LES SUITES GLOBALEMENT CROISSANTES

Dans l'enseignement des mathématiques, le chapitre des suites est très formateur car il oblige à préciser des notions que l'on possède intuitivement. En effet, de nombreuses propriétés que l'on pense de prime abord exactes, voire évidentes s'avèrent en fait fausses.

Considérons par exemple la notion de suite croissante. On accepte facilement la définition $u_n \leq u_{n+1}$, mais on ne réalise pas vraiment que cela impose que *chaque* terme soit inférieur au suivant ; un petit décroché vers le bas et c'est fini, la suite n'est plus croissante.
Or lorsque l'on dit que le chômage croît, ce n'est pas une baisse locale entre mars et avril qui va infirmer cette impression générale. Où bien quand un touriste grimpe la dune du Pilat en faisant trois pas en avant, deux pas en arrière, globalement il monte quand même.


Les cours montent !

C'est pourquoi lorsqu'on demande à des élèves novices si une suite qui tend vers + l'infini est croissante, la quasi totalité répondent oui sans sourciller, ou précisent qu'elle est au moins croissante à partir d'un certain rang.
Or l'exemple de la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$, qui vérifie $u_{n+1} - u_n = -1$ pour n pair tout en étant supérieure à $n-1$ montre qu'une suite peut très bien tendre vers + l'infini, et n'être croissante à partir d'aucun rang.

Je me suis donc mis en quête d'une définition des suites globalement croissantes (ou décroissantes), qui répondrait au cahier des charges suivant :

C1 : toute suite croissante est globalement croissante.

C2 : une suite strictement décroissante n'est pas globalement croissante.

C3 : Toute suite qui tend vers + l'infini, ou vers une limite l en restant $\leq l$ est globalement croissante.

Je propose au lecteur de se forger sa propre définition avant de lire la suite !

Un première proposition (D1) est de dire qu'une suite globalement croissante est une suite supérieure ou égale à une suite croissante. Proposition vite rejetée car ne vérifiant pas C2 :

$\left(\frac{1}{n}\right)$ est strictement décroissante et pourtant supérieure à la suite strictement croissante $\left(-\frac{1}{n}\right)$; d'ailleurs, on obtiendrait ainsi toutes les suites minorées !

Deuxième proposition (D2) : une suite globalement croissante est une suite égale à une suite croissante plus une suite bornée. De nouveau rejetée à cause de C2 : $\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} + \frac{2}{n}$ avec $\left(\frac{1}{n}\right)$ strictement décroissante, $\left(-\frac{1}{n}\right)$ croissante et $\left(\frac{2}{n}\right)$ bornée.
Pourtant, la notion n'est pas inintéressante, et j'invite le lecteur à déterminer en exercice quelles seraient avec cette définition les suites à la fois globalement croissantes et globalement décroissantes.

Troisième proposition (D3) : une suite globalement croissante est une suite dont la moyenne $\left(\frac{u_1 + ... + u_n}{n}\right)$ est croissante ; outre que cette définition soit difficile à mettre en oeuvre pratiquement, et qu'elle confère trop d'importance aux premiers termes de la suite, j'invite le lecteur à construire un contre-exemple, montrant qu'elle contredit C3.

Quatrième proposition (D4) : une suite globalement croissante est une suite dont chaque terme n'a qu'un nombre fini de termes qui lui soient strictement inférieurs (ou autrement dit, ils lui sont tous supérieurs à partir d'un certain rang).
En langage formalisé, cela s'écrit :

$$\forall m \quad \exists n_1 \geq m \quad \forall n \geq n_1 \; u_n \geq u_m$$

Avec cette définition, C1 et C2 sont évidement vérifiées, et j'invite le lecteur à montrer que toute suite qui tend vers + l'infini est bien globalement croissante.
Malheureusement, la suite définie par $\begin{cases} u_n = 1 \text{ pour } n \text{ pair} \\ u_n = 1 - \frac{1}{n} \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$ qui tend vers 1 en restant ≤ 1 n'est pas globalement croissante, car il y a une infinité de termes strictement inférieurs à u_0.

Pour corriger ce petit défaut, on est amené à faire la cinquième proposition (D5) : **une suite globalement croissante est une suite vérifiant :**

$$\forall m \; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_1 \geq m \quad \forall n \geq n_1 \quad u_n \geq u_m - \varepsilon$$

C1 et C2 restent réalisées, une suite de limite + l'infini est bien globalement croissante, et si (u_n) tend vers l en restant $\leq l$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ et tout m $u_n \geq l - \varepsilon \geq u_m - \varepsilon$: c'est plus qu'il n'en faut pour D5 : le cahier des charges est bien réalisé.

La définition D5 n'est pas d'une extrême simplicité, mais en l'examinant attentivement, on s'aperçoit que la réciproque de la propriété précédente est vraie : une suite vérifiant D5 tend vers une limite l finie ou infinie, en restant $\leq l$!

Soit en effet *l* la borne supérieure d'une suite vérifiant D5 ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice *m* tel que $l - \frac{\varepsilon}{2} < u_m \leq l$ et donc par D5 il existe un rang n_1 à partir duquel on a $l \geq u_n \geq u_m - \frac{\varepsilon}{2} \geq l - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = l - \varepsilon$; d'où $\lim u_n = l$.

On en déduit que D5 est *équivalente* à :
(u_n) tend vers une limite en restant $\leq$ cette limite.

Définissant alors les suites globalement décroissantes comme les suites tendant vers une limite en restant $\geq$ cette limite , on montre facilement que les suites à la fois globalement croissantes et globalement décroissantes sont les suites constantes.

Et on remarque qu'on a un « théorème de la limite globalement monotone » :
Toute suite globalement monotone possède une limite.

On peut alors tenter une définition des suites globalement strictement croissantes (ou strictement globalement ?) :

$$\forall m \quad \exists n_1 > m \quad \forall n \geq n_1 \; u_n > u_m$$

qui est bien vérifiée par toute suite strictement croissante.
Le lecteur montrera que cette définition équivaut à ce que la suite tende vers une limite en restant constamment strictement inférieure à cette limite (toute suite qui tend vers + l'infini est donc globalement strictement croissante).

Tout irait bien dans le meilleur des mondes si un de mes élèves n'avait pas proposé une sixième définition (D6) : **une suite globalement croissante est une suite n'ayant pas de sous-suite strictement décroissante** (autrement dit, on ne peut pas trouver de suite strictement croissante d'indices $n_1 < n_2 < \ldots$ tels que $u_{n_1} > u_{n_2} > \ldots$).

On montre facilement que C1, C2, C3 sont alors bien vérifiées, et que D5 implique D6 ; j'ai un moment pensé que la réciproque était vraie, mais les maths ne marchent jamais comme on a envie... En effet, la suite $\left((-1)^n\right)$ n'a pas de sous-suite strictement décroissante et pourtant elle n'a pas de limite donc ne vérifie pas D5 ; pire encore, la suite $\left(-\frac{1}{n} + (-1)^n\right)$ n'a pas de sous-suite *décroissante,* mais ne vérifie pas D5.

D6 est-elle la bonne définition des suites globalement croissante ? Je ne sais pas, mais on ressent vite le besoin de la modifier car elle est difficile à manipuler sous sa forme négative. Une forme un peu différente est D'6 : **une suite globalement croissante au sens de D6 est une suite dont toute sous-suite possède un minimum (i. e. un terme inférieur ou égal à tous les autres)** (le lecteur montrera l'équivalence des négations de D6 et D'6)

Une suite vérifiant D6 possède donc un minimum, mais la suite obtenue en supprimant tous les termes jusqu'à ce minimum possède elle aussi un minimum, et ainsi de suite : on en déduit, en prenant cette infinité de minimums successifs, qu'une suite globalement croissante au sens de D6 possède une sous-suite croissante.

Tiens, on retrouve ici un théorème méconnu : toute suite qui n'a pas de sous-suite strictement décroissante à au moins une sous-suite croissante, ou encore : **toute suite de réels possède une sous-suite monotone.**

Quelles sont alors, au sens de D6 les suites à la fois globalement croissantes et globalement décroissantes (autrement dit les suites n'ayant pas de sous-suite strictement monotone) , comme par exemple la suite $\left((-1)^n\right)$?

Supposons qu'une telle suite prenne une infinité de valeurs distinctes ; on pourrait alors construire une sous-suite injective, i. e. dont tous les termes sont distincts, en barrant dans la suite tout terme dont la valeur a déjà été prise. D'après le théorème montré ci-dessus, cette sous-suite aurait une sous-suite monotone, avec une monotonie forcément stricte ; la suite de départ aurait une sous-suite strictement monotone, absurde.

Conclusion : les suites globalement croissantes et globalement décroissante au sens de D6 sont les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Voici un petit tableau récapitulatif.

Sens de D5 $\Rightarrow$	Sens de D6
u est globalement croissante $\Leftrightarrow$ $\forall m\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_1 \geq m\ \ \forall n \geq n_1\ \ u_n \geq u_m - \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\forall n\ u_n \leq \underline{\lim}\, u$ $\Leftrightarrow$ $\lim u$ existe et $\forall n\ u_n \leq \lim u$ Condition suffisante : $\forall m\ \ \exists n_1 \geq m\ \ \forall n \geq n_1\ u_n \geq u_m$	*u* est globalement croissante $\Leftrightarrow$ *u* n'a pas de sous-suite strictement décroissante $\Leftrightarrow$ Toute sous-suite a un minimum.
u est strictement globalement croissante $\Leftrightarrow$ $\forall m\ \ \exists n_1 > m\ \ \forall n \geq n_1\ u_n > u_m$	*u* est strictement globalement croissante $\Leftrightarrow$ *u* n'a pas de sous-suite décroissante $\Leftrightarrow$ Toute sous-suite a au moins un terme strictement inférieur aux suivants.
Suites globalement croissantes et globalement décroissantes : les suites constantes. Suites strictement globalement croissantes et strictement globalement décroissantes : aucune.	Suites globalement croissantes et globalement décroissantes : les suites prenant un nombre fini de valeurs. Suites strictement globalement croissantes et strictement globalement décroissantes : aucune.

Nous sommes donc en présence de deux notions qui tiennent la route. La première est plus simple à vérifier, mais contrairement à la deuxième, elle oublie des suites qui vérifient la notion intuitive de suite globalement croissante, comme $\left(1-\dfrac{1}{n}+(-1)^n\right)$. Il resterait d'ailleurs à caractériser ces suites oubliées.

On aura remarqué en tous cas que comme souvent en mathématiques, la notion qui est proche de la notion intuitive est bien plus complexe que la notion simplificatrice habituellement utilisée.