DM13
Pour le mercredi 12/03

Des matrices carrées et polynômes.

Problème 1. Polynôme annulateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients complexes. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on définit l'évaluation de P en M par

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k, \text{ avec la convention } M^0 = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, si $P(X) = 2X^2 + 3X - 4$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) = 2A^2 + 3A - 4\mathrm{I}_n$.
Un polynôme P est appelé polynôme annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle).
On peut remarquer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, si P et Q sont deux polynômes, alors

$$(P+Q)(M) = P(M) + Q(M) \texttt{ et } (PQ)(M) = P(M) \times Q(M).$$

On rappelle donc que si P est un polynôme et M est une matrice, $P(M)$ est **une matrice**.

Partie I. Propriétés générales

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M, alors pour tout polynÔme Q, $Q \times P$ est un polynôme annulateur de M.

2. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) \neq 0$, alors M est inversible.

3. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur de la forme X^k, où $k \in \mathbb{N}$, alors M n'est pas inversible.

Partie II. Un exemple

On pose ici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

5. En déduire que A est inversible et donner l'expression des coefficients de son inverse.

6. Déterminer, pour n dans $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par P (on ne demande pas le quotient).

7. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.

Partie III. Matrice compagnon associée à un polynôme – théorème de Cayley-Hamilton

Si $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme **unitaire** (avec $(a_0, \dots, a_{n-1})$ des complexes), on définit la matrice compagnon associée à P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

8. Si P est un polynôme unitaire de degré n $\mathbb{C}[X]$, si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités, exprimer $\mathrm{Tr}(C_P)$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ et $m_1, \dots, m_r$.

9. **Dans cette question seulement**, $P(X) = X^3 - X^2 + X - 2$.

(i) Donner l'expression de $A = C_P$.

(ii) Calculer A^2, A^3 et vérifier que $P(A) = 0$.

Le but de la suite de la partie est de généraliser ce résultat, qui est un cas particulier du **théorème de Cayley-Hamilton** : pour tout polynôme P unitaire, $P(C_P) = 0$.

Soit P un polynôme unitaire, $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On pose $A = C_P$.

On définit pour k dans $[\![1, n]\!]$ le vecteur colonne à n lignes e_k comme $e_k = (\delta_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans cette partie, on ne demande pas nécessairement un passage par l'écriture formelle des coefficients d'un produit : un calcul matriciel direct, s'il est mené explicitement et clairement, peut être bien plus parlant.

10. Donner la valeur de Ae_1, puis de $A^k e_1$ pour tout k dans $[\![0, n]\!]$.

11. Démontrer que $P(A)e_1 = 0$ (vecteur nul), i.e. que $\left(A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right) e_1 = 0$.

12. En déduire que pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, $P(A)e_j = 0$.

13. Conclure que $P(A) \times \mathrm{I}_n = 0$ puis que $P(A) = 0$.

Partie IV. Idéal annulateur d'une matrice

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Ann}(A)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A :

$$\mathrm{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) = 0\}.$$

On donne ensuite la définition d'un **idéal** de $\mathbb{C}[X]$. Une partie $\mathscr{I}$ de $\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ si :

- $\mathscr{I}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$.

- pour tout P dans $\mathscr{I}$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$, $Q \times P \in \mathscr{I}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ann}(A)$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Afin de mieux comprendre la stucture des polynômes annulateurs d'une matrice, on va pour terminer ce problème déterminer la structure des idéaux de $\mathbb{C}[X]$. On va montrer le résultat suivant :

Les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ sont les $P.\mathbb{C}[X] = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ P|Q\}$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

15. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P.\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Soit maintenant $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathbb{C}[X]$, que l'on va supposer non réduit à 0 (s'il est réduit à 0, $\mathscr{I} = 0.\mathbb{C}[X]$).

16. Montrer que $\mathscr{I}$ admet un polynôme non nul de degré minimal, P_0, et que $\mathscr{I} = P_0.\mathbb{C}[X]$.

17. Montrer alors que pour toute matrice A, il existe un unique polynôme **unitaire** π_A tel que $\mathrm{Ann}(A) = \pi_A.\mathbb{C}[X]$.

On appelle ce polynôme le polynôme minimal de A.

18. Si A est une matrice compagnon, montrer que π_A n'est pas le polynôme nul.

19. Si A est une matrice niplotente, montrer qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\pi_A(X) = X^k$.