. 6 que (a_n) tend vers x. Comme $x_n - a_n$ tend vers 0, x_n tend vers x. Cqfd.

2.8. Segments emboîtés.

Proposition 8 : Toute suite croissante majorée de réels est convergente.

Preuve : Il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. Raisonnons pas absurde.

Supposons qu'il existe $\varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$ tel que, pour tout n_0 , il existe $q > p \geq n_0 \quad x_q - x_p \geq \varepsilon$.
On construirait deux suites extraites $(x_{m(k)})$ et $(x_{n(k)})$ telles que $m(0) < n(0) < m(1) < n(1) < \dots$ et $(\forall k) \ \ x_{n(k)} - x_{m(k)} \geq \varepsilon$. En vertu de l'axiome d'Archimède, la suite $(x_{n(k)} - x_0)$ serait non majorée.

Proposition 9 : **R** satisfait l'axiome des segments emboîtés :
(CD) Si $([x_n, y_n])$ est une suite de segments emboîtés, alors $\bigcap_{n \in N} [x_n, y_n] \neq \emptyset$.

<u>Preuve</u> : La suite (x_n) est croissante majorée par y_0 ; elle a une limite x.
La suite (y_n) est décroissante minorée par x_0 ; elle a une limite y.
Il est facile de montrer que $x \leq y$ et que $\bigcap_{n \in N} [x_n, y_n] = [x, y]$. Laissons cela au lecteur.

3. <u>Quasi-morphismes de Z</u>.

En 1975, une autre construction de **R** a été proposée. Elle repose directement sur l'anneau **Z**, et l'étude de ses « quasi-morphismes ». Dans cet exposé, nous nous contentons d'*analyser* cette méthode et supposons connue la droite réelle.

Définition 1 : Un **quasi-morphisme** de **Z** est une application $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ telle que l'ensemble

$$\{ f(m + n) - f(m) - f(n) \ ; (m, n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \} \text{ est fini,}$$

autrement dit, tel que $\exists C(f) \in \mathbf{N} \quad \forall (m, n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \quad | f(m + n) - f(m) - f(n) | \leq C(f)$.

<u>**Exemples**</u> **:**

1) Toute fonction bornée de **Z** dans **Z** est un quasi-morphisme, car si f prend un nombre fini de valeurs, il en est de même de $f(m + n) - f(m) - f(n)$.

2) Les endomorphismes du groupe additif **Z** sont des quasi-morphismes.
Si f est l'un d'eux, on a $f(m + n) = f(m) + f(n)$ pour tout couple (m, n).
On en déduit que $f(0) = 0$ et que f est impaire, puis que $f(n) = n.f(1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis $n \in \mathbf{Z}$.
En définitive, les morphismes de **Z** sont les applications $n \to an$, où $a \in \mathbf{Z}$.

3) Soit a un réel. La fonction $\phi_a : n \to [na]$ est un quasi-morphisme.
En effet, $\quad -1 = (m + n)a - 1 - ma - na \leq [(m + n)a] - [ma] - [na] \leq (m + n)a - ma - na + 2 = 2$. Etc.
Notons que $\phi_a = \phi_b \Leftrightarrow a = b$. Cela découle de ce que $\frac{1}{n}[na] \to a$ quand $n \to +\infty$.
On démontre de même que $n \to \lceil na \rceil$ et $n \to (na)$ sont des quasi-morphismes

Notons $\mathfrak{Q}$ l'ensemble des quasi-morphismes de **Z**, $\mathfrak{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de **Z**.

Proposition 1 : L'ensemble $\mathfrak{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathfrak{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.

Proposition 2 : L'ensemble $\mathfrak{Q}$ est stable par composition.

<u>Preuve</u> : Soient f et g deux quasi-morphismes. Ecrivons :

$$(f \circ g)(m + n) - (f \circ g)(m) - (f \circ g)(n)$$
$$= f(g(m + n)) - f(g(m) + g(n)) + f(g(m) + g(n)) - (f \circ g)(m) - (f \circ g)(n)$$

Et $f(g(m) + g(n)) - (f \circ g)(m) - (f \circ g)(n)$ prend un nombre fini de valeurs car f est élément de $\mathfrak{Q}$.
De plus, $f(g(m + n)) - f(g(m) + g(n))$ prend aussi un nombre fini de valeurs, en vertu du :

Lemme : Si f est un quasi-morphisme et si $(u, v) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ est tel que $u - v$ est bornée, alors $f(u) - f(v)$ est bornée.

En effet : $| f(u) - f(v) - f(v - u) | \leq C(f)$ implique $| f(u) - f(v) | \leq | f(v - u) | + C(f)$.
Comme $v - u$ prend un nombre fini de valeurs, $f(v - u)$ également.
Il suffit d'appliquer ce lemme au couple $(u, v) = (g(m + n), g(m) + g(n))$.

La loi o induite est associative, unifère d'unité $id_{\mathbf{Z}}$.

Elle est <u>toujours</u> distributive à gauche par rapport à l'addition en ce sens que $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, par définition de l'application $f + g$.
Mais elle n'est pas distributive à droite. On n'a pas en général $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.
C'est vrai si h est un morphisme, pas si h est un quasi-morphisme
Cependant, le fait que $h \in \mathfrak{Q}$ implique que : $h \circ (f + g) - (h \circ f + h \circ g)$ est élément de $\mathfrak{B}$.

Définition 2 : Deux quasi-morphismes f et g sont dits congrus modulo $\mathfrak{B}$ si : $f - g \in \mathfrak{B}$.

Exemple : si $a \neq b$, ϕ_a et ϕ_b ne sont pas congrus modulo $\mathfrak{B}$, car $\phi_a(n) - \phi_b(n) \sim n.(a - b)$ si $n \to \pm\infty$

Proposition 3 : Cette congruence est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{Q}$ compatible avec l'addition et la composition. L'ensemble quotient $\mathfrak{Q}/\mathfrak{B}$ est un groupe additif et même un anneau de neutre $\overline{id_Z}$.

Preuve : $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe additif de $\mathfrak{Q}$, donc la congruence est compatible avec l'addition.
Si $(f , g) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{Q}$ ou $(f , g) \in \mathfrak{Q} \times \mathfrak{B}$, alors $f \circ g \in \mathfrak{B}$. On en déduit que la congruence est compatible avec la multiplication. La loi quotient est associative et a pour neutre $\overline{id_Z}$.
Enfin, comme $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ et $h \circ (f + g) \equiv h \circ f + h \circ g$, la multiplication des classes sera distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition.

Remarque : nous démontrerons dans la suite que cet anneau est commutatif.

Proposition 4 : Si f est un quasi-morphisme :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \forall (n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k \quad | f(n_1 + \dots + n_k) - f(n_1) - \dots - f(n_k) | \leq (k - 1).C(f).}$$

Preuve : Cette formule est vraie pour $k = 1$ et 2. Si elle est vraie au rang k, elle est vraie au rang $k + 1$.
En effet $f(n_1 + \dots + n_k + n_{k+1}) - f(n_1) - \dots - f(n_k) - f(n_{k+1})$
$= f(n_1 + \dots + n_k + n_{k+1}) - f(n_1 + \dots + n_k) - f(n_{k+1}) + f(n_1 + \dots + n_k) - f(n_1) - \dots - f(n_k)$.
Donc $| f(n_1 + \dots + n_k + n_{k+1}) - f(n_1) - \dots - f(n_k) - f(n_{k+1}) | \leq C(f) + (k - 1).C(f) = k.C(f)$.

Proposition 5 : Soit f un quasi-morphisme. La suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$.

Preuve : Il découle de la prop. 4 que, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ $| f(mn) - m.f(n) | \leq (m - 1).C(f)$.
On en déduit : $\left| \frac{f(mn)}{mn} - \frac{f(n)}{n} \right| \leq \frac{m-1}{mn} C(f) \leq \frac{1}{n} C(f)$.
De même, $\left| \frac{f(mn)}{mn} - \frac{f(m)}{m} \right| \leq \frac{1}{m} C(f)$. Par conséquent : $\left| \frac{f(m)}{m} - \frac{f(n)}{n} \right| \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).C(f)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n_0 tel que $\frac{2}{n_0} C(f) \leq \varepsilon$. Alors $\left| \frac{f(m)}{m} - \frac{f(n)}{n} \right| \leq \varepsilon$ pour m et $n \geq n_0$. Cqfd.

Pour tout $f \in \mathfrak{Q}$, notons : $\boxed{L(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n}}$.
Observons que l'on a aussi : $L(f) = \lim_{n\to-\infty} \frac{f(n)}{n}$.
En effet, si $n \geq 1$ $| f(0) - f(n) - f(-n) | \leq C(f)$, donc $\left| \frac{f(0)}{n} - \frac{f(n)}{n} + \frac{f(-n)}{-n} \right| \leq \frac{C(f)}{n}$. Etc.
Au fond, un quasi-morphisme est quasi-impair, en ce sens que $f(n) + f(-n)$ est bornée.

Proposition 6 : L'application $L : \mathfrak{Q} \to \mathbf{R}$ est un morphisme surjectif d'anneaux, dont le noyau est $\mathfrak{B}$.
Tout quasi-morphisme f s'écrit de façon unique $f = \phi_a + g$, où a est réel et g est bornée.

Preuve :

1) Soit a un réel. Le quasi-morphisme $\phi_a : n \to [na]$ vérifie $L(f) = a$. Par conséquent, L est surjectif.
2) Le point important de la preuve est l'équivalence : $L(f) = 0 \iff f \in \mathfrak{B}$.

Si f est bornée, il est clair que $\frac{f(n)}{n} \to 0$. Réciproquement, supposons L(f) = 0.

Fixons $n \geq 1$. Pour tout $m \geq 1$: $\left|\frac{f(mn)}{mn} - \frac{f(n)}{n}\right| \leq \frac{m-1}{mn} C(f) \leq \frac{1}{n} C(f)$.

Faisons tendre m vers $+\infty$. Il vient $\left|\frac{f(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} C(f)$, c'est-à-dire $|f(n)| \leq C(f)$. cqfd !

3) Il est clair que $\frac{(f+g)(n)}{n} = \frac{f(n)}{n} + \frac{g(n)}{n}$; par conséquent L($f + g$) = L(f) + L(g).

4) Soit f un quasi-morphisme. Si f s'écrit $f = \phi_a + g$, où a est réel et g est bornée, alors L(f) = L(ϕ_a) = a. Réciproquement, si a = L(f) et $g = f - \phi_a$, alors L(g) = 0 donc g est bornée.

5) Si g est bornée. Alors $\frac{(fog)(n)}{n} = \frac{f(g(n))}{n} \to 0$, car $f(g(n))$ est bornée ; donc L(f o g) = L(f).L(g).

Si g est non bornée, écrivons $\frac{(fog)(n)}{n} = \frac{f(g(n))}{g(n)} \frac{g(n)}{n} \to$ L(f o g) = L(f).L(g).

Ceci est légitime car L(g) ≠ 0, donc $g(n) \sim L(g).n$ quand $n \to +\infty$.
En particulier g(n) ≠ 0 pour n assez grand.

Et, que g(n) tende vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\frac{f(g(n))}{g(n)} \to$ L(g) en vertu des deux expressions de L(f).

Corollaire : L'anneau quotient $\mathfrak{Q}/\mathfrak{B}$ est un corps commutatif isomorphe au corps des réels **R**.

Ces propriétés montrent un moyen de *définir,* de *construire* le corps **R** : il faudrait démontrer directement que l'anneau quotient $\mathfrak{Q}/\mathfrak{B}$ est un corps commutatif, et munir cet anneau d'une relation d'ordre total compatible, archimédien, etc.

4. Nombres surréels, réels non standard.

Les mathématiciens ont créé des surcorps ordonnés de la droite réelle. Ces corps n'ont rien à voir avec les corps des complexes et des quaternions, ni avec les algèbres d'octonions et de sédénions. Construits pour répondre à d'autres « cahiers des charges », ils ne sont pas archimédiens.

4.1. Les nombres surréels.

Le corps des nombres surréels contient le corps des nombres réels, ainsi que tous les ordinaux transfinis et leurs inverses, qui sont respectivement plus grands et plus petits que tout réel > 0. C'est un corps non archimédien dont la construction combine l'idée des coupures de Dedekind et la récurrence transfinie.
Ces nombres ont été introduits par John Conway et popularisés par Donald Knuth en 1974. On en trouvera un exposé dans *Les nombres* (Vuibert, 1999), H. Hermes, *Nombres et jeux,* chap. 13.

4.2. Réels non standard.

A Jean-Claude Deville,
émérite statisticien non-standard.

Les réels non standard ont été créés par Abraham Robinson en 1966. Le problème suivant en propose une construction par la technique des ultraproduits.

Problème

On se propose de construire un surcorps de **R**, ordonné et non archimédien, le corps des « réels non standard » (A. Robinson, 1966).

1) Soit I un ensemble. Un **ultrafiltre** sur I est un ensemble $\mathfrak{U}$ de parties de I vérifiant les axiomes :

(U1) $\varnothing \notin \mathfrak{U}$ (U2) $\forall (A, B) \in \mathfrak{U}\times\mathfrak{U}$ $A \cap B \in \mathfrak{U}$ (U3) $\forall A \in \mathcal{P}(I)$ $A \in \mathfrak{U}$ ou $I - A \in \mathfrak{U}$.

Montrer qu'alors (i) $\forall A \in \mathcal{U} \quad \forall B \in \mathcal{P}(I) \quad A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(I) \quad A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ ou $B \in \mathcal{U}$.

2) a) Soit i un élément fixé de I. Vérifier que $\mathcal{U}(i) = \{ A \in \mathcal{P}(I) \,;\, i \in A \}$ est un ultrafiltre sur I. Un tel ultrafiltre est dit **trivial**.

b) Montrer que si I est un ensemble fini, tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est trivial. (Considérer l'intersection de tous ses éléments).

Dans la suite de ce problème, I est un ensemble infini et l'on admet qu'il existe sur I un ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ (cette existence découle de l'axiome du choix).

On note $\mathcal{A} = \mathbf{R}^I$ l'anneau des familles $x = (x_i)_{i\in I}$ de réels indexées par l'ensemble I, muni des deux lois usuelles : $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et $(x_i)_{i\in I}.(y_i)_{i\in I} = (x_i.y_i)_{i\in I}$.

Enfin, pour tout $x = (x_i)_{i\in I}$, on note $N(x) = \{ i \in I \,;\, x_i = 0 \}$.

3) a) Montrer que $\mathfrak{I} = \{ x \in \mathcal{A} \,;\, N(x) \in \mathcal{U} \}$ est un idéal de $\mathcal{A}$, et que :

$$\forall x \in \mathcal{A} \quad x \notin \mathfrak{I} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{A} \quad x.y \equiv 1 \bmod \mathfrak{I}.$$

b) En déduire que l'anneau quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est un corps commutatif.

Ce corps est noté $^*\mathbf{R}$; on note $^*x$ la classe de x modulo $\mathfrak{I}$.

4) a) Montrer que la relation $x \leq y \Leftrightarrow \{ i \in I \,;\, x_i \leq y_i \} \in \mathcal{U}$ est réflexive et transitive dans $\mathcal{A}$.

b) Montrer que $[\, x \equiv x' \bmod \mathfrak{I} \,,\; y \equiv y' \bmod \mathfrak{I}$ et $x \leq y \,] \Rightarrow x' \leq y'$.

c) En déduire l'existence sur $^*\mathbf{R}$ d'une relation d'ordre, notée $^*x \leq {}^*y$.

d) Montrer que cet ordre est total, et compatible avec l'addition et la multiplication.

5) A tout réel $x \in \mathbf{R}$, on associe la classe modulo $\mathfrak{I}$ de la famille constante égale à x. Montrer qu'on définit ainsi un morphisme de corps de **R** dans $^*\mathbf{R}$, injectif et strictement croissant. On plonge **R** dans $^*\mathbf{R}$ au moyen de ce morphisme.

Dans la suite du problème, on suppose l'ensemble I dénombrable.

6) a) Montrer $\exists {}^*x_0 \in {}^*\mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}-\{0\} \quad 0 < {}^*x_0 < \frac{1}{n}$.

b) En déduire que $^*\mathbf{R}$ est non archimédien. La suite $(\frac{1}{n})$ a-t-elle une borne inférieure dans $^*\mathbf{R}$?

7) Un « réel non standard » $^*x \in {}^*\mathbf{R}$ est dit :

- **infinitésimal** si $\forall r \in \mathbf{R}^*_+ \quad |{}^*x| < r$
- **illimité** si $\forall n \in \mathbf{N} \quad n < |{}^*x|$
- **limité** si $\exists n \in \mathbf{N} \quad |{}^*x| \leq n$
- **appréciable** s'il est limité et non infinitésimal.

Enoncer et démontrer diverses propriétés de ces ensembles de réels non-standard.
Montrer que pour tout réel non standard limité $^*x$, il existe un unique réel standard $x \in \mathbf{R}$ tel que $^*x \approx x$, *i.e.* $^*x - x$ soit infinitésimal [Indication : si $^*x > 0$, considérer $A = \{ r \in \mathbf{R} \,;\, r < {}^*x \}$].

Ce réel s'appelle l'**ombre**, ou la partie standard, de $^*x$.

8) <u>Caractérisation non standard de la continuité</u>.

a) Soit f une fonction : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Construire un prolongement naturel $^*f : {}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$.

b) Montrer que f est continue en x_0 ssi $\forall \delta \in {}^*\mathbf{R} \quad \delta \approx 0 \Rightarrow {}^*f(x_0 + \delta) \approx f(x_0)$.

Bibliographie

G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau : Traité de mathématiques spéciales (Masson, 1967) [4]
R. Couty, J. Ezra : Analyse (Armand Colin, 1966)
L. Chambadal, J.-L. Ovaert : Cours de mathématiques (Gauthier-Villars, 1966)
B. Gostiaux : Cours de mathématiques, t. 2, chap V (puf 1993)
F. Diener, G. Reeb : Analyse non standard (Hermann, 1989)
H.-D. Ebbinghaus, K. Mainzer, etc. : Les nombres, chap. 2 et 13 (Vuibert, 1999)
J.-Y. Mérindol : Nombres et algèbres, chap. 11 (EDP, 2006)
J. Boniface : Les constructions des nombres réels (Ellipses, 2002)
H. Boualem et R. Brouzet : La planète **R** (Dunod, 2002)
Oral X PSI 2011, RMS n° 260
La Recherche, janvier 1989

---

[4] Dont la couverture orange vif m'a toujours paru d'un goût douteux…