

THÈMES

1. Matrices et systèmes linéaires

- a) *Opérations sur les matrices* : (i) Définitions : matrice, taille/format, coefficient, ligne, colonne, diagonale et représentation ; vecteur ligne/colonne. (ii) Addition, multiplication par un scalaire : matrice somme, produit par un scalaire, matrice nulle et propriétés opératoires ; symbole de Kronecker et matrices élémentaires (de la base canonique). (iii) Produit matriciel : matrice produit, matrice identité et propriétés opératoires ; multiplication par les matrices élémentaires de la base canonique ; égalité de deux matrices et multiplication par des vecteurs lignes et/ou colonnes ; lignes et colonnes d'une matrice produit ; (*la maîtrise d'aucun autre produit par blocs n'est exigible*). (iv) Transposition : propriétés opératoires. (v) Opérations (inversibles) élémentaires sur les lignes, sur les colonnes : matrice d'opération (inversible) élémentaire : échange, transvection, dilatation ; opération (inversible) élémentaire sur les lignes (resp. sur les colonnes) et multiplication par la gauche (resp. par la droite) par une certaine matrice d'opération (inversible) élémentaire
- b) *Systèmes linéaires* : (i) Écriture matricielle d'un système linéaire : passage du système à l'égalité matricielle et inversement. (ii) Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible : « une solution particulière plus les solutions du système linéaire homogène associé ». (iii) **Opérations élémentaires et méthode du pivot** (*aucune compétence technique n'est exigible*) : échelonnement d'une matrice en lignes ou en colonnes et résolution d'un système linéaire ; matrice non carrée et relation entre les lignes ou les colonnes.
- c) *Matrices carrées* : (i) Formes particulières : scalaire, diagonale, triangulaire, symétrique, antisymétrique ; partie symétrique et partie antisymétrique. (ii) **Structure d'anneau non commutatif à diviseurs de zéro** (ordre supérieur à 2) : matrice nilpotente ; différence de puissances d'un même ordre et puissance d'une somme pour deux matrices qui commutent l'une à l'autre ; sous-anneaux des matrices triangulaires supérieures/inférieures. (iii) Matrices carrées inversibles : groupe linéaire : matrices inversibles élémentaires ; inversion d'une matrice carrée d'ordre 2 ; propriétés opératoires de l'inversion ; **inversion par résolution d'un système ; inversion par opérations (inversibles) élémentaires**. (iv) Inversibilité d'une matrice triangulaire. (v) *Trace d'une matrice carrée : linéarité de la trace, trace d'un produit et pseudo-commutativité, trace de $A^T B$ pour A, B de même taille et cas où $A = B$.*

2. Polynômes formels et fractions rationnelles

- a) *Anneau des polynômes à une indéterminée* : (i) Définitions et structures : polynôme formel à coefficients dans \mathbb{K} et notation symbolique à l'aide d'une variable indéterminée ; égalité de deux polynômes formels **par définition** ; somme, produit par un scalaire et produit polynomial ; polynôme constant et inclusion de \mathbb{K} dans $\mathbb{K}[X]$; **structures d'anneau et propriétés de la multiplication par tout scalaire** (structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} , *structure d'algèbre hors programme*). (ii) Degré d'un polynôme formel : degré ; coefficient dominant d'un polynôme non nul ; polynôme unitaire ; degré d'une somme, d'un produit, d'un produit par un scalaire ; coefficient dominant d'un produit de polynômes tous non nuls ; notation $\mathbb{K}_n[X]$; **L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre** ; Éléments inversibles (unités) de l'anneau. (iii) Évaluation, composition et substitution : **évaluation d'un polynôme en un point et propriétés opératoires** ; composée d'un couple de polynôme ou évaluation d'un polynôme en un polynôme ; substitution d'une matrice carrée à l'indéterminée ou évaluation d'un polynôme en une matrice carrée.
- b) *Divisibilité et division euclidienne* (et analogies avec \mathbb{Z}) : (i) Définitions : divisibilité, diviseur, multiple ; propriétés de la divisibilité : rapport au degrés, stabilité, simplification ; couple de polynômes associés et rapport à la divisibilité. (ii) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$: **théorème de la division euclidienne et algorithme** ; sous-groupes additifs stables par la multiplication par tout polynôme (*HP de 1ère année*) ; divisibilité par un polynôme non nul et reste.

- c) *Fonctions polynomiales et racines* : (i) Fonction polynomiale : fonction polynomiale associée à un polynôme formel ; fonction polynomiale d'une partie de \mathbb{K} dans \mathbb{K} ; méthode de Hörner pour l'évaluation polynomiale ; **division euclidienne par** $(X - \omega)$. (ii) Racine / zéro d'un polynôme formel : caractérisation en termes de divisibilité ; **racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines distinctes ; détermination d'un polynôme formel par sa fonction polynomiale. (iii) (Ordre de) multiplicité d'une racine : ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple ; caractérisation en termes de factorisation et d'évaluation ; **multiplicités de racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines comptées avec leurs multiplicités.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Produit de deux matrices triangulaires supérieures.
2. Caractérisation de l'inversibilité par résolution d'un système linéaire.
3. Toute matrice carrée inversible est produit de matrices (inversibles) d'opérations élémentaires.
4. Inversibilité d'une matrice triangulaire.
5. Pseudo-commutativité de la trace.
6. Degré d'un polynôme produit.
7. Théorème de la division euclidienne.
8. Caractérisation de la multiplicité en termes de factorisation et d'évaluation.
9. Multiplicités de racines distinctes et factorisation.