TD 16
Polynômes et fractions rationnelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Sur les racines de polynômes réels.* Soir P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. On suppose P scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.

Soit n le degré de P, $a_1, \ldots, a_n$ ses racines simples. Alors, pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$, P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$, $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de b_i dans $]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. On a donc trouvé $n-1$ racines **distinctes** de P'. Or, P' est de degré $n-1$: on a donc trouvé toutes les racines de P', et P' est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P^2+1 est à scindé à racines simples **sur** $\mathbb{C}$.

Soit n le degré de P. On calcule $(P^2+1)' = 2PP'$. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, P' aussi et P et P' n'ont pas de racines en commun, donc $2PP'$ a $n+n-1 = 2n-1$ racines. Donc $(P^2+1)'$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Or, P^2+1 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc n'a aucune racine réelle. Donc P^2+1 et $(P^2+1)'$ n'ont pas de racine en commun. Donc P^2+1 est à racines simples (et donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$).

3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ (pas nécessairement à racines simples), P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit n le degré de P, soient $a_1, \ldots, a_r$ les racines de P, $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités. On sait que P a n racines comptées avec multiplicités, i.e. que $m_1 + \cdots + m_r = n$.

- En appliquant le théorème de Rolle entre a_i et a_{i+1}, pour tout i dans $[\![1, r-1]\!]$, on obtient $r-1$ racines de P', toutes distinctes de $a_1, \ldots, a_r$.
- Ensuite, soit i dans $[\![1, r]\!]$. Comme a_i est racine de multiplicité m_i de P, a_i est racine de multiplicité $m_i - 1$ de P' (éventuellement nulle). D'où, en les comptant avec multiplicités, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}(m_i-1)$ racines comptées avec multiplicité, i.e. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{r} m_i\right) - r = n - r$ racines comptées avec multiplicité.

Au final, on obtient $n - r + r - 1 = n - 1$ racines réelles comptées avec multiplicité pour P', qui est de degré $n-1$: toutes les racines de P' sont donc réelles, donc P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ et a, b deux complexes.

1. Déteminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. On distinguera les cas $a=b$ et $a \neq b$.

Distinguons les cas :

- si $a=b$, le reste est $P(a)+(X-a)P'(a)$.
- si $a \neq b$, on écrit le reste comme $\alpha X+\beta$, et on a $P(a)=\alpha a+\beta$, $P(b)=\alpha b+\beta$, donc $\alpha = \dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}$ et $\beta = \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

2. En déduire le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n$ par X^2+1.

Ici, on remarque que si $P(X)=(\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n$, $a=i$ et $b=-i$, on est dans la situation de la question précédente. On a alors $P(a)=\mathrm{e}^{in\theta}$ et $P(b)=\mathrm{e}^{-in\theta}$. Donc le reste est $\alpha X+\beta$, avec

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^{in\theta}-\mathrm{e}^{-in\theta}}{i-(-i)} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta}-\mathrm{e}^{-in\theta}}{2i} = \sin(n\theta),$$

et

$$\beta = \frac{i\mathrm{e}^{in\theta}-(-i)\mathrm{e}^{-in\theta}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta}+\mathrm{e}^{-in\theta}}{2} = \cos(n\theta),$$

donc le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n$ par X^2+1 est $\sin(n\theta)X+\cos(n\theta)$.

Exercice 3.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)=n^2$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

CS. Supposons que $P=X^2$. Alors P est solution du problème.

CN. Supposons que P est solution. Alors le polynôme $P-X^2$ admet tous les éléments de $\mathbb{N}$ comme racines. Cet ensemble étant infini, $P-X^2$ est le polynôme nul.

CNS. L'ensemble des solutions est constitué du seul polynôme X^2.

2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

CN. Supposons que P est solution. Alors le polynôme $P - X^2 - 1$ admet tous les éléments de $2\mathbb{N}$ comme racines. Cet ensemble étant infini, $P - X^2 - 1$ est le polynôme nul. Ainsi, $P = X^2 + 1$, puis en évaluant en 1, on trouve $2 = 1^2 + (-1)^1$; i.e. $2 = 0$. Absurde ! Donc on a supposé faux : P n'est pas solution.

CNS. L'ensemble des solutions est vide.

Exercice 4. ●●○ Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. On pose $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.

1. Que vaut P si (x, y, z) est solution de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

A l'aide des relations coefficients racines et du développement du carré d'une somme, on trouve que dans ce cas $\boxed{P = X^3 - X^2 - 10X + 10}$.

---

2. En déduire l'ensemble des triplets (x, y, z) satisfaisant le système précédent.

On a : $X^3 - X^2 - 10X + 10 = (X - (-\sqrt{10}))(X - 1)(X - \sqrt{10})$.

Réponse. L'ensemble des 6 ($3 \times 2 = 6$) permutations du triplet $(-\sqrt{10}; 1; \sqrt{10})$.

Exercice 5. *Polynômes de Tchebycheff*. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer un polynôme T à coefficients réels de vérifiant la propriété $(*)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \qquad (*)$$

Pour tout complexe z, on a $2\mathfrak{Re}(z) = z + \overline{z}$. Pour tout réel θ, on a $2\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$; et $(\sin\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2$. D'où, le polynôme suivant convient :

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2 - 1)^k.$$

2. Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique. On le note T_n.

Comme l'ensemble $\{\cos\theta \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$ est infini, et que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une infinité de racines est nul, le résultat suit. QED.

3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n.

Degré égal à n et coefficient dominant égal à 1 si $n = 0$, 2^{n-1} sinon. QED.

4. Montrer que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - Tn$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
D'après la formule de l'arc-moitié (je cite les **CMCR**), pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(d)\cos(m)$ où $m = (a+b)/2$ et $d = (a-b)/2$; appliquée à $(a, b) = ((n+2)\theta, n\theta)$, on trouve que $T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) = 2(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta)$. Comme plus haut, le résultat suit. QED.

5. Calculer T_0 ,T_1 ,T_2 ,T_3.

On a : $T_0 = 1$, $T_1 = 1$; puis à l'aide de la relation de récurrence d'ordre 2, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$. QED.

6. On suppose $n \neq 0$. Montrer que $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\theta_k))$, où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

On vérifie que les $\cos(\theta_k)$ sont n racines distinctes de T_n, polynôme de degré égal à n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}. QED.

Exercice 6. ●○○ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Supposons que $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$. Alors $P(X^n) = (X - 1)Q$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$. Donc, par évaluation en 1, $P(1) = 0$. Donc $P(X) = (X - 1)Q_1$, où $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$. Donc, par composition, X^n, $P(X^n) = (X^n - 1)Q_1(X^n) = (X^n - 1)Q_2$, où $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$. QED.

Exercice 7. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $C \in \mathbb{K}[X]$, déterminer tous les couples (U, V) tels que $AU + BV = C$.

On a l'homomorphisme de groupe :

$$\Phi : (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], +) \to (\mathbb{K}[X], +), \ (U, V) \mapsto AU + BV.$$

Soit $(U, V) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

Cas 1 : $(A, B) = (0, 0)$.
Cas 1.1 : $C \neq 0$.
Alors $AU + BV \neq C$.

Cas 1.2 : $C = 0$.
Alors $AU + BV = C$.

Cas 2 : $(A, B) \neq (0, 0)$.
Cas 2.1 : $A \wedge B \nmid C$.
Si $AU + BV = C$ alors $A \wedge B | C$. Donc $AU + BV \neq C$.

Cas 2.2 : $A \wedge B | C$.
Soient A_0, B_0, C_0 les quotients de la division euclidienne par $A \wedge B$ de A, B, C respectivement. Alors $AU + BV = C$ équivaut à $A_0U + B_0V = C_0$.
Or $A_0 \wedge B_0 = 1$. Donc, d'après le théorème de Gauss,

$$\ker(\Phi) = \{(-QB_0, QA_0) \ : \ Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Et l'algorithme d'Euclide étendu donne un couple de coefficients de Bézout (U_0, V_0) associé à (A, B)...

En somme, l'ensemble des solutions est

- $\emptyset$; si $\Big((A, B) = (0, 0)$ ET $C \neq 0 \Big)$ OU $\Big((A, B) \neq (0, 0)$ ET $A \wedge B \nmid C \Big)$.
- $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$; si $(A, B) = (0, 0)$ ET $C = 0$.
- $\{(U_1 - QB_0, V_1 + QA_0) \ : \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$, où (U_1, V_1) est une solution particulière ; si $(A, B) \neq (0, 0)$ ET $A \wedge B | C$.

2. Si A et B sont premiers entre eux montrer qu'il existe un unique couple U, V tels que $AU + BV = 1$, $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

Exercice 8. *Variations autour de $X^n - 1$.*

1. Montrer que si b divise a, alors $X^b - 1$ divise $X^a - 1$.

Écrivons $a = bq$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors

$$X^a - 1 = X^{bq} - 1 = (X^b)^q - 1^q = (X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \cdots + 1).$$

---

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ (en supposant $b \leqslant a$), en fonction du quotient q et du reste r de la division euclidienne de a par b.

On écrit $a = bq + r$. Alors

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= X^{bq+r} - X^r + X^r - 1 \\ &= X^r(X^{bq} - 1) + X^r - 1 \\ &= X^r(X^{bq} - 1^q) + X^r - 1 \\ &= X^r(X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \cdots + 1) + X^r - 1, \end{aligned}$$

donc le quotient de la division est $X^r(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)}$ et le reste est $X^r - 1$.

---

3. En déduire que $(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = X^{a \wedge b} - 1$.

Appliquons l'algorithme d'Euclide à $X^a - 1$ et $X^b - 1$. Soit (r_n) la suite des restes de l'algorithme d'Euclide appliqué à a et b, avec $r_0 = a$, $r_1 = b$ et r_{n+2} le reste de la division euclidienne de r_n par r_{n+1}. Soit (P_n) la suite des restes de l'algorithme d'Euclide appliqué à $(X^a - 1)$ et $(X^b - 1)$, avec $P_0 = (X^a - 1)$, $P_1 = (X^b - 1)$ et P_{n+2} le reste de la division euclidienne de P_n par P_{n+1}. On peut démontrer, par récurrence, que pour tout n, $P_n = X^{r_n} - 1$, par récurrence double.
L'initialisation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, par hypothèse.
Ensuite, si la proposition est vraie aux n et $n+1$, on écrit $P_n = X^{r_n} - 1$ et $P_{n+1} = X^{r_{n+1}} - 1$. Alors P_{n+2} est le reste de la division euclidienne de P_n par P_{n+1}, donc c'est, par la question précédente $X^{r_{n+2}} - 1$ car r_{n+2} est le reste de la division euclidienne de r_n par r_{n+1}. D'où l'hérédité, et le résultat.

On déduit donc, en appliquant l'algorithme d'Euclide, que si n_0 est le rang tel que $r_{n_0} = a \wedge b$, alors $r_{n_0+1} = 0$ et donc $P_{n_0} = X^{a \wedge b} - 1$ et $P_{n_0+1} = X^0 - 1 = 0$, donc $P_{n_0} = (X^a - 1) \wedge (X^b - 1)$.

Exercice 9. ●○○ Soient $n \geqslant 2, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Notons $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$; où X est une variable indéterminée. D'après la formule d'interpolation de Lagrange, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, si le degré de P est strictement inférieur à n alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) L_i = P.$$

D'où : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i = X$.

Exercice 10. *Quelques calculs.*

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$

On cherche aussi la partie entière de cette fraction rationnelle.

$$2X^3 + X^2 - X + 1 = (2X + 7)(X^2 - 3X + 2) + 16X - 13,$$

donc

$$\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2} = 2X + 7 + \frac{16X - 13}{X^2 - 3X + 2}.$$

Ensuite, $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{16X - 13}{X^2 - 3X + 2}$ est de la forme

$$\frac{16X - 13}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2}.$$

Ensuite, $a = \dfrac{16 \times 1 - 13}{1 - 2} = -3$ et $b = \dfrac{16 \times 2 - 13}{2 - 1} = 19$, d'où

$$\frac{16X - 13}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{-3}{X - 1} + \frac{19}{X - 2},$$

d'où

$$\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2} = 2X + 7 - \frac{3}{X - 1} + \frac{19}{X - 2}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+2}{x^2+2x-3}dx$

Ici aussi, il faut chercher à faire une décomposition en éléments simples. Déjà on remarque qu'il y a une partie entière. Il faut donc faire la division euclidienne de $2x^3+2$ par x^2+2x-3 :

$$2x^3+2 = (2x-4)(x^2+2x-3)+14x-10,$$

donc $\dfrac{2x^3+2}{x^2+2x-3} = 2x-4+\dfrac{14x-10}{x^2+2x-3}$. Ensuite, pour calculer l'intégrale de la fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples : comme $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$,

$$\frac{14x-10}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}.$$

On détermine $a = \dfrac{14-10}{1+3} = 1$ et $b = \dfrac{42-10}{-2} = -16$, donc

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2x^3+2}{x^2+2x-3}dx &= \int_2^3 \left((2x-4)+\frac{1}{x-1}-\frac{16}{x+3}\right)dx \\ &= \left[x^2-4x\right]_2^3 + [\ln|x-1|]_2^3 - 16[\ln|x+3|]_2^3 \\ &= -3+4+\ln(2)-\ln(1)-16(\ln(6)-\ln(5)) \\ &= 1+\ln(2)+16\ln(5)-16\ln(6).\end{aligned}$$

Exercices à faire en TD – minimum vital

Premier TD. Durant la première séance de TD, il faut se focaliser sur les bases : exercices 12, 13, 15 qui doivent se faire **rapidement (en moins de 30 minutes pour le total des 3)**, l'exercice 11, les exercice 20, 21.

Deuxième TD. Poursuivre les exercices liés à l'arithmétique et aux racines (25, 28). Faire un exercice théorique lié à la décomposition en éléments simples (35), et un lié à l'interpolation de Lagrange (37).

2 Degré, division euclidienne

Exercice 11. ●○○ Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Alors P n'est pas constant, et $2\deg P = 2 + \deg(P)$, donc $\deg(P) = 2$, donc $P(X) = aX^2 + bX + c$. Donc

$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^2 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c,$$

donc nécessairement $b = 0$, et $a + c = b = 0$, i.e. $a = -c$.
Synthèse. Soit a dans $\mathbb{R}^*$. Alors si $P(X) = aX^2 - a$,

$$P(X^2) = aX^4 - a = a(X^2-1)(X^2+1) = P(X)(X^2+1),$$

d'où le résultat.

Exercice 12. ◐○○ Effectuer la division euclidienne de $3X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ par $(X+1)$ et par $(X+1)^2$.

En posant la division euclidienne, on trouve que

$$3X^4 + X^2 - 2X^3 + 1 = (3X^3 - 5X^2 + 6X - 6)(X+1) + 7.$$

En posant la deuxième division euclidienne, on trouve

$$3X^4 + X^2 - 2X^3 + 1 = (3X^2 - 8X + 14)(X-1)^2 + (-20X - 13)$$

Remarque : les restes s'obtiennent facilement avec la formule de Taylor !

Exercice 13. ●○○ Déterminer l'ensemble des unités de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Soit P une unité de $\mathbb{K}[X]$. On dispose alors de Q tel que $PQ = 1$, donc $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, donc, comme P et Q sont non nuls, $\deg(P) = \deg(Q) = 0$, donc $P = \lambda \in \mathbb{K}^*$. Réciproquement, tout scalaire non nul est un un inversible de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 14. *« Équations différentielles » polynomiales* ●●○

1. Résoudre l'équation $(X-1)P' + XP = 1 + \dfrac{X^3}{2}$.

2. Résoudre l'équation $4P = (X-1)P' + P''$.

Exercice 15. ●○○ En utilisant un bon produit de polynômes, simplifier $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$.

Posons $c_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$ .On reconnaît ici un produit de Cauchy. Posons $a_\ell = \binom{n}{\ell}$ et $b_n = \binom{p}{\ell}$. Alors si $P(X) = \displaystyle\sum_{\ell\geqslant 0} a_\ell X^\ell$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{\ell\geqslant 0} b_\ell X^\ell$ (les sommes sont en fait finies), alors c_k est le terme de degré k de $P(X)Q(X)$. Simplifions les expressions de P et Q :

$$P(X) = \sum_{\ell\geqslant 0} a_\ell X^\ell = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}X^\ell = (X+1)^n,$$
$$Q(X) = (1+X)^p,$$

donc $R(X) = (1+X)^{n+p}$. On en déduit que $c_k = \binom{n+p}{k}$, donc

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell} = \binom{n+p}{k}.$$

Exercice 16. *Une identité.* ●●○ Soients $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On pose : $S = \displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$ et $P = \displaystyle\sum_{i=k}^{n}(X+1)^i$.

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.

2. En déduire S.

Exercice 17. ●○○ Déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$. En déduire un critère de divisibilité de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$.

On écrit

$$X^4 - X + a = (X^2 - aX + 1)(X^2 + aX + (a^2 - 1)) + (a^2 - a - 1)((1+a)X - 1),$$

ce reste est nul si et seulement si $a^2 - a - 1 = 0$, i.e. $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Exercice 18. ●●◐ Montrer que pour tout n il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(X) - P_n'(X) = X^n,$$

et déterminer une expression des coefficients de P_n.

Voie 1.
Utilisons les systèmes linéaires pour résoudre ce problème. Soit n dans $\mathbb{N}$. Si P est solution de l'équation alors nécessairement $\deg(P) = n$. Écrivons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)X^k$, donc

$$P_n(X) - P_n'(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}(k+1))X^k.$$

En identifiant les coefficients de cette expression avec ceux de X^n, on obtient

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_0 & -a_1 & & & & = 0 \\ & a_1 & -2a_2 & & & = 0 \\ & & a_2 & -3a_3 & & = 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & -na_n = 0 \\ & & & & & a_n = 1 \end{array}\right., \text{ i.e. } \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 \\ a_{n-1} = na_n = n \\ a_{n-2} = (n-1)a_{n-1} = n(n-1) \\ \vdots \\ a_k = \dfrac{n!}{k!} \\ \vdots \\ a_0 = n! \end{array}\right.$$

On en déduit que nécessairement, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$. Vérifier que $P_n - P_n' = X^n$ est alors immédiat.

Voie 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

CN. Supposons que $P - P' = X^n$.
Alors P est non nul, de degré égal à n et unitaire (de coefficient dominant égal à 1).
Alors $P^{(k)} - P^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Donc $P = P^{(0)} - P^{(n+1)} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!} X^\ell$.

CS. Supposons que $P = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!} X^\ell$. Alors, par les propriétés de la dérivation, on vérifie que $X^n + P' = P$. Donc $P - P' = X^n$.

CNS. L'ensemble des solutions possède exactement un élément. De plus, cet élément est $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!} X^\ell$.

Exercice 19. ●●● Soit P un polynôme à coefficients entiers. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On appelle contenu de P et on note $\mathrm{cont}(P)$ le pgcd des a_k.

1. Soient P et Q deux polynômes tels que $\mathrm{cont}(P) = 1$. Soit $R = PQ$. Soit p un nombre premier. On suppose que p divise $\mathrm{cont}(R)$.

(i) On suppose que le coefficient constant de P est premier avec p. Montrer que p divise tous les coefficients de Q.

Écrivons que $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ et $R(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$. Démontrons par récurrence forte sur k que p divise b_k.
Initialisation. p divise $c_0 = a_0 b_0$. Mais $p \wedge a_0 = 1$ donc, par le théorème de Gauss, p divise b_0.
Hérédité. On suppose que p divise $b_0, \dots, b_k$ pour un certain k. Mais p divise $c_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{k+1} a_\ell b_{k+1-\ell}$. Comme p divise $b_0, \dots, b_k$, p divise les $k+1$ premiers termes de la somme, et donc aussi son dernier terme, i.e. $a_0 b_{k+1}$. Comme $p \wedge a_0 = 1$, p divise b_{k+1}.

(ii) Dans le cas contraire, se ramener au cas précédent.

Si p divise a_0, il y a tout de même un plus petit entier k tel que p soit premier avec a_k (sinon p diviserait tous les a_i donc le pgcd des a_i donc le contenue de P, absurde car le contenu de P est égal à 1). Mais alors on fait la même démonstration que précédemment. Démontrons par récurrence forte sur k que p divise b_k.

Initialisation. p divise $c_m = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell b_{m-\ell}$. Comme p divise tous les a_ℓ pour ℓ allant de 0 à $m-1$, p divise $a_m b_0$ donc p divise b_0. **Hérédité.** L'hérédité se fait alors de la même manière.

(iii) En déduire que $\mathrm{cont}(Q) = \mathrm{cont}(R)$.

Déjà, on sait que $\mathrm{cont}(Q)$ divise tous les coefficients de Q donc, par la formule du produit de Cauchy, divise tous les coefficients de R, donc divise $\mathrm{cont}(R)$.
Mais on sait aussi que si p est un facteur premier de $\mathrm{cont}(R)$, alors il divise tous les coefficients de Q. On peut donc, si p est un facteur premier de $\mathrm{cont}(R)$, écrire l'égalité $R = PQ$ sous la forme $pR_2 = pPQ_2$ avec R_2 et Q_2 obtenus en divisant tous les coefficients de R et de Q par p. En simplifiant par p, en réitérant (récurrence) et en décomposant $\mathrm{cont}(R)$ en facteurs premiers, on parvient donc à montrer que $\mathrm{cont}(R)$ divise tous les coefficients de Q donc $\mathrm{cont}(Q)$.
D'où l'égalité !

(iv) Déterminer de manière générale $\mathrm{cont}(PQ)$.

Si P est quelconque, on écrit $P = \mathrm{cont}(P)S$ avec $\mathrm{cont}(S) = 1$. On en déduit que

$$\mathrm{cont}(PQ) = \mathrm{cont}(\mathrm{cont}(P)SQ) = \mathrm{cont}(P)\mathrm{cont}(SQ) = \mathrm{cont}(P)\mathrm{cont}(Q).$$

2. Soit R dans $\mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $R = AB$.

Écrivons tous les coefficients de P et de Q sous formes irréductibles, posons p le ppcm des dénominateurs des coefficients de P et q celui des coefficients de Q. Alors $S = pP \in \mathbb{Z}[X]$ et $T = qQ \in \mathbb{Z}[X]$. Mais alors

$$pqR = ST, \text{ donc } pq\mathrm{cont}(R) = \mathrm{cont}(S)\mathrm{cont}(T).$$

Donc pq divise $\mathrm{cont}(S)\mathrm{cont}(T)$, donc on peut écrire $pq = ab$ avec a qui divise $\mathrm{cont}(S)$ et b qui divise $\mathrm{cont}(T)$. Donc si $A = \frac{1}{a}S$ et $B = \frac{1}{b}T$, on a $A \in \mathbb{Z}[X]$, $B \in \mathbb{Z}[X]$ et $R = AB$.

3 Racines

Exercice 20. ●○○

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(x)$?

P s'annulerait une infinité de fois (en les $2n\pi$) et serait donc nul, absurde.

---

2. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in [0, 2\pi],\ P(x) = \sin(x)$?

P vérifierait $P'' = -P$; donc $P = 0$. Or $P(90^o) = 1$. Absurde !

3. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \lfloor x \rfloor$?

P vérifierait $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n$, donc $P(X) = X$. Or $P(0,5) = 0$. Absurde !

4. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme complexe P tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$?

P vérifierait $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$, donc $P(X) = X$. Or $P(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$. Absurde !

Exercice 21. ●●○ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

On veut qu'il existe α tel que

$$\alpha^3 - 7\alpha + \lambda = 0,$$

et

$$8\alpha^3 - 14\alpha + \lambda = 0,$$

i.e.

$$\alpha^3 - 7\alpha = 8\alpha^3 - 14\alpha,$$

i.e. $7\alpha^3 = 7\alpha$, i.e. $\alpha^2 = 1$, ou $\alpha = 0$, i.e. $\alpha \in \{0, 1, -1\}$. Il faut donc que λ soit tel que 0, 1 ou -1 soit racine du polynôme. On a donc $\lambda = 0$ (0 est alors solution), $\lambda = 6$ (1 est alors solution), ou $\lambda = -6$ (-1 est solution).

Exercice 22. ●●○ Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Exercice 23. ●●○ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit ω une racine de P. Montrer que

$$|\omega| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Soit ω une racine de P. Si $|\omega| \leqslant 1$, l'inégalité est évidente. Si ce n'est pas le cas, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \omega^k = 0,$$

i.e.

$$a_n \omega^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k,$$

donc

$$\omega = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \omega^{k-(n-1)}.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$|\omega| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| |\omega|^{k-(n-1)}.$$

Or, $|\omega| \geqslant 1$, donc, pour $k \leqslant n-1$, $|\omega|^{k-(n-1)} \leqslant 1$, donc

$$|\omega| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|,$$

d'où le résultat.

Exercice 24. ●●● Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Soit P un tel polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

CS. Supposons que $P = 0$. Alors P convient.

Dans la suite, supposons P non nul (cherchons parmi les polynômes non nuls ceux qui conviennent).

CN. Supposons que P convient.

$*$ Supposons que P est constant. Alors $P = 1$.

$*$ Supposons que P est non constant. Notons Z l'ensemble de ses zéros dans le plan complexe. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss (je cite les **CMCR**), Z est une partie **non vide et finie** du plan complexe et

$$P = c \prod_{w \in Z} (X - w)^{m_w}$$

où c est le coefficient dominant de P, les m_w sont les multiplicités des $w \in Z$.
Comme $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, $c = c \times c$ puis $c = 1$.

Soit $w \in Z$. Alors $w^2, (w-1)^2 \in Z$. Ainsi, Z est stable par $z \mapsto z^2$ et par $z \mapsto (z-1)^2$.

Posons : $j = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$.

Supposons $w \notin \{0; 1; -j, -j^2\}$. Alors un des deux nombres w ou $w-1$ est de module différent de 0 et de 1. Donc une des deux suites $(w^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $((w-1)^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie et à valeurs dans Z. Absurde ! Donc $w \in \{0; 1; -j, -j^2\}$. Ainsi, Z est inclus dans $\{0; 1; -j, -j^2\}$.

Supposons $w \in \{-j, -j^2\}$. Alors $(w-1)^2 \notin \{0; 1; -j, -j^2\}$; donc $(w-1)^2 \notin Z$. Absurde ! Donc $w \notin \{-j, -j^2\}$. Ainsi, Z est inclus dans $\{0; 1\}$.

Donc $P(X) = X^a(X-1)^b$; où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a + b \geqslant 1$. Or, $P(X^2) = X^{2a}(X^2-1)^b = X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b$. Ensuite, $P(X)P(X+1) = X^a(X-1)^b(X+1)^a X^b = X^{a+b}(X-1)^b(X+1)^a$. Donc nécessairement, $a = b$. Donc P est nécessairement de la forme

$$P(X) = X^a(X-1)^a$$

avec $a \in \mathbb{N}^*$.

CS. Supposons que $P = X^a(X-1)^a$, où $a \in \mathbb{N}$. Alors P convient.

CNS. L'ensemble des solutions est

$$\{0_{\mathbb{C}[X]}\} \cup \{X^a(X-1)^a \ : \ a \in \mathbb{N}\}.$$

---

4 Arithmétique et polynômes irréductibles

Exercice 25. ◐○○ Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de

(i) $X^4 + 2X^2 + 1$

$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$, il s'agit de la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$. Mais on a aussi $X^4 + 2X^2 + 1 = (X+i)^2(X-i)^2$, décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$.

(ii) $X^6 + X^3 + 1$

(iii) $X^3 - 27$

$X^3-27=(X-3)(X^2+3X+9)$, décomposé sur $\mathbb{R}$ car $3^2-4\times 9<0$. Mais aussi $X^3-27=(X-3)(X-3j)(X-3j^2)$ sur $\mathbb{C}$.

(iv) $1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}$ (sur $\mathbb{C}$ uniquement)

$1+X+\cdots+X^{n-1}=\dfrac{X^n-1}{X-1}=\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(X-\omega)$.

(v) $X^{2n+1}+1$.

Exercice 26.

1. Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de X^n-1.

On sait que $X^n-1=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de $1+X+\cdots+X^{n-1}$.

On sait que $1+X+\cdots+X^{n-1}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On évalue le polynôme précédent en 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
n &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{-\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{ik\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}(-2i)\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} 2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} 2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

---

4. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)$.

On fait de même en évaluant en $e^{-2i\theta}$ (en supposant $\theta\neq 0[2\pi]$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2i\theta})^k=\frac{1-e^{-2in\theta}}{1-e^{-2i\theta}}=e^{-i(n-1)\theta}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{-2i\theta})^k &= \prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{e}^{-2i\theta} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}(\mathrm{e}^{i\left(-\theta-\frac{k\pi}{n}\right)} - \mathrm{e}^{i\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) \\ &= \mathrm{e}^{-i(n-1)\theta}\mathrm{e}^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}2^{n-1}i^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) \\ &= \mathrm{e}^{-i(n-1)\theta}2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}\sin(\theta)}$$

Exercice 27. ●○○ Calculer le PGCD et le PPCM de $2X^4+3X^3+4X^2+2X+1$ et de $3X^3+4X^2+4X+1$.

On détermine ces deux quantités par l'algorithme d'Euclide, et on trouve un pgcd égal à X^2+X+1 et un ppcm égal à $6X^5+11X^4+15X^3+10X^2+5X+1$.

Exercice 28. ●○○ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

Le plus simple est de voir ce genre d'exercice à l'aide des racines. Si on pose $P(X) = nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$, il suffit de montrer que 1 est racine de multiplicité 3 de P. Or, $P(1)=n-(n+2)+n+2-n=0$. Ensuite, $P'(1)=(n+2)n-(n+2)(n+1)+(n+2)=0$. Enfin, $P''(1)=(n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n=0$. Donc 1 est racine de P de multiplicité 3, d'où le résultat.

Exercice 29. ●●○ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^{2n}\sin\theta - X^n\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

Exercice 30. ●●● On cherche à démontrer le résultat suivant : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est positif sur $\mathbb{R}$, alors on dispose de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

1. Démontrer que $\{A^2 + B^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}[X]\}$ est stable par produit.

2. En considérant la décomposition de P en produit d'irréductibles, en déduire le résultat.

$*$ Les irréductibles de degré 2 s'écrivent $(X-u)^2 + v^2$, où $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$*$ Soit $a \in \mathbb{R}$. Supposons que a est une racine de P. Appelons m la multiplicité de a dans P. Alors $P(X) = (X-a)^m Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $Q(a) \neq 0$.
Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, $P(a+h) = h^m Q(a+h) = Q(a)h^m(1 + \underset{h\to 0}{o}(1))$ car $Q(a) \neq 0$.
Donc, m est pair car $h \mapsto P(a+h)$ est positive.
Ainsi, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.

$*$ D'où, d'après le théorème de décomposition en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$, P s'écrit comme produit de polynômes dont chacun s'écrit comme la somme de deux carrés.

Exercice 31. ●●○ Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si AB et $A+B$ sont premiers entre eux.

Cet exercice est là pour montrer que parfois, les exercices utilisent des raisonnements en tout point identiques aux raisonnements d'arithmétique sur les entiers. Déjà, si AB et $A+B$ sont premiers entre eux, tout diviseur commun à A et B divise AB et $A+B$, donc divise $(AB) \wedge (A+B) = 1$, donc A et B sont premiers entre eux.
Ensuite, si A et B sont premiers entre eux, on montre que $A+B$ est premier avec A : on écrit $AU + BV = 1$ une relation de Bézout. Alors $A(U-V) + (A+B)V = 1$, donc $A+B$ est premier avec A. De même $A+B$ est premier avec B, donc il est premier avec AB.
Autre méthode : si α est une racine complexe de AB, c'est soit une racinde de A, soit de B. α est donc une racine de $A+B$ ssi A **ET** B s'annulent en α.

---

5 Fractions rationnelles

Exercice 32. ◐○○ – ●●○ Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ des fractions rationnelles suivantes.

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 3}{X - 1}$

Première règle, faire une division euclidienne ! Ici, $X^3 - 3X^2 + X - 3 = (X^2 - 2X - 1)(X - 1) - 4$, donc

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 3}{X - 1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{4}{X - 1},$$

et on a déjà une décomposition en éléments simples !

---

2. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$

On écrit le dénominateur $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$. Alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X}{X^2 - 4}$ est $\dfrac{a}{X - 2} + \dfrac{b}{X + 2}$. On détermine a et b de la sorte :

$$a = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{-2}{-2 + -2} = \frac{1}{2},$$

donc $\dfrac{X}{X^2 - 4} = \dfrac{1}{2(X - 2)} + \dfrac{1}{2(X + 2)}$.

---

3. $\dfrac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$

Le dénominateur est déjà factorisé, donc la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle est

$$\frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2} + \frac{c}{X - 3},$$

et $a = \dfrac{1 + 1}{(1 - 2)(1 - 3)} = \dfrac{2}{(-1) \times (-2)} = 1$, $b = \dfrac{4 + 1}{(2 - 1)(2 - 3)} = -5$ et $c = \dfrac{9 + 1}{(3 - 1)(3 - 2)} = 5$, donc

$$\frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} = \frac{1}{X - 1} - \frac{5}{X - 2} + \frac{5}{X - 3}.$$

---

4. $\dfrac{1}{X(X - 1)^2}$

Ici, pareil, le dénominateur est factorisé, la décomposition en éléments simples est donnée :

$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}.$$

On détermine $a = \frac{1}{(0-1)^2} = 1$ et $c = \frac{1}{1} = 1$. Pour déterminer b, on peut par exemple multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$: cela donne $0 = a + b$, donc $b = -1 = -1$, donc la décomposition en éléments simples est

$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

---

5. $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

Le dénominateur est déjà factorisé, il n'y a pas de partie entière, donc la forme de la décomposition en éléments simples est la suivante :

$$\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Les coefficients b et d se déterminent facilement : $b = \frac{3 \times 0 - 1}{(0+1)^2} = -1$ et $d = \frac{3 \times (-1) - 1}{(-1)^2} = -4$. Enuite, pour a et c, rusons ! On multiplie par X et on fait tendre X vers $+\infty$. Alors $a + c = 0$. Ensuite, on évalue en 1 par exemple, et on obtient :

$$\frac{2}{4} = a + b + \frac{c}{2} + \frac{d}{4} = \frac{a}{2} - 1 - 1 = \frac{a}{2} - 2,$$

donc $a = 1 + 4 = 5$ et $c = -5$, donc

$$\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \frac{5}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{5}{X+1} - \frac{4}{(X+1)^2}$$

---

6. $\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)}$

Il n'y a pas de partie entière. Ensuite, il va falloir différentier la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

- **Sur $\mathbb{R}$:** on écrit la forme de la décomposition en éléments simples :

$$\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

On détermine a par la méthode usuelle : $a = -\dfrac{2}{1+1} = -1$. Puis, pour déterminer b et c, dans ce cas particulier précis, il suffit de soustraire le premier élément simple :

$$\begin{aligned}
\frac{bX+c}{X^2+1} &= \frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} + \frac{1}{X+1} \\
&= \frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} + \frac{X^2+1}{(X+1)(X^2+1)} \\
&= \frac{2X+X^2+1}{(X+1)(X^2+1)} \\
&= \frac{(X+1)^2}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{X+1}{X^2+1},
\end{aligned}$$

donc $b=1$ et $c=1$. Donc

$$\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} = -\frac{1}{X+1} + \frac{X+1}{X^2+1}.$$

- **Sur $\mathbb{C}$**, comme $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, la décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}.$$

On détermine alors $a = \dfrac{-2}{1+1} = -1$, $b = \dfrac{2i}{(i+1)(i+i)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1-i}{2}$, $c = \dfrac{-2i}{(-i+1)(-2i)} = \dfrac{1+i}{2}$, donc

$$\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)} = -\frac{1}{X+1} + \frac{1-i}{2}\frac{1}{X-i} + \frac{1+i}{2}\frac{1}{X+i}.$$

---

7. $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$

Là, le plus dur est de factoriser le dénominateur ! On factorise déjà X^2+X+1, qui possède deux racines complexes, j et j^2. Donc

$$X^4+X^2+1 = (X^2-j)(X^2-j^2) = (X^2-(\bar{j})^2)(X^2-j^2) = (X-\bar{j})(X+\bar{j})(X-j)(X+j).$$

- On va effectuer d'abord la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{C}$, la décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{a}{X-\bar{j}} + \frac{b}{X+\bar{j}} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{X+j},$$

et on détermine de manière standard a, b, c et d , mais en utilisant la formule $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$: la fraction $\frac{P}{Q'}$ est $\frac{1}{4X^3+2X}$, et sera facile à utiliser car on a affaire qu'à des racines cubiques de 1 et -1 :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{4\bar{j}^3+2\bar{j}} = \frac{1}{4+2\bar{j}} = \frac{1+\frac{i}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{12} \\
b &= \frac{1}{-4\bar{j}^3-2\bar{j}} = -\frac{3+i\sqrt{3}}{12} \\
c &= \frac{1}{4j^3+2j} = \frac{1}{4+2j} = \frac{1-\frac{i}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{3-i\sqrt{3}}{12} \\
d &= \frac{1}{-4\bar{j}^3-2\bar{j}} = -\frac{3-i\sqrt{3}}{12}.
\end{aligned}$$

- Ensuite, on fait la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$. Mais plutôt que de rassembler tous ces termes, on va déjà factoriser sur $\mathbb{R}$ le dénominateur :

$$X^4+X^2+1 = (X-\bar{j})(X-j)(X+j)(X+\bar{j}) = (X^2+X+1)(X^2-X+1),$$

donc la décomposiiton en éléments simples est de la forme

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}.$$

Là, on ne s'embête pas, et on évalue en 0 pour avoir $b+d=1$, puis on multiplie par X et on fait $X \to +\infty$ pour avoir $a+c=0$, puis en évaluant en i, on obtient

$$\frac{1}{1-1+1} = \frac{ai+b}{-1+i+1} + \frac{ci+d}{-1-i+1} = \frac{ai+b}{i} + \frac{ci+d}{-i} = a-ib-c+id = (a-c)+i(d-b),$$

donc $a-c=1$ donc comme $a+c=0$, $2a=1$, donc $a=\frac{1}{2}$ et $c=-\frac{1}{2}$. De même, $d-b=0$ et $b+d=1$ donc $d=\frac{1}{2}$ et $b=d=\frac{1}{2}$. Donc

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2}\frac{X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2}\frac{-X+1}{X^2-X+1}.$$

Exercice 33. ◐○○ – ●●◐ Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}dx$

Ici, il s'agit déjà d'un élément simple que nous **devons** savoir intégrer. On écrit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$

Ici, on va calculer cette intégrale à l'aide d'une décomposition en éléments simples de l'intégrande. On écrit que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1},$$

et on calcule facilement $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(|x-1|) + \ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \ln(1/3)\right) = \ln(3).\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx$

Là encore, il faut faire une décomposition en éléments simples. Nous n'avons pas de partie entière ! LE dénominateur de la fraction rationnelle s'écrit

$$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4),$$

donc la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle est de la forme

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2+4}.$$

On détermine facilement a et b avec la formule $\frac{P}{Q'}$ car $\frac{P}{Q'} = \frac{x}{4x^3} = \frac{1}{4x^2}$, donc $a = \frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{16}$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient $-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{d}{4}$, mais comme $a = b$, on obtient $d = 0$. Finalement, en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, $a+b+c = 0$ donc $c = -2a = -\frac{1}{8}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx &= \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2+4}\right)dx \\ &= \frac{1}{16}\left[\ln|(x-2)(x+2)| - \ln(x^2+4)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{16}\left(\ln(3) - \ln(4) - \ln(5) + \ln(4)\right) = \frac{\ln(3)-\ln(5)}{16}.\end{aligned}$$

---

4. $\int^y \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx$

Là aussi, il faut faire une décomposition en éléments simples mais, attention, il y a un élément simple particulier ! La décomposition en éléments simples de l'intégrande est

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} + \frac{dx+e}{(1+x^2)^2}.$$

On détermine $a = 1$. Ensuite, on calcule

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-x^3-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Pour en effectuer la décomposition en éléments simples, on va faire une division euclidienne (c'est une jolie méthode). On écrit

$$-x^3 - 2x = -x(x^2+1) - x,$$

d'où

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-x(x^2+1)-x}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

d'où la décomposition en éléments simples

$$\frac{1+x+x^4}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Donc

$$\int^y \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx = \int^y \frac{1}{x}dx - \int^y \frac{x}{1+x^2}dx - \int^y \frac{x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Or, $\int^y \frac{1}{x}dx = \ln|y|$, $\int^y -\frac{x}{(1+x^2)}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$, et $\int^y -\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}$. Donc

$$\int^y \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}.$$

Exercice 34. ●◐○ – ●●◐ Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant les intervalles de validité

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$

On remarque que

$$\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx = \frac{\cos^2(x)}{\sin^5(x)}\cos(x)dx = \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^5(x)}\cos(x)dx.$$

En effectuant le changement de variables $u = \sin(x)$, i.e. $x = \text{Arcsin}(u)$, on remarque que $\dfrac{1-\sin^2(x)}{\sin^5(x)dx} = \dfrac{1-u^2}{u^5}$, et que $\dfrac{du}{dx} = \cos(x)$ i.e. $\cos(x)dx = du$. Donc on se ramène à déterminer une primitive de

$$\frac{1-u^2}{u^5} = \frac{1}{u^5} - \frac{1}{u^3}.$$

Une primitive de $\dfrac{1}{u^5} - \dfrac{1}{u^3}$ est $-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u^4} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^2}$, donc une primitive de $\dfrac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$ est

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^4(x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

---

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}$

Ici, on se rend compte que

$$\frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}\sin(x)dx = \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}\sin(x)dx.$$

On veut calculer $\displaystyle\int_0^y \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$. On effectue le changement de variables $u = \cos(x)$, on obtient à calculer

$-\displaystyle\int_1^{\cos(y)} \frac{1-u^2}{1+u}du = -\int_1^{\cos(y)} (1-u)\,du$, d'où une primitive $y \mapsto -\cos(y) + \dfrac{\cos^2(y)}{2} + \dfrac{1}{2}$.

---

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}$

Pour f_3, aucune des astuces précédentes ne fonctionne. Posons alors $u = \tan(x/2)$. Alors

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

et

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 4\frac{u(1-u^2)}{(1+u^2)^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)} &= \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+4\frac{u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}} \\
&= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2+4u(1-u^2)}(1+u^2) \\
&= \frac{1-u^2}{1+2u^2+u^4+4u-4u^2}(1+u^2) \\
&= \frac{1-u^2}{1+4u+2u^2-4u^3+u^4}(1+u^2) \\
&= \frac{1-u^2}{(u^2-2u-1)^2}(1+u^2) \\
&= \frac{1-u^2}{(u-1-\sqrt{2})^2(u-1+\sqrt{2})^2}(1+u^2)
\end{aligned}$$

De plus, $dx = \dfrac{2du}{1+u^2}$, donc

$$\int_0^t \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}dx = \int_0^{\tan(t/2)} \frac{1-u^2}{(u-1-\sqrt{2})^2(u-1+\sqrt{2})^2}du.$$

On veut décomposer en éléments simples $\dfrac{1-u^2}{(u-1-\sqrt{2})^2(u-1+\sqrt{2})^2}$: la forme de la décomposition en éléments esimples est

$$\frac{1-u^2}{(u-1-\sqrt{2})^2(u-1+\sqrt{2})^2} = \frac{a}{(u-1-\sqrt{2})} + \frac{b}{(u-1-\sqrt{2})^2} + \frac{c}{(u-1+\sqrt{2})} + \frac{d}{(u-1+\sqrt{2})^2}$$

On détermine c et d en multipliant et en évaluant en les racines : on a alors

$$b = \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \ d = \frac{1-\sqrt{2}}{4}.$$

Pour déterminer a et c, on mutliplie à gauche et à droite par u et on fait $u \underset{+}{\longrightarrow} \infty$. On obtient $0 = a + c$. Ensuite, on évalue en 1, et on obtient

$$0 = -\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{d}{2}, \text{ donc } \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{b}{2} + \frac{d}{2} = \frac{1}{4},$$

or, $a = -c$, donc

$$\sqrt{2}a = \frac{1}{4},$$

donc $a = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. D'où la décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned}&\frac{1-u^2}{(u-1-\sqrt{2})^2(u-1+\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{(u-1+\sqrt{2})} + \frac{1-\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(u-1+\sqrt{2})^2}\end{aligned}$$

Une primitive de cette fonction est donc

$$u \mapsto \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{|u-1-\sqrt{2}|}{|u-1+\sqrt{2}|}\right) - \frac{1+\sqrt{2}}{4}\frac{1}{u-1-\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{4}\frac{1}{u-1+\sqrt{2}},$$

donc une primitive de la fonction originale est

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{|\tan(x/2)-1-\sqrt{2}|}{|\tan(x/2)-1+\sqrt{2}|}\right) - \frac{1+\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}.$$

4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$

Pour calculer une primitive de f_4, on va tenter de s'épargner des puissances trop grandes, en écrivant

$$\int_0^y \frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)} = \int_0^x \frac{dx}{\cos^4(x)}\frac{1}{1+\tan^4(x)} = \int_0^x \frac{1}{1+\tan^4(x)}(1+\tan^2(x))^2 dx.$$

Posons alors $u = \tan(x)$. Quand $x = 0$, $u = 0$, quand $x = y$, $u = \tan(y)$.
Ensuite,

$$\frac{1}{1+\tan^4(x)}(1+\tan^2(x))^2 = \frac{1}{1+u^4}(1+u^2)^2.$$

Enfin,

$$du = (1+\tan^2(x))dx$$

d'où $dx = \dfrac{1}{1+u^2}du$, d'où

$$\int_0^y \frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)} = \int_0^{\tan(y)} \frac{1+u^2}{1+u^4}du.$$

Décomposons maintenant en éléments simples $\dfrac{1+u^2}{1+u^4}$. On remarque que

$$1+u^4 = 1+2u^2+u^4-2u^2 = (1+u^2)^2-(\sqrt{2}u)^2 = (1+\sqrt{2}u+u^2)(1-\sqrt{2}u+u^2),$$

ces deux polynômes étant irréductibles sur $\mathbb{R}$. On cherche donc une décomposition en éléments simples sous la forme

$$\frac{1+u^2}{1+u^4} = \frac{au+b}{1+\sqrt{2}u+u^2} + \frac{cu+d}{1-\sqrt{2}u+u^2}.$$

Afin de facilement identifier les coefficients, on remarque que les racines de $1+\sqrt{2}u+u^2$ sont $\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$ et les racines de $1-\sqrt{2}u+u^2$ sont $\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$. On trouve alors

$$\frac{1+u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\sqrt{2}u+u^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\sqrt{2}u+u^2}.$$

Remarque : pour le coup, l'identification était clairement plus rapide ici.
Pour déterminer une primitive de $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}u+u^2}$, on écrit

$$1+\sqrt{2}u+u^2 = \left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}+1 = \left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}u+1\right)^2+1\right),$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sqrt{2}u+u^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}u+1\right)^2+1},$$

qui se primitive en

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{Arctan}\left(\sqrt{2}u+1\right).$$

De même, $\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\sqrt{2}u+u^2}$ se primitive en

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{Arctan}\left(\sqrt{2}u-1\right),$$

donc une primitive de f_4 est

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\tan(x)+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\tan(x)+1\right).$$

---

5. $f_5 : x \mapsto \frac{\tan(x)-\tan(a)}{\tan(x)+\tan(a)},\ a \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Pour f_5, on a une intégrale qui s'exprime uniquement en fonction de tangente, donc on effectue le changement de variables $u=\tan(x)$. On a alors

$$\frac{\tan(x)-\tan(a)}{\tan(x)+\tan(a)}=\frac{u-\tan(a)}{u+\tan(a)},$$

et $dx=\frac{du}{1+u^2}$. Il faut alors déterminer une primitive de

$$u \mapsto \frac{u-\tan(a)}{(u+\tan(a))(1+u^2)}.$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{X-\tan(a)}{(X+\tan(a))(1+X^2)}$ est

$$\frac{X-\tan(a)}{(X+\tan(a))(1+X^2)}=\frac{b}{X+\tan(a)}+\frac{cX+d}{1+X^2}.$$

On trouve immédiatement $b=-\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$, et

$$\frac{i-\tan(a)}{i+\tan(a)}=ci+d,$$

i.e.

$$-\frac{\tan^2(a)-1+2i\tan(a)}{1+\tan(a)^2}=ci+d,$$

donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X-\tan(a)}{(X+\tan(a))(1+X^2)}$ est

$$\frac{X-\tan(a)}{(X+\tan(a))(1+X^2)} = -\frac{1}{1+\tan^2(a)}\left(\frac{2\tan(a)}{X+\tan(a)} + \frac{\tan^2(a)-1+2\tan(a)X}{X^2+1}\right)$$

Une primitive de $u \mapsto \dfrac{u-\tan(a)}{(u+\tan(a))(1+u^2)}$ est donc

$$u \mapsto -\frac{1}{1+\tan^2(a)}\left(2\tan(a)\ln|u+\tan(a)| + (\tan^2(a)-1)\mathrm{Arctan}(u) + \tan(a)\ln(u^2+1)\right),$$

donc une primitive de f_5 est

$$x \mapsto -\frac{1}{1+\tan^2(a)}\left(2\tan(a)\ln|\tan(x)+\tan(a)| + (\tan^2(a)-1)x + \tan(a)\ln(\tan^2(x)+1)\right),$$

Exercice 35. ●●○ Soit P un polynôme réel scindé à racines simples, a un réel. Montrer que $P' + aP$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Si a est nul, nous l'avons déjà vu en cours. On suppose donc $a \neq 0$.
Écrivons $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$.Effectuons la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$. On sait alors que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}.$$

Soit alors k dans $[\![1, n-1]\!]$. Quand $x \to a_k^+$, $\dfrac{P'}{P}(x) \to +\infty$. De même, quand $x \to a_{k+1}^-$, $\dfrac{P'}{P}(x) \to -\infty$. La fonction $x \mapsto \dfrac{P'}{P}$ étant continue sur $]a_k, a_{k+1}[$, elle prend, par le théorème des valeurs intermédiaires aux limites, la valeur $-a$ en un réel $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$. Donc $\dfrac{P'(b_k)}{P(b_k)} = -a$, donc $P'(b_k) + aP(b_k) = 0$. On a donc trouvé $n-1$ racines de $P' + aP$, de degré n. Il nous en manque une.
Mais $\dfrac{P'(x)}{P(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Supposons $-a > 0$, alors, comme $\dfrac{P'}{P} \underset{x\to a_n^+}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit, par le TVI aux limites, qu'il existe $b_n > a_n$ tel que $\dfrac{P'(b_n)}{P(b_n)} = -a$, i.e. $P'(b_n) + aP(b_n) = 0$.

Supposons $-a < 0$, alors, comme $\dfrac{P'}{P} \underset{x \to a_1^-}{\longrightarrow} -\infty$, on en déduit, par le TVI aux limites, qu'il existe $b_0 < a_1$ tel que $\dfrac{P'(b_0)}{P(b_0)} = -a$, i.e. $P'(b_0) + aP(b_0) = 0$.
Dans tous les cas on a trouvé une racine supplémentaire pour $P' + aP$ donc $P' + aP$ a n racines distinctes, donc est srs.

Exercice 36. ●◐○ Soit P un polynôme scindé à racines simples, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i P'(\alpha_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Effections la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$: on écrit que

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{\lambda \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)}.$$

Mais, d'après les formules théoriques,

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(\alpha_i)(X - \alpha_i)},$$

d'où le résultat, en évaluant en 0

---

6 Polynômes célèbres

Exercice 37. *Un exercice sur les polynômes de Lagrange.* ●◐○
Soient $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $1, \dots, n$.

1. Déterminer le coefficient dominant de L_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Par les formules du cours, on sait que

$$L_k(X) = \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (X - i)}{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (k - i)}.$$

Le coefficient dominant de $L_k(X)$ est donc

$$\frac{1}{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (k - i)}.$$

Or

$$\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (k-i) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ i \neq k}} (k-i) \prod_{\substack{k+1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (k-i).$$

En posant $\ell = k - i$, on a

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (k-i) = \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant k-1} \ell = (k-1)!$$

et, en posant $\ell = i - k$,

$$\prod_{k+1 \leqslant i \leqslant n} (k-i) = \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant n-k} -\ell = (-1)^{n-k}(n-k)!$$

Donc le coefficient dominant de L_k est

$$(-1)^{n-k} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!} \binom{n-1}{k-1}.$$

---

2. Déterminer l'expression d'un polynôme P de degré $n-1$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(k) = k^{n-1}$.

- En donnant directement l'expression évidente.
- À l'aide des $L_1, \dots, L_n$.

Un polynôme évident est $P(X) = X^{n-1}$. En utilisant les polynômes L_k, on a le polynôme interpolateur

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n} k^{n-1} L_k(X).$$

---

3. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Par unicité du polynôme interpolateur, on a $P = Q$. En particulier leurs coefficients dominants sont égaux, donc

$$1 = \sum_{k=1}^{n} k^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!} \binom{n-1}{k-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned} k^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!}\binom{n-1}{k-1} &= k^n\frac{(-1)^{n-k}}{n!}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \\ &= k^n\frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = n!$$

Exercice 38. *Polynômes de Tchebycheff, suite.* ●●○ Cet exercice a besoin du premier exercice sur les polynômes de Tchebycheff.
Si f est une fonction définie sur $[-1,1]$, on définit $||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

1. Calculer $||T_n||_\infty$.

Si $x \in [-1,1]$, on dispose de θ tel que $x = \cos(\theta)$, donc $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ donc $|T_n(x)| \leqslant 1$. De plus, $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = \cos(0) = 1$. Donc $|T_n(x)| \leqslant 1$ et on dispose de x_0 tel que $|T_n(x_0)| = 1$. Donc $||T_n||_\infty = 1$.

---

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin nu| \leqslant n|\sin u|$.

On démontre par récurrence que $\mathcal{P}_n : \forall u,\ |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$.
Initialisation. Pour $n = 0$, $|\sin(0.u)| = 0 \leqslant 0.|\sin(u)|$.
Hérédité. Supposons que pour un certain n, $\forall u,\ |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$. Soit $u \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)u)| &= |\sin(nu)\cos(u) + \sin(u)\cos(nu)| \\ &\leqslant |\sin(nu)\cos(u)| + |\sin(u)\cos(nu)| \\ &\leqslant |\sin(nu)| + |\sin(u)| \\ &\leqslant n|\sin(u)| + |\sin(u)| \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &\leqslant (n+1)|\sin(u)|. \end{aligned}$$

D'où l'hérédité, et le résultat par récurrence.

---

3. En déduire $||T_n'||_\infty = n^2$.

On sait que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$, donc

$$|\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))| = |n\sin(n\theta)| \leqslant n^2|\sin(\theta)|,$$

donc $|T_n'(\cos(\theta))| \leqslant n^2$, donc, pour tout x dans $[-1,1]$, $|T_n(x)| \leqslant n^2$
Ensuite, calculons $|T_n'(1)| = |T_n'(\cos(0))|$. Par continuité de T_n', $T_n'(\cos(\theta)) \sim_{\theta\to 0} T_n'(0)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) \sim -\theta T_n'(0)$ et $-n\sin(n\theta) \sim -n^2\theta$, donc $-\theta T_n'(0) \sim -n^2\theta$, donc $T_n(0) \sim n^2$ donc $|T_n(0)| = n^2$.

---

4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}^*,\ T_n\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^n+r^{-n}}{2}$.

Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propositon $\mathcal{P}_n : \forall r \in \mathbb{R}^*,\ T_n\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^n+r^{-n}}{2}$ est vraie.
Initialisation. $T_0(X) = 1$ donc $T_0\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^0+r^{-0}}{2}$. De même, $T_1(X) = X$ donc $T_1\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$.
Hérédité. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain n. Alors

$$\begin{aligned}
T_{n+1}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) &= 2\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)T_{n+1}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) - T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)\frac{r^{n+1}+r^{-n-1}}{2} - \frac{r^n+r^{-n}}{2}\\
&= \frac{r^{n+2}+r^{-n}}{2} + \frac{r^n+r^{-n-2}}{2} - \frac{r^n+r^{-n}}{2}\\
&= \frac{r^{n+2}+r^{-n-1}}{2},
\end{aligned}$$

d'où la proposition et le résultat !

---

5. Soit un réel $x \in [1,+\infty[$.

(i) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$.

L'équation $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$ est équivalente à $2rx = r^2+1$, i.e. $r^2 - 2xr + 1 = 0$, de discriminant $2\sqrt{x^2-1}$, bien défini car $x \geqslant 1$, donc $r = x \pm \sqrt{x^2-1}$ sont deux solutions de l'équation.

(ii) En déduire que $1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

On sait que $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$, donc $r^2 - 2xr + 1 = 0$, de discriminant $2\sqrt{x^2-1}$, donc $r = x \pm \sqrt{x^2-1}$. Prenons $r = x + \sqrt{x^2-1}$ par exemple. Alors un bref calcul montre que $\dfrac{1}{r} = x - \sqrt{x^2-1}$! ! (un autre argument permet de voir que $\dfrac{1}{r}$ vérifie la même équation que r). En remplaçant r et $\dfrac{1}{r}$ dans l'expression de la 11, on obtient que

$$T_n(x) = T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n+r^{-n}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^{-n}}{2} \leqslant \frac{2(x+\sqrt{x^2-1})}{2},$$

d'où le résultat. De plus, comme $r > 0$, $T_n(x) = \dfrac{r^n+r^{-n}}{2} = \operatorname{ch}(n\ln(r)) \geqslant 1$.

6. En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0,\pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

On sait que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$, donc

$$-\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2T_n(\cos(\theta)),$$

i.e.

$$-\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) = -n^2T_n(\cos(\theta))$$

, i.e.

$$(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(\theta)) = 0,$$

i.e. , pour tout x dans $[-1,1]$,

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0,$$

donc

$$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

7. Soit $k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n$. Déduire de la question précédente que $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n}{n+k}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\dfrac{2^k k!}{(2k)!}$.

Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}T_n^{(k)}(1)$.

Démonstrons le résultat par récurrence **sur** k.

Initialisation. Déjà $T_n^{(0)}(1) = 1 = \dfrac{n}{(n+0)} \dfrac{(n+0)!}{(n-0)!} \dfrac{2^0.0!}{(2.0)!} = 1$. **Hérédité.** Supposons que pour un certain k, $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n}{n+k} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} \dfrac{2^k k!}{(2k)!}$.

En dérivant k fois l'équation différentielle précédente (et en utilisant la formule de Leibniz), on obtient

$$\begin{aligned}&\binom{k}{0}(1-X^2)T_n^{(k+2)}(X) - \binom{k}{1}2XT_n^{(k+1)}(X) - \binom{k}{2}2T_n^{(k)}(X)\\ &- \binom{k}{0}XT_n^{(k+1)}(X) - \binom{k}{1}T_n^{(k)}(X) + n^2T_n^{(k)}(X) = 0,\end{aligned}$$

donc, en évaluant en 1,

$$-2kT_n^{(k+1)}(1) - k(k-1)T_n^{(k)}(1) - T_n^{(k+1)}(1) - kT_n^{(k)}(1) + n^2T_n^{(k)}(1) = 0,$$

donc

$$-(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) + (n^2-k^2)T_n^{(k)}(1) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}T_n^{(k+1)}(1) &= \frac{1}{2k+1}(n-k)(n+k)T_n^{(k)}(1)\\ &= \frac{1}{2k+1}(n-k)(n+k)\frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}\\ &= \frac{1}{2k+1}\frac{2(k+1)}{(2k+2)}n\frac{(n+k+1)}{(n+k+1)}\frac{(n+k)!}{(n-(k+1)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}\\ &= \frac{n}{n+k+1}\frac{(n+k+1)!}{(n-(k+1)!}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2(k+1))!},\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

En fait le dernier résultat est stupide. Si n est pair, T_n est pair donc $T_n(-x) = T_n(x)$ pour tout x donc en dérivant k fois $(-1)^kT_n^{(k)}(-x) = T_n(x)$, i.e. en évaluant en 1, $T_n(-1) = (-1)^{-k}T_n(1) = (-1)^kT_n(1) = (-1)^{k+n}T_n(1)$ car n est pair. De même si n est impair.

Exercice 39. *Polynômes de Legendre*. ●●○ Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

L_n est la dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$, donc il est de degré n. Son coefficient dominant est celui de la dérivée n-ième de $\frac{n!}{(2n)!}X^{2n}$, i.e. $\frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n-n)!}{n!} = 1$, donc L_n est bien unitaire.

---

2. Montrer que
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)dt = 0$$

Posons $P(X) = (X^2-1)^n$. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$. Montrons par récurrence que pour tout entier k dans $[\![0, n]\!]$,
$$\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)Q(x)dx = (-1)^{n-k}\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx.$$
Initialisation évidente pour $k = 0$.
Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)Q(x)dx = (-1)^{k}\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx.$$
Effectuons une IPP en posant $u'(x) = P^{(n-k)}(x)$, $v(x) = Q^{(k)}(x)$, donc $u(x) = P^{(n-(k+1))}$ et $v'(x) = Q^{(k+1)}(x)$. Donc
$$\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx = \left[P^{(n-(k+1))}Q^{(k)}(x)\right] - (-1)^k\int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx.$$
Or, -1 et 1 sont des racines de multiplicité n de P, donc si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $P^{(n-(k+1))}(-1) = P^{(n-(k+1))}(1) = 0$. Donc
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx &= -(-1)^k\int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx\\ &= (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx,\end{aligned}$$
le résultat est donc prouvé. En particulier,
$$\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)Q(x)dx = (-1)^{n}\int_{-1}^{1} P^{(0)}(x)Q^{(n)}(x)dx,$$
et donc
$$\int_{-1}^{1} L_n(x)Q(x)dx = (-1)^{n}\int_{-1}^{1} \frac{n!}{(2n)!}(x^2-1)^nQ^n(x)dx = 0$$
si Q est dans $\mathbb{R}_{n-1}(X)$. Le résultat est donc démontré.

---

3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1,1[$. On utilisera sans la démontrer la propriété suivante : toute fonction continue positive sur un segment d'intégrale nulle sur ce segment est nulle.

Supposons que L_n s'annule strictement moins de n fois sur $]-1,1[$. Si L_n garde un signe constant (par exemple $L_n \geqslant 0$, on sait par la question précédente que

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)dx = \int_{-1}^{1} L_n \times 1dx = 0.$$

Or l'intégrale sur un segment d'une fonction positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, donc L_n serait nulle sur $]-1,1[$, donc L_n s'annulerait une infinité de fois et serait le polynôme nul, impossible.
Supposons que L_n change de signe en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, avec $r < n$. Supposons de plus que sur $]\alpha_r, 1[$, L_n soit positive. Considérons alors

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k).$$

Alors Q est du signe de L_n sur chacun des intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. De plus, comme $r < n$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(x)Q(x)dx = 0$, et L_nQ est positive sur $]-1,1[$. Donc L_nQ est nulle sur $]-1,1[$, donc L_nQ est le polynôme nul, donc L_n est le polynôme nul, absurde.
Donc L_n possède n racines dans $]-1,1[$.

Exercice 40. *Polynômes cyclotomiques*. ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité par $\mathcal{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } k \wedge n = 1\}$.

1. Que vaut

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)?$$

Par le cours, on sait que $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = X^n - 1$.

On appelle n-ième polynôme cyclotomique le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} (X - \omega) = \prod_{\substack{k \in [\![0, n-1]\!] \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

2. Soit p un nombre premier. Que vaut $\Phi_p(X)$?

Si p est un nombre premier, tout nombre entre 0 et $p-1$ est premier avec p. Donc

$$\prod_{\substack{k\in[\![0,p]\!]\\ k\wedge p=1}}\left(X-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{p}}\right)=\prod_{\substack{\omega\in\mathbb{U}_p\\ \omega\neq 1}}(X-\omega)=\frac{X^p-1}{X-1}=1+X+\cdots+X^{p-1}.$$

3. On veut montrer que

$$X^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(X).$$

(i) Soit d un entier divisant n, montrer que toute racine de Φ_d est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, montrer que toute racine n-ième de l'unité est une racine primitive δ-ième de l'unité pour un certain δ divisant n.

Si ω est une racine de Φ_d, alors $\omega^d=1$. Or $n=pd$ avec $p\in\mathbb{N}$, donc $\omega^n=\omega^{pd}=(\omega^d)^p=1$, donc ω est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, si ω est racine n-ième de l'unité, alors soit $d=\min\{k,\ \omega^k=1\}$. Alors $d|n$: si ce n'était pas le cas, on écrirait $n=dq+r$ avec $0<r<d$, et $\omega^r=1$ ce qui contredirait la minimalité de r. Ensuite $\omega^d=1$, et $\omega\in\mathcal{U}_d$. En effet, si on avait $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{d}}$ avec $k\wedge d=r\neq 1$, alors on écrirait $k=ra$, $d=rb$, et donc $kb=ad$, donc $\omega^b=1$, avec $b<d$, absurde.

On a donc montré que X^n-1 et $\prod_{d|n}\Phi_d(X)$ avaient les mêmes racines.

(ii) Montrer que X^n-1 est à racines simples.

Cf cours, on connaît la décomposition de X^n-1.

(iii) Montrons que $\prod_{d|n}\Phi_d(X)$ est à racines simples.

- Soient $d\neq\delta$ deux entiers. Montrer que $\mathcal{U}_d\cap\mathcal{U}_\delta=\emptyset$.

Soit $\omega\in\mathcal{U}_d\cap\mathcal{U}_\delta$. Alors on dispose de k et ℓ tels que $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{d}}=\mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{\delta}}$, avec $k<d$ et $\ell<\delta$, donc

$$\frac{k}{d}=\frac{\ell}{\delta},$$

donc $k\delta=d\ell$. Comme $k\wedge d=1$, $k|\ell$ par le théorème de Gauss. De même, $\delta\wedge\ell=1$, donc par le théorème de Gauss, $\ell|k$. Donc $k=\ell$, or $k\neq 0$, donc $\delta=d$, absurde !

- En déduire que $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ est à racines simples.

On en déduit que toutes les racines des Φ_d pour $d|n$ sont deux à deux distinctes, donc le polynôme $\prod_{d|n} \Phi_d$ est scindé à racines simples.

(iv) Conclure.

On en déduit que les racines de $X^n - 1$ et de $\prod_{d|n} \Phi_d$ sont communes et toutes simples, donc les deux polynômes sont égaux.

4. Soit φ l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

En égalisant les degrés, on obtient $n = \sum_{d|n} \mathrm{Card}(\mathcal{U}_d) = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

5. En considérant les ensembles $E_d(n) \overset{\text{def.}}{=} \{k \in [\![0, n-1]\!] \mid k \wedge n = d\}$ pour d parcourant les diviseurs positifs de n, retrouver les résultats de 3 et 4.

Les E_d constituent une partition de $[\![0, n-1]\!]$, et pour d divisant n, $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\ ,\ k \wedge n = d\} = d\{k' \in \mathbb{N} \mid k' < n/d\ ,\ k' \wedge n/d = 1\}$; i.e. $E_d(n) = dE_1(n/d)$...

Indications

1. 1. Utiliser le théorème de Rolle.
   2. Utiliser le fait qu'un polynôme est à racines simples ssi il est premier avec son polynôme dérivé.
   3. Utiliser le théorème de Rolle et compter les racines de P' avec multiplicité.
2. 1. Penser à distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$. Le premier cas se résout avec une formule de Taylor. Le second se résout à la main, en adaptant la preuve du « reste de la division euclidienne par $X - \alpha$ »

  2. Utiliser le résultat précédent et l'exponentielle complexe.

4. L'idée fondamentale est de penser aux **relations coefficients-racines** ! Dans le premier système, on a facilement la somme des racines et, si l'on multiplie la dernière équation par xyz, on a une relation entre le produit des racines et la quantité $xy + yz + zx$! Enfin, remarquer ce que vaut $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$.

5. **1.** On pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
  2. Utiliser le fait que deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux.
  3. Utiliser la formule trouvée en 1.
  4. Écrire $\cos((n+1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos((n+2)\theta)$.
  5.
  6. Regarder les points d'annulation de $\cos(n\theta)$.

7. Conseil important : référez-vous au chapitre d'arithmétique des entiers ! L'idée est que tout a déjà été fait dans ce chapitre !

8. **1.** Commencer à factoriser comme on voudrait et utiliser l'identité de Bernoulli.
  2. Utiliser l'algorithme d'Euclide.

10. Utiliser les méthodes du cours, et commencer par chercher à faire des calculs simples !

11. Faire un raisonnement sur le degré.

12. Faire le calcul comme indiqué en cours. Ou utiliser la formule de Taylor.

13. Revoir ce qu'est l'ensemble des unités d'un anneau, puis faire un raisonnement sur le degré.

14. Bien sûr, il ne s'agit pas de résoudre les équations différentielles comme au chapitre 7 ! Regarder le degré, regarder le coefficient dominant, les coefficients constants, etc !

15. Reconnaître le coefficient d'ordre k du produit $(X+1)^n(X+1)^p$.

16. Le même que le précédent, en plus dur !
  1. Dériver la somme, vous devriez trouver ce qu'il faut !
  2. P fait penser à une somme géométrique... essayez d'écrire ce que vaut $XP(X) = ((X+1)-1)P(X)$. Puis, dériver cette expression $k+1$ fois !

17. Poser la division euclidienne et chercher une CNS pour que ce reste soit nul.

18. Résoudre un système linéaire !

20. Raisonner sur les racines, ou bien la dérivabilité.

21. Écrire un système d'équations que doit vérifier α.

22. Inspirez-vous fortement de l'exercice 4 !

23. Prendre ω une racine de P. Si elle est de module $\leqslant 1$, c'est bon. Sinon, utiliser le fait que $|\omega^k| \leqslant |\omega|^n$ pour tout $k \leqslant n$.

24. Montrer que P est nul ou de la forme $X^a(X-1)^a$.

25. Reconnaître des racines de l'unité.

26. Utiliser la décomposition obtenue en question 2, l'évaluer en 1, en $e^{-2i\theta}$...

27. Utiliser l'algorithme d'Euclide ou une relation de Bézout.

28. Utiliser les racines !

??. De même, déterminer les racines du polynôme qui est censé diviser l'autre !

31. Exercice fait en arithmétique des entiers relatifs. Utiliser des relations de Bézout.

32. Utiliser les méthodes du cours, et commencer par chercher à faire des calculs simples ! Notamment regarder si on n'a pas déjà une DES...

33. Utiliser les méthodes du cours, et commencer par chercher à faire des calculs simples !

34. Utiliser les méthodes du cours, et commencer par chercher à faire des calculs simples ! Seuls les derniers cacluls sont vraiment compliqués.

35. Étudier la fonction $\dfrac{P'}{P}$ au voisinage des racines de P et faire un TVI.

36. Utiliser la formule théorique des coefficients de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$.

37. Utiliser l'expression vue en cours des polynômes de Lagrange.

38. **1.**
- **2.** Faire une récurrence.
- **3.** Montrer que $||T_n||_\infty \leqslant 1$ puis que cette quantité est atteinte.
- **4.** Faire une récurrence
- **5.** (i)
  - (ii) Résoudre l'équation du second degré vérifiée par r.
- **6.**
- **7.** Faire une récurrence

39. **1.** Utiliser un calcul de dérivée n-ième.
- **2.** Faire des IPP
- **3.** Question presque faite dans le chapitre de dérivabilité.

40. **1.** Utiliser que tout nombre de $[\![1, p-1]\!]$ est premier avec p.
- **2.** (i) Utiliser proprement les racines de l'unité.
  - (ii)
  - (iii) Utiliser le théorème de Gauss
  - (iv)
- **3.** Utiliser les degrés.