MATHÉMATIQUES TEXTILES

LA GÉOMÉTRIE DES TISSUS D'ÉDOUARD LUCAS

Dans ce rapide exposé, je vais évoquer quelques personnalités de la deuxième moitié du XIXème siècle français. Elles ont pour caractéristique commune d'être soucieuses du lien entre science et industrie.

Parmi celles-ci, la plus notoire est Louis Pasteur qui, dès la fin du Second Empire, constate l'avance technologique et scientifique des États allemands et s'en inquiète. Cette inquiétude est amplifiée par la défaite française face à la Prusse en 1870-1871. Le malaise est alors profond dans les milieux scientifiques, où le retard de la France est souligné. Dans ce contexte, l'historien Claude Digeon a pu parler d'une crise allemande de la pensée française. L'argument du «retard» sera abondamment utilisé pour mettre en œuvre les réformes de la Troisième République.

Un mouvement venu de la société civile aussi bien que des élites intellectuelles se propose alors de favoriser en France l'«avancement» des sciences, défi positif et positiviste opposé au retard de notre pays. D'après l'anthropologue Bréau de Quatrefages «la lutte n'a pas lieu seulement sur les champs de bataille. Le domaine de l'intelligence, le terrain de la science ont aussi leurs batailles, leurs victoires, leurs lauriers. C'est là qu'il faut d'abord aller chercher la revanche!» (congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1872). La métaphore militaire est à l'honneur.

Après les déchirements de la fin de l'Empire, il s'agit d'abord de restaurer un consensus national autour des «bannières de la science militante» en valorisant une science socialement utile, en particulier auprès des milieux industriels. «La science est de l'argent!» proclame le chimiste Jean-Baptiste Dumas (congrès de l'AFAS, 1876). Il s'agit aussi de rendre accessibles les résultats scientifiques auprès d'un public élargissant le cercle académique.

Le mathématicien Édouard Lucas (1842-1891)

C'est au sein de ce mouvement d'idées que le mathématicien Édouard Lucas trouve sa voie. Issu d'une famille modeste d'Amiens - son père est tonnelier - il est admis aux deux grandes Écoles Polytechnique et Normale Supérieure. Son choix le porte vers l'ENS dont il sort agrégé de mathématiques et astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris.

Ces années d'études astronomiques sous la férule d'Urbain le Verrier, Lucas ne les apprécie guère et il trouve souvent refuge à Amiens. Dans sa région picarde, il se familiarise avec les problèmes du tissage, en particulier à travers les œuvres d'Édouard Gand. Ce dernier est à la recherche de procédures permettant d'élaborer en particulier des modèles de satins :

«Il serait utile [...] d'avoir des procédés rationnels, des formules faciles à retenir, qui permissent d'exécuter, sans hésitation ni perte de temps, la mise en carte du satin proposé. La plupart du temps, lorsque l'on a de semblables dispositions de satins à écrire, on procède par de longs tâtonnements » écrit Édouard Gand dans le *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens* de janvier 1867 (p. 62).

A cet appel répond en 1867 la première publication de Lucas : *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers* [Paris, Rétaux, 1867]. Cette publication est à l'origine de l'intérêt d'Édouard Lucas pour la «géométrie des tissus» (le terme «géométrie» est au XIXème siècle synonyme de mathématiques) et pour la théorie des nombres, dont il devient un spécialiste reconnu. Ses travaux sur la géométrie des tissus sont développés entre 1876 et 1878 aux congrès de l'AFAS, ainsi que dans la revue italienne l'*Ingegnere civile* en 1880.

La géométrie des satins

Lucas excelle dans l'art de faire surgir des mathématiques de situations ou d'objets concrets. Sa manière d'aborder la science, son souci de la populariser, de la diffuser auprès d'un public non spécialiste, est tout à fait originale et il est un des seuls mathématiciens de son temps à accorder de l'importance aux jeux ou aux «récréations» mathématiques.

La construction des satins réguliers (voir annexe 1) est particulièrement propice à l'utilisation de l'arithmétique. La structure de l'armure d'un satin de ce type peut être représentée sur un échiquier carré dont la dimension est le module de l'armure. Les points de liage (liens) sont disposés de manière régulière, de telle sorte que deux d'entre eux ne figurent pas dans la même rangée horizontale ou verticale et que leur distance comptée verticalement soit un multiple du nombre appelé décochement.

Lucas relie cette disposition des liens à un théorème d'arithmétique dû à Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du début du XIXème siècle. Si p désigne le module du satin, les liens se répartissent dans chaque colonne selon les multiples du décochement a. Lorsque ce multiple dépasse la dimension p de l'armure, on ne conserve que son reste dans la division par p. Le théorème de Gauss assure que, si les nombres p et a sont premiers entre eux, les restes ainsi obtenus sont tous différents et la disposition des liens respecte la condition imposée.

Ainsi par exemple pour p = 11, les indices de colonnes de l'échiquier sont

x	:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Les multiples correspondants du décochement a = 4 sont

4x	:	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Les indices de ligne des liens sont alors (restes des précédents dans la division par 11)

y	:	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7

Ces derniers représentent une *permutation* des nombres de 0 à 10. Le calcul mettant en jeu les restes (ici dans la division par 11) porte le nom de calcul *par congruence (modulo 11).*

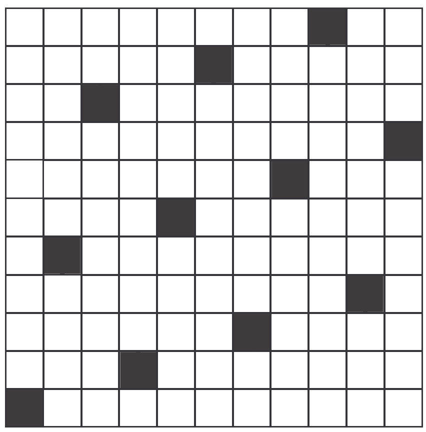


Figure 1 : Satin de module 11, décochement 4

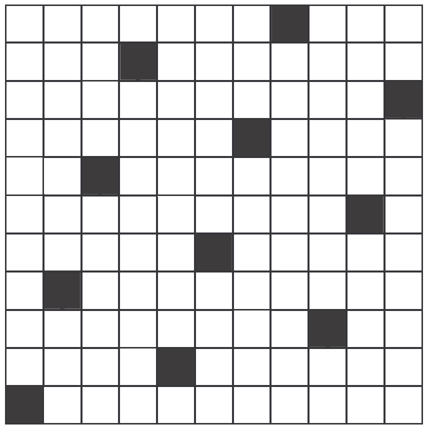


Figure 2 : Satin de module 11, décochement 3

Pour un module donné *p*, il y a donc autant de satins réguliers que de nombres *a* premiers avec *p* et inférieurs à *p*, calcul que tout arithméticien est capable d'effectuer ! (voir annexe 2)

Ainsi dix satins réguliers sont possibles sur un module 11, en classant les deux serges ($a = 1$ et $a = 10$) parmi les cas extrêmes de satins. Les huit autres structures se regroupent par quatre selon leurs propriétés de symétries. Les satins correspondant aux décochements 4, 7, 3, 8 forment un même groupe, correspondant à une même structure de tissu. Les armures de décochements 4 et 3 sont obtenues en échangeant les fils de chaîne et de trame, tandis que celles de décochements 4 et 7 sont symétriques par rapport à la direction horizontale.

Or, dans le calcul des congruences :

$$4 \text{ et } 7 \text{ sont opposés car } 4 + 7 \equiv 0 \text{ (mod. 11)}$$

tandis que

$$4 \text{ et } 3 \text{ sont inverses car } 4 \times 3 \equiv 1 \text{ (mod. 11).}$$

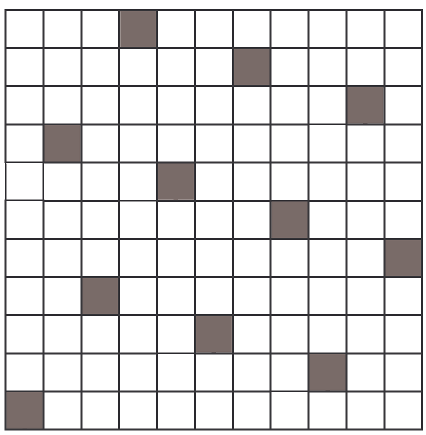


Figure 3 : Satin de module 11, décochement 7

Les dispositions des liens d'un satin de module 11 s'interprètent dans l'algèbre des «entiers modulo 11».

Les satins carrés

Édouard Gand vante, dans ses écrits de 1867, les satins carrés (voir annexe 3) «*que l'on doit de beaucoup préférer aux autres à cause de l'élégance de leur pointé qui s'écarte de toute tendance à la diagonale. On peut non seulement inscrire un carré entre quatre points voisins pris sur leur carte respective, mais on peut encore obtenir un autre carré parfait en reliant par des lignes obliques ces quatre mêmes points.*» [Gand, op. cit. 1867, p. 82].

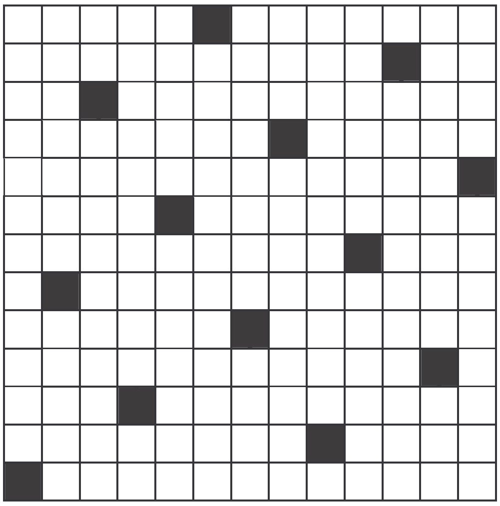


Figure 4 : Satin carré de module 13, décochement 5

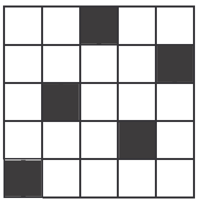


Figure 5 : Satin carré de module 5, décochement 2

Peut-on construire un satin carré sur un module donné *p* ? C'est encore par l'algèbre des congruences que Lucas répond à cette question. Lorsque le satin est carré, le groupe des quatre satins semblables se réduit à deux et le décochement *a* vérifie la congruence (voir annexe 3)

$$a^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. p})$$

Ainsi pour un module 5, le satin de décochement 2 est carré car

$$2^2 + 1 = 5 \text{ donc } 2^2 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 5).$$

De même pour un module 13, le satin de décochement 5 est carré car

$$5^2 + 1 = 26 \text{ donc } 5^2 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 13).$$

Pour un module 25, celui de décochement 7 l'est aussi car

$$7^2 + 1 = 50 \text{ donc } 7^2 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 25)$$

ainsi que, pour un module 26, celui de décochement 5 car

$$5^2 + 1 = 26 \text{ donc } 5^2 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 26).$$

Une «formule facile à retenir», selon le vœu d'Édouard Gand, se dégage : un module p permet un satin carré si l'équation $a^2 + 1 \equiv 0$ (mod. p) admet des solutions parmi les entiers inférieurs à p. Ces solutions sont les décochements des satins recherchés.

Les recherches empiriques d'Édouard Gand l'ont conduit à formuler la règle suivante : *le module d'un satin carré est toujours la somme de deux carrés*. Ainsi en est-il des exemples examinés : 5 = 4+1 ; 13 = 9+4 ; 25 = 16 + 9 ; 26 = 25+1.

Si le constat de Gand est de nature empirique, Lucas en donne une preuve géométrique à l'aide du théorème de Pythagore.

Dans le schéma d'armure d'un satin carré de module p, les carrés obtenus tel ABCH (figure 6) ont la même aire p. Leur côté admet donc pour longueur le nombre $\sqrt{p}$. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle dont l'hypoténuse est OH et les côtés sont parallèles aux axes permet d'écrire $p = x^2 + y^2$.

Le module d'un satin carré est la somme de deux carrés, selon la remarque de Gand.

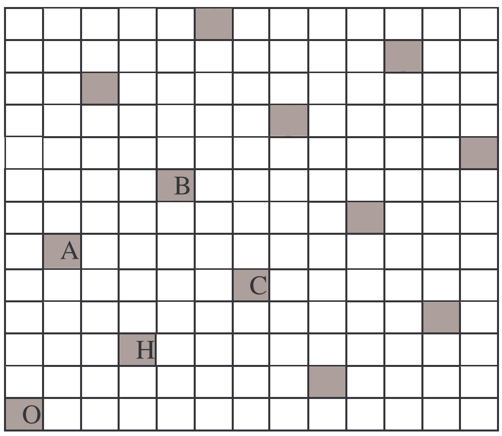


Figure 6

Édouard Gand montre comment, à partir de la structure des satins carrés, on peut construire des motifs décoratifs et donne d'harmonieux exemples de ces « petits dessins de fantaisie » (voir annexe 5).

Satins carrés de module premier

Édouard Lucas reprend [1867, op. cit., p. 80] à ce propos quelques règles empiriques de Gand : pour un module premier p (p >2), on ne peut avoir de satin carré si p est de la forme 4n+3 ; on a deux satins carrés si p est de la forme 4n+1.

Ainsi aucun satin carré n'est possible sur un module 11, alors que deux satins carrés peuvent être obtenus sur un module 13 (ils ont pour décochements 5 et 8).

Lucas fournit une démonstration très concrète de ces résultats. Cette dernière met en jeu la classification des satins en groupes de quatre, des serges en groupe de deux, et d'éventuels satins carrés en groupe de deux.

Le croisement des conditions précédentes conduit à un résultat surprenant, dont l'interprétation en terme d'arithmétique supérieure remonte au mathématicien toulousain Pierre de Fermat (1601-1665), contemporain de Blaise Pascal.

D'une part lorsque le module est un nombre premier de la forme 4n+1, il permet deux satins carrés ; d'autre part le module d'un satin carré est la somme de deux carrés. Le théorème de Fermat en résulte :

Tout nombre premier de la forme 4n+1 est la somme de deux carrés.

Ce résultat est énoncé pour la première fois en 1640 par Fermat dans une lettre à Marin Mersenne, et démontré par de nombreux mathématiciens (comme Gauss). Il faut souligner qu'Edouard Lucas en offre une preuve particulièrement originale dans sa géométrie des tissus.

Construction des satins carrés de module composé

Les satins carrés de module composé peuvent être construits dès que sont répertoriés ceux de module premier (voir annexe 4).

Ainsi le module $p = 65 = 5 \times 13$ permet quatre satins carrés dont les modules A sont de la forme $26a + 40b$, où a est une des solutions de $a^2 + 1 \equiv 0$ (mod. 5) et b une des solutions de $b^2 + 1 \equiv 0$ (mod. 13).

Les solutions $a = 2$ et $b = 5$ conduisent à $A_1 = 252$, donc $A_1 \equiv 57$ (mod. 65) ; tandis que $a' = 3$ et $b = 5$ conduisent à $A_2 = 278$, donc $A_2 \equiv 18$ (mod. 65). On obtient de la même façon $A_3 = 47$ et $A_4 = 8$.

Le module composé 65 permet quatre satins carrés de décochements 57, 8, 18, 47.

[La «formule simple» de Lucas peut s'expliquer par le calcul des inverses de 13 modulo 5, et de 5 modulo 13 ; en effet 26 = 2×13 $\equiv$ 1 (mod. 5) et 40 = 8×5 $\equiv$ 1 (mod. 13)].

Les satins symétriques

Ce sont les satins dont l'armure est invariante par échange des fils de chaîne et de trame (voir annexe 3). Ils font l'objet d'une étude analogue dans les travaux de Lucas et leur décochement est solution de

$$a^2 - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

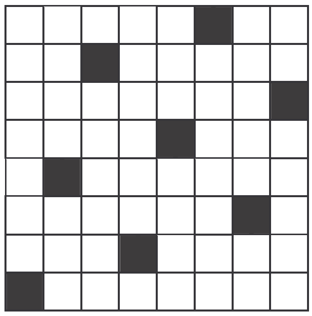


Figure 7 : Satin symétrique module 8, décochement 3

Lucas parvient ainsi à la classification de tous les satins dont le module est compris entre 5 et 95. Cette classification apparaît dans la brochure de 1867 déjà citée et est complétée dans l'*Ingegnere civile* de 1880.

En guise de conclusion

J'ai pu constater qu'un véritable intérêt se développe autour de la géométrie des tissus de Lucas. Ses interventions répétées sur ce thème aux congrès de l'AFAS (Association Française pour l'Avancement des Sciences) en sont la preuve. Dans le monde académique, on peut noter la réaction du chimiste Henri Sainte-Claire Deville. Ce dernier mentionne en 1871, dans une lettre au Ministre de l'Instruction publique, le calcul des tissus d'Édouard Lucas, qu'il juge «chose curieuse et utile». En 1904 après la mort de Lucas, le directeur de l'École des hautes études industrielles de Lille, E. Arnoult, se réfère encore aux travaux de Lucas et émet le souhait de lire son texte italien épuisé. Ce texte sera à nouveau publié en 1911, dans une traduction française.

Ces premières recherches ont une conséquence théorique d'importance. L'intérêt que Lucas manifeste pour les nombres, en particulier pour les nombres premiers, va en faire un spécialiste reconnu en ce domaine. Ses travaux connaissent de nos jours un regain d'intérêt et contribuent au développement d'une science très particulière et dont l'importance grandit : il s'agit de la cryptographie. Ainsi le défi des scientifiques des années 1870–1880, leur souci des applications industrielles en particulier dans le domaine du tissage, se sont-ils traduits par l'avancée d'une science très ancienne, la théorie des nombres, dans un domaine totalement inattendu : la cryptographie.

Annexes

Annexe 1 : Qu’est-ce qu’un satin régulier ?

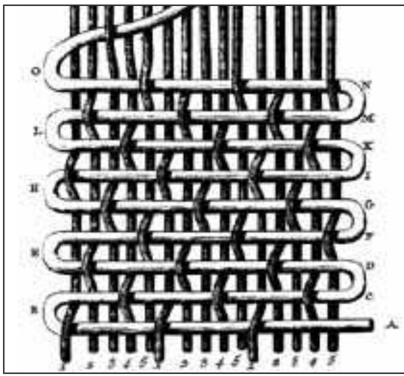
Annexe 2: Deux armures particulières
La toile
Le sergé

Annexe 3 : Les satins carrés, les satins symétriques

Annexe 4 : Les satins de module composé

Annexe 5 : Canevas construits sur des structures de satins carrés

Annexe 1 : Qu’est-ce qu’un satin régulier ?



Armure de Satin,
article "Satin" de l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert

Les tissus à texture rectiligne peuvent être représentés au moyen de dessins quadrillés, où les fils de *trame* sont représentés longitudinalement et les fils de *chaîne* transversalement. La *duite* est le nom donné aux passages de la trame à travers la chaîne. Le dessin des tissus réguliers se reproduit à l’identique par des translations parallèles aux axes figurant ces deux fils et il suffit de représenter le dessin de base sur un échiquier, en général carré, de taille minimale : ces dessins carrés portent le nom d’*armures* ; leur dimension *p* est le *module* de l'armure. Sur une armure sont figurés les *points de liage* correspondant aux points du tissu où s'opère la levée successive des fils de chaîne, à chaque insertion de duite.[1] L'échiquier carré associé à une armure comporte un certain nombre de cases ombrées correspondant aux points de liage, les fils de chaîne étant représentés par les colonnes, ceux de trame par les lignes de l'échiquier.

Le *satin régulier* constitue le tissu le plus riche du point de vue arithmétique. D'après Lucas, sa construction obéit aux conditions suivantes :

> « Le problème général de la construction de l'armure du satin régulier revient à placer dans les cases de l'échiquier carré de p^2 cases, p pions tels que deux d'entre eux ne se trouvent pas dans la même rangée horizontale ou verticale, et de telle sorte que, par rapport à un quelconque de ces pions (en supposant l'échiquier indéfiniment répété dans tous les sens), les autres pions soient toujours placés de la même façon. » [Lucas 1867, p. 3].

Pour faciliter la reproduction mécanique du dessin d'armure et en assurer l'esthétique, les points de liage doivent être ainsi régulièrement disposés selon des réseaux plans, invariants par les translations définies à partir de deux points quelconques du réseau. De plus l'armure du satin ne doit pas présenter de répétitions dans ses lignes ni dans ses colonnes.

[1] Dans ses articles de 1867, Edouard Gand détaille les quatre armures fondamentales à fils rectilignes que sont la toile (ou drap), le sergé, le batavia, et le satin.

Les conditions de réalisation d'un satin régulier se trouvent satisfaites par le choix d'un nombre *a* appelé le *décochement*, inférieur au *module p* et premier avec lui, qui permet la construction de deux suites :

- la suite des indices de colonne x = 0, 1, 2, 3, ... , k, ... , p-1.

- la suite des indices de ligne y = 0, a, 2a, 3a, ... , ka, ... , (p-1)a, ces derniers nombres étant calculés modulo *p*, donc dans Z_p.

Un théorème d'arithmétique [Gauss 1801, p. 10] garantit que les restes (mod. *p*) des nombres y ainsi obtenus constituent une permutation des nombres {0, 1, 2, ..., p-1}.

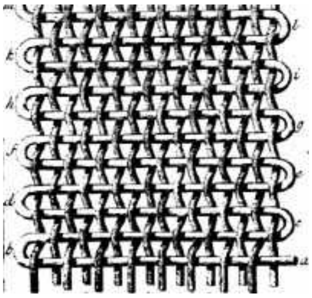
Les points de liage sont figurés à l'intérieur du carré construit sur les entiers modulo *p*, soit dans $Z_p x Z_p$, à l'intersection de la colonne x = k et de la ligne y = ka (mod. *p*). Ainsi la réalisation de l'armure du satin de module 11 et de décochement 4 conduit au schéma vu ci-dessus, où les points de liage sont ombrés. Le décochement 4 correspond à l'ordonnée du point de liage situé dans la colonne 1.

Les propriétés d'un satin dépendent de la disposition de ses points de liages. Un manuel de tissage décrit en ces termes les qualités des satins selon la longueur de *flottés* (fils lâches) séparant les liages :

> « L'armure satin donne un tissu plat, uni et brillant [...] En principe, plus un satin aura de flottés longs, plus il sera brillant, au détriment de la solidité du tissu, et, inversement, plus les liages seront rapprochés et les flottés courts, plus le satin sera mat et solide. » [Labriffe 1928, p. 340].

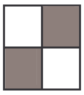
Annexe 2: Deux armures particulières

La toile

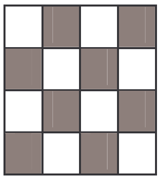


Armure de toile,
article "Satin" de l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert

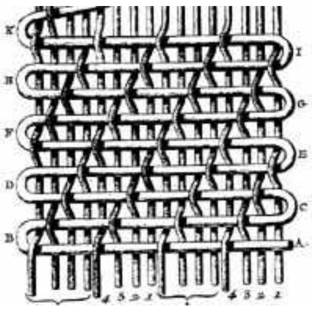
La *toile* (ou *drap*) est un satin régulier particulier de module $p = 2$ et de décochement $a = 1$, correspondant à l'armure :



Son dessin régulier est obtenu par translations parallèles aux axes :

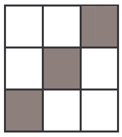


Le sergé

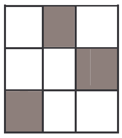


Armure de serge, article "Satin" de l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert

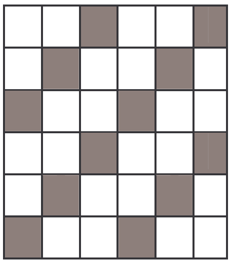
Le *sergé* constitue l'armure d'un satin régulier (la *serge*) de module p > 2 et de décochement $a = \pm 1$ (mod. p). L'armure du sergé à trois fils (p = 3, a = 1) est ainsi figurée par l'échiquier :

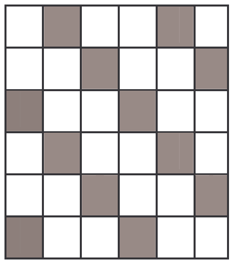


tandis que celle du sergé à trois fils (p = 3, a = 2) l'est par l'échiquier :



Les serges qui leur correspondent sont représentées par les dessins symétriques :





Annexe 3 : Les satins carrés, les satins symétriques

Le décochement *a* premier avec *p* admet dans Z_p un opposé -*a* et un inverse $a' = a^{-1}$.

Les quatre satins correspondant aux décochements *a*, - *a, a'* et -*a'* sont dits de même «groupe» ou de même structure et une même armure les représente, à une symétrie ou une rotation près.

Dans certains satins, le groupe ci-dessus comporte des éléments de représentation qui se confondent. Le cas où *a* se confond avec son opposé -*a* n'est réalisé que si *p* = 2 et *a* = 1, c'est-à-dire dans la toile.

Un satin est appelé *carré* lorsque l'inverse de *a* est confondu avec son opposé *a'*, ce qui conduit dans Z_p à l'équation

$$a^2 + 1 = 0$$

Ainsi le satin de module *p* = 5 et de décochement *a* = 2 est carré, de même que celui de module *p* = 13 et de décochement *a* = 5.

L'armure d'un satin carré comporte exactement *p* carrés identiques construits sur les points de liage (lorsqu'elles sont tronquées, les représentations de ces p carrés se complètent exactement sur le dessin de l'armure). L'armure ayant une aire égale à p^2, chaque carré a une aire égale à *p*.
Le satin est *symétrique* lorsque le décochement *a* se confond avec son inverse *a'* (mod. *p*), ce qui conduit dans Z_p à l'équation

$$a^2 - 1 = 0$$

Lorsque *p* est premier, Z_p est un corps; ce qui entraîne que les seuls satins symétriques de module premier correspondent à $a = \pm 1$: ce sont des sergés (ou la toile dans le cas d'un module 2).

Si l'on recherche des satins symétriques autres que sergés ou toile, il faut disposer d'une armure de module *p* non premier. Ainsi le satin de module *p* = 8 et décochement *a* = 3 est symétrique.

L'armure d'un satin symétrique est invariante par échange des fils de chaîne et de trame (invariance par symétrie par rapport à la diagonale principale du carré).

Annexe 4 : Les satins de module composé

Une construction des satins carrés de module composé d'au moins deux facteurs premiers figure dans [Lucas 1867, p. 13]. Elle repose sur un résultat de Gauss relatif aux congruences de module composé [Gauss 1801, §36, p. 18-19] dont l'origine serait très ancienne.

Le cas général se traitant de manière analogue, nous supposons que $p = p_1 p_2$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers de la forme *4q+1* (la méthode demeure exacte si l'un d'entre eux est le nombre 2). La recherche des solutions a, b, x, y des équations :

$$a^2 + 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p_1)$$

$$b^2 + 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p_2)$$

$$x \ p_2 \equiv 1 \ (\text{mod. } p_1)$$

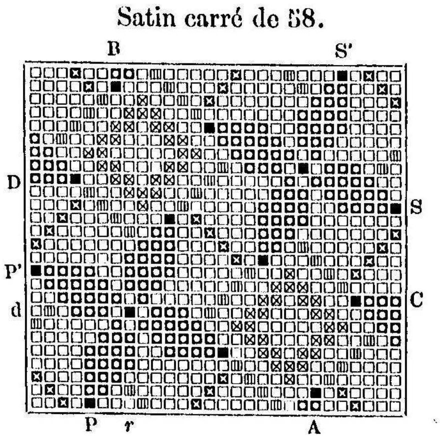
$$y \ p_1 \equiv 1 \ (\text{mod. } p_2)$$

permet le calcul du nombre $A = x \ p_2 a + y \ p_1 b$, qui vérifie $A^2 + 1 \equiv 0$ (mod. p_1) et $A^2 + 1 \equiv 0$ (mod. p_2). Les deux nombres p_1 et p_2 étant premiers entre eux, A est solution de l'équation $X^2 + 1 \equiv 0$ (mod. p).

Annexe 5 : Canevas construits sur des structures de satins carrés

Édouard Gand a développé une ingénieuse méthode de composition des motifs décoratifs (ou « armures-dessins ») à partir des structures de satins carrés. Cette méthode est exposée dans un article en deux parties du *Bulletin de la société industrielle d'Amiens* : Nouvelles méthodes de construction des satins réguliers, pairs et impairs. I : Théorie des nombres premiers appliquée au pointé de ces armures (p. 57-88, janvier 1867). II : Armures-tissus ; armures-dessins ; mosaïques (p. 257-300, juillet 1867).
Les propriétés de la disposition des points de liage (« marche identique dans les deux sens ») permettent de se limiter à une partie seulement de l'armure pour placer les points de liage et construire le motif décoratif. Il suffit ensuite de reproduire le dessin par translations. Voici comment il explique cette méthode à partir de l'exemple d'une armure de module 58 (voir figure ci-dessous) :

> « Cette marche identique dans les deux sens a cela de particulièrement avantageux qu'elle dispense le compositeur de poursuivre le pointé depuis le *premier* point jusqu'au *cinquante-huitième* pour avoir l'exacte position respective de tous les liages. Il peut conséquemment, pour commencer son opération, ne pas pointer tout le plan compris dans le rapport d'armure, et se contenter d'un fragment de l'échiquier dont la base est imposée par ce rapport.
>
> Ainsi, le plan qui suit (Fig. 57) n'est qu'une partie du plan général d'un satin de 58. Mais la quantité de points noirs ■ que nous avons pu […] y jeter très promptement, nous suffit pour commencer la composition de quelque armure-dessin.
>
> Nous venons de dire qu'en considérant un des points de liage comme centre d'un motif quelconque et en reproduisant le motif sur d'autres points pris à des distances ingénieusement choisies, on arrivait à des résultats souvent heureux comme dispositions rythmiques » [*opus* cité p. 282]



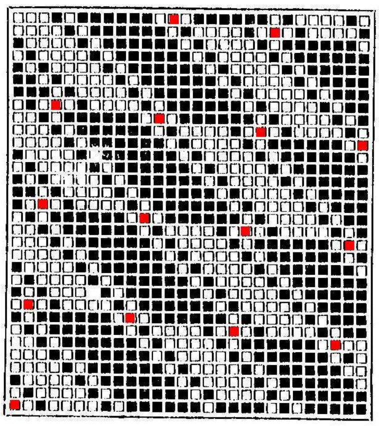
[Gand 1867, II, fig. 57]

Satin carré de module p = 58 (on a un extrait seulement de l'armure).
Le décochement s'obtient en comptant la distance qui sépare deux points noirs qui sont situés dans deux colonnes contiguës (ou deux lignes contiguës). Ici, on compte a = 17.

Remarque : les propriétés des satins carrés sont bien vérifiées.

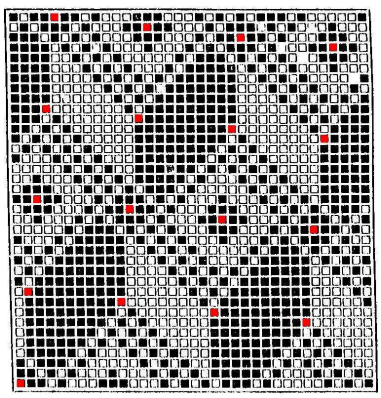
- $p = 58 = 9 + 49$ (somme de deux carrés)
- $a^2 + 1 = 290$, et $290 \equiv 0 \pmod{58}$

Édouard Gand propose dans son article une grande variété de canevas ou « armures-dessins » construits sur ce principe. En voici quelques exemples (pour plus de clarté, les points de liages sont représentés ici par des carrés rouges ■).



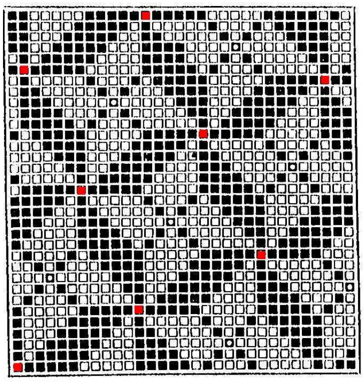
[Gand 1867, II, fig. 60]

$p = 65$
$a = 8$



[Gand 1867, II, fig. 61]

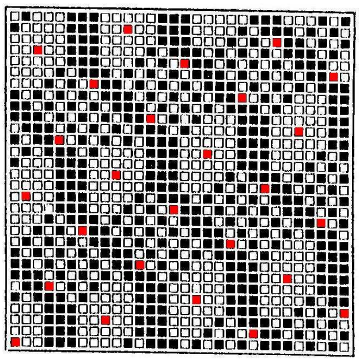
$p = 82$
$a = 9$



[Gand 1867, II, fig. 62]

$p = 73$

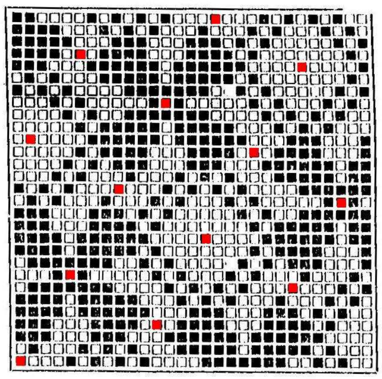
$a = 27$



[Gand 1867, II, fig. 63]

$p = 34$

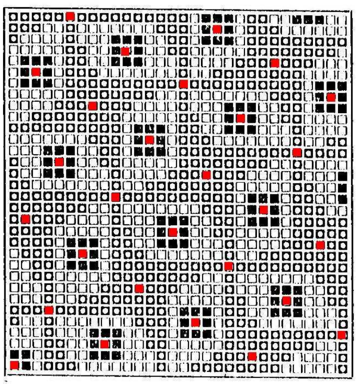
$a = 13$



[Gand 1867, II, fig. 65]

$p = 65$

$a = 18$



[Gand 1867, II, fig. 66]

$p = 34$

$a = 13$