

DM14 pour lundi 24/03

Des matrices carrées, des polynômes et des limites.

Exponentielle d'une matrice carrée

On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers naturels, des nombres réels et des nombres complexes respectivement. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels ; X étant une variable indéterminée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degrés inférieurs à n ; et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On agit semblablement avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel supérieur à 2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; et $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui s'écrivent $I_n + N$, où $N \in \mathcal{N}$, dites matrices unipotentes.

Partie I. Exponentielle d'une matrice (carrée) diagonale

Pour tous complexes $d_1, \dots, d_n$ on note $\text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ la matrice carrée d'ordre n de diagonale égale à $(d_1, \dots, d_n)$; et on pose

$$\exp\left(\text{Diag}(d_1, \dots, d_n)\right) = \text{Diag}\left(\exp(d_1), \dots, \exp(d_n)\right).$$

1. Montrer que pour tous $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $\exp(D_1 + D_2) = \exp(D_1) \exp(D_2)$.
2. Montrer que l'ensemble $\{\exp(D) : D \in \mathcal{D}\}$ est exactement l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonales et inversibles.
3. Soit $D \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(D) = \exp(D)$.
Donner un majorant du degré minimal d'un tel polynôme.

Partie II. Exponentielle d'une matrice (carrée) nilpotente

Pour tout $N \in \mathcal{N}$, comme la suite de matrices $(N^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, on pose

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + \frac{1}{1!}N + \frac{1}{2!}N^2 + \frac{1}{3!}N^3 + \dots \quad (\text{somme finie})$$

On s'intéresse à l'application $\Phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N \longmapsto \exp(N)$.

4. Montrer que pour tous $N, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N \in \mathcal{N}$ et $AN = NA$ alors $NA \in \mathcal{N}$.
5. En déduire que pour tout $N \in \mathcal{N}$, $\exp(N) \in \mathcal{U}$.

6. Montrer que toute matrice $U \in \mathcal{U}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de U .
7. Montrer que pour tous $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N_1 \in \mathcal{N}, N_2 \in \mathcal{N}$ et $N_1 N_2 = N_2 N_1$ alors $N_1 + N_2 \in \mathcal{N}$.
8. Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$. Montrer que si $N_1 N_2 = N_2 N_1$, alors $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1) \exp(N_2)$.

9. Soit $N \in \mathcal{N}$. En déduire une expression de l'inverse de $\exp(N)$ en fonction de N .

Soient $m \in \mathbb{N}^*$; $L(X) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$; et $E(X) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} X^k$ de $\mathbb{R}_m[X]$.

10. Montrer que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad E(L(x)) = 1 + x + x^m \varepsilon(x)$$

où ε est une certaine fonction de $] - 1; 1[$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en 0 .

11. En déduire que

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (L(X))^k = 1 + X + X^{m+1} Q(X)$$

où Q est un certain polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

12. En déduire que $\mathcal{U}$ est l'ensemble image de l'application Φ .
