Thèmes

1. Polynômes formels et fractions rationnelles

a) *Anneau des polynômes à une indéterminée* : **(i)** Définitions et structures : polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{K}$ et notation symbolique à l'aide d'une variable indéterminée ; égalité de deux polynômes formels **par définition** ; somme, produit par un scalaire et produit polynomial ; polynôme constant et inclusion de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}[X]$; **structures d'anneau et propriétés de la multiplication par tout scalaire** (structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, *structure d'algèbre hors programme*). **(ii)** Degré d'un polynôme formel : degré ; coefficient dominant d'un polynôme non nul ; polynôme unitaire ; degré d'une somme, d'un produit, d'un produit par un scalaire ; coefficient dominant d'un produit de polynômes tous non nuls ; notation $\mathbb{K}_n[X]$; **L'anneau** $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ **est intègre** ; Éléments inversibles (unités) de l'anneau. **(iii)** Évaluation, composition et substitution : **évaluation d'un polynôme en un point et propriétés opératoires** ; composée d'un couple de polynôme ou évaluation d'un polynôme en un polynôme ; substitution d'un matrice carrée à l'indéterminée ou évaluation d'un polynôme en une matrice carrée.

b) *Divisibilité et division euclidienne* (et analogies avec $\mathbb{Z}$) : **(i)** Définitions : divisibilité, diviseur, multiple ; propriétés de la divisibilité : rapport au degrés, stabilité, simplification ; couple de polynômes associés et rapport à la divisibilité. **(ii)** Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$: **théorème de la division euclidienne et algorithme** ; sous–groupes additifs stables par la multiplication par tout polynôme (*HP de 1ère année*) ; divisibilité par un polynôme non nul et reste ; reste et quotient de la division euclidienne **dans un sur-corps** (cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seulement).

c) *Fonctions polynomiales et racines* : **(i)** Fonction polynomiale : fonction polynomiale associée à un polynôme formel ; fonction polynomiale d'une partie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$; méthode de Hörner pour l'évaluation polynomiale ; **division euclidienne par** $(X - \omega)$. **(ii)** Racine / zéro d'un polynôme formel : caractérisation en termes de divisibilité ; **racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines distinctes ; détermination d'un polynôme formel par sa fonction polynomiale. **(iii)** (Ordre de) multiplicité d'une racine : ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple ; caractérisation en termes de factorisation et d'évaluation ; **multiplicités de racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines comptées avec leurs multiplicités. **(iv)** Relations entre coefficients et racines (Formules de Viète) : polynôme scindé (constant ou non) ; fonctions symétriques élémentaires en les racines (*formules de Viète pour la somme et le produit des racines à retenir, les autres à retrouver.*

d) *Dérivation formelle d'un polynôme* : **(i)** Polynôme dérivé : degré du polynôme dérivé ; dérivé d'une combinaison linéaire (linéarité) ; division par $(X-\omega)^2$; lien entre les fonctions polynomiales associées à A et à A' ; caractérisation d'un racine multiple ; dérivé d'un produit. **(ii)** Dérivée d'ordre quelconque : degrés des dérivés successives ; dérivés d'une combinaison linéaire (linéarité) ; **formule de Taylor polynomiale** ; division par $(X - \omega)^m$; d'un produit (formule de Leibniz). **(iii)** Détermination de la multiplicité par les dérivées : multiplicité dans A ; multiplicité dans A' ; multiplicité du conjugué d'un nombre complexe dans un polynôme réel.

e) *Arithmétique dans* $\mathbb{K}[X]$: **(i)** Communs diviseurs : PGCD's de deux polynômes non tous les deux nuls ; lemme de préservation des communs diviseurs ; algorithme d'Euclide et unicité du PGCD unitaire noté $A \wedge B$; algorithme d'Euclide étendu et relation de Bézout ; PGCD unitaire **dans un sur-corps** (cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seulement) ; les communs diviseurs de A et B sont les diviseurs de $A \wedge B$. **(ii)** Couple de polynômes premiers entre eux : théorème de Bézout ; PGCD unitaire et factorisation ; produit de deux polynômes premiers à un troisième. **(iii)** Communs multiples : PPCM's de deux polynômes tous les deux non nuls ; unicité du PPCM unitaire noté $A \vee B$; les communs multiples de A et B sont les multiples de $A \vee B$; lemme de Gauss (divisibilité d'un produit) ; divisibilité par un produit ; lien entre PGCD unitaire et PPCM unitaire ; PPCM unitaire et factorisation. **(iv)** Polynômes irréductibles unitaires polynôme non constant et existence d'un facteur irréductible ; divisibilité entre irréductibles unitaires ; lemme d'Euclide (divisibilité d'un produit par un irréductible unitaire) ; théorème de décomposition en facteurs irréductibles

***f*)** *Polynômes irréductibles sur* $\mathbb{C}$ *et sur* $\mathbb{R}$: **(i)** **Théorème fondamental de l'algèbre** : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine dans le plan complexe (d'Alembert-Gauss, *non démontré*) ; Irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$. **(ii)** Théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$: tout polynôme complexe non nul est scindé ; divisibilité et racines ; primalité relative et racine commune ; factorisation sur $\mathbb{C}$ de $X^n - 1$. **(iii)** Théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$: tout polynôme complexe non nul est scindé ; divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$; primalité relatives dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$.

***g*)** *Interpolation polynomiale* : **(i)** (*HP : non exigible*) Base de Newton associée à une n-liste d'éléments distincts. **(ii)** Base de Lagrange associé à une n-liste d'éléments distincts : formule d'interpolation de Lagrange. **(iii)** Ensemble des polynômes interpolateurs associés aux points **distincts** $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et aux valeurs $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Unicité du polynôme interpolateur de degré strictement inférieur à n.

Exemples de questions de cours

1. Théorème de la division euclidienne.

2. Caractérisation de la multiplicité en termes de factorisation et d'évaluation.

3. Multiplicités de racines distinctes et factorisation.

4. Formule de dérivation d'un produit.

5. Formule de Taylor polynomiale.

6. Détermination par les dérivées de la multiplicité dans un polynôme.

7. Relation de Bézout par l'algortime d'Euclide étendu.

8. Enumération des racines complexes de $X^n - 1$ et factorisation, somme et produit de ces racines ($n \in \mathbb{N}^*$) par les formules de Viète.