DM14 pour lundi 24/03

(avec corrigé)

Exponentielle d'une matrice carrée

On note $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers naturels, des nombres réels et des nombres complexes respectivement. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels ; X étant une variable indéterminée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degrés inférieurs à n ; et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On agit semblablement avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel supérieur à 2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; et $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui s'écrivent $\mathrm{I}_n + N$, où $N \in \mathcal{N}$, dites matrices unipotentes.

Partie I. Exponentielle d'une matrice (carrée) diagonale

Pour tous complexes $d_1, \ldots, d_n$ on note $\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice carrée d'ordre n de diagonale égale à $(d_1, \ldots, d_n)$; et on pose

$$\exp\Big(\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)\Big) = \mathrm{Diag}\Big(\exp(d_1), \ldots, \exp(d_n)\Big).$$

1. Montrer que pour tous $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $\exp(D_1 + D_2) = \exp(D_1)\exp(D_2)$.

L'exponentielle complexe réalise un homomorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Donc le résultat suit par définition. QED.

2. Montrer que l'ensemble $\{\exp(D) \; : \; D \in \mathcal{D}\}$ est exactement l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonales et inversibles.

Soit $D \in \mathcal{D}$. Alors $\exp(D)$ est une matrice diagonale inversible d'après ce qui précède.

Soient $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{C}^*$. Choisissons, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $d_k \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(d_k) = \delta_k$ (car $\delta_k \neq 0$). Alors

$$\mathrm{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \mathrm{Diag}\Big(\exp(d_1), \ldots, \exp(d_n)\Big) = \exp\Big(\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)\Big).$$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

3. Soit $D \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(D) = \exp(D)$. Donner un majorant du degré minimal d'un tel polynôme.

Prenons $D \in \mathcal{D}$, quelle qu'elle soit. Nommons $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ tels que $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Nommons $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\{d_1, \ldots, d_n\}$, et $\delta_1, \ldots, \delta_r \in \mathbb{C}$ ses éléments distincts. Nommons alors P l'unique polynôme d'interpolation de $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ qui prend aux points $\delta_1, \ldots, \delta_r$ les valeurs $\exp(\delta_1), \ldots, \exp(\delta_1)$ respectivement. Alors

$$\forall d \in \{d_1, \ldots, d_n\},\ P(d) = \exp(d).$$

Donc $P(D) = D$.

De plus, le degré minimal d'un tel polynôme est strictement inférieur au nombre d'éléments distincts de la diagonales de D.

Partie II. Exponentielle d'une matrice (carrée) nilpotente

Pour tout $N \in \mathcal{N}$, comme la suite de matrices $(N^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, on pose

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} = \mathrm{I}_n + \frac{1}{1!}N + \frac{1}{2!}N^2 + \frac{1}{3!}N^3 + \cdots \quad \text{(somme finie)}$$

On s'intéresse à l'application $\Phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N \longmapsto \exp(N)$.

4. Montrer que pour tous $N, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N \in \mathcal{N}$ et $AN = NA$ alors $NA \in \mathcal{N}$.

Soient $N, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons que $N \in \mathcal{N}$ et $AN = NA$. Comme $N \in \mathcal{N}$, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$. Alors,

$$(NA)^k = N^k A^k = 0A^k = 0$$

Car $AN = NA \in \mathcal{N}$. QED.

5. En déduire que pour tout $N \in \mathcal{N},\ \exp(N) \in \mathcal{U}$.

Soient $N \in \mathcal{N}$. D'après la formule définissant $\exp(N)$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\exp(N) = \mathrm{I}_n + NA$ et $AN = NA$. Alors $NA \in \mathcal{N}$ d'après ce qui précède. Donc $\exp(N) \in \mathcal{U}$. QED.

6. Montrer que toute matrice $U \in \mathcal{U}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de U.

Soit $N \in \mathcal{N}$. Choisissons $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. Quitte à considérer celui des entiers k et $k+1$ qui est impair, supposons k impair. Alors $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - (-N)^k$. Donc, comme $\mathrm{I}_n N = N \mathrm{I}_n$, d'après les identités algébriques de référence (ici la formule de Bernoulli), $\mathrm{I}_n + N$ est inversible d'inverse égale à $\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k-1} (-1)^\ell N^\ell$. Donc, toute matrice $U \in \mathcal{U}$ est inversible d'inverse égale à

$$U^{-1} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} (-1)^\ell (U - \mathrm{I}_n)^\ell.$$

QED.

---

7. Montrer que pour tous $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N_1 \in \mathcal{N}, N_2 \in \mathcal{N}$ et $N_1 N_2 = N_2 N_1$ alors $N_1 + N_2 \in \mathcal{N}$.

Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons que $N_1 \in \mathcal{N}, N_2 \in \mathcal{N}$ et $N_1 N_2 = N_2 N_1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, comme $N_1 N_2 = N_2 N_1$, d'après les identités algébriques de référence (ici la formule de Newton),

$$(N_1 + N_2)^k = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} \binom{k}{\ell} N_1^{k-\ell} N_2^\ell = \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant k \\ 0 \leqslant k-\ell \leqslant k_1 - 1 \\ 0 \leqslant \ell \leqslant k_2 - 1}} \binom{k}{\ell} N_1^{k-\ell} N_2^\ell$$

Où $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $N_1^{k_1} = 0 = N_2^{k_2}$. Or, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant \ell \leqslant k \\ 0 \leqslant k - \ell \leqslant k_1 - 1 \\ 0 \leqslant \ell \leqslant k_2 - 1 \end{array}\right\} \implies k \leqslant k_1 + k_2 - 2.$$

D'où,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k > k_1 + k_2 - 2 \implies (N_1 + N_2)^k = \sum_{\ell \in \emptyset} \binom{k}{\ell} N_1^{k-\ell} N_2^\ell = 0.$$

D'où $(N_1 + N_2)^{k_1 + k_2 - 1} = 0$, avec $k_1 + k_2 - 1 \in \mathbb{N}$. QED.

---

8. Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$. Montrer que si $N_1 N_2 = N_2 N_1$, alors $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1) \exp(N_2)$.

Supposons que $N_1 \in \mathcal{N}, N_2 \in \mathcal{N}$ et $N_1N_2 = N_2N_1$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{0\leqslant \ell_1 \leqslant k_1-1} \frac{1}{\ell_1!}N_1^{\ell_1}\Big)\Big(\sum_{0\leqslant \ell_2 \leqslant k_2-1} \frac{1}{\ell_2!}N_2^{\ell_2}\Big)\\
&= \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1 \leqslant k_1-1\\ 0\leqslant \ell_2 \leqslant k_2-1}} \frac{1}{\ell_1!}N_1^{\ell_1}\frac{1}{\ell_2!}N_2^{\ell_2}\\
&= \sum_{0\leqslant k \leqslant k_1+k_2-2}\ \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1 \leqslant k_1-1\\ 0\leqslant \ell_2 \leqslant k_2-1\\ \ell_1+\ell_2=k}} \frac{1}{\ell_1!}N_1^{\ell_1}\frac{1}{\ell_2!}N_2^{\ell_2} \qquad \text{(Partition des indices)}\\
&= \sum_{0\leqslant k \leqslant k_1+k_2-2} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1 \leqslant k_1-1\\ 0\leqslant \ell_2 \leqslant k_2-1\\ \ell_1+\ell_2=k}} \frac{(\ell_1+\ell_2)!}{\ell_1!\ell_2!}N_1^{\ell_1}N_2^{\ell_2}\\
&= \sum_{0\leqslant k \leqslant k_1+k_2-2} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1 \leqslant k\\ 0\leqslant \ell_2 \leqslant k\\ \ell_1+\ell_2=k}} \frac{(\ell_1+\ell_2)!}{\ell_1!\ell_2!}N_1^{\ell_1}N_2^{\ell_2} \qquad (N_1^{\ell_1}=0 \text{ si } \ell_1 > k_1-1 \ldots)\\
&= \sum_{0\leqslant k \leqslant k_1+k_2-2} \frac{1}{k!} \sum_{0\leqslant \ell_2 \leqslant k} \binom{k}{\ell} N_1^{k-\ell_2}N_2^{\ell_2}\\
&= \sum_{0\leqslant k \leqslant k_1+k_2-2} \frac{1}{k!}(N_1+N_2)^k \qquad (N_1N_2 = N_2N_1)
\end{aligned}$$

QED.

---

9. Soit $N \in \mathcal{N}$. En déduire une expression de l'inverse de $\exp(N)$ en fonction de N.

D'après 5 et 6, $\exp(N)$ est inversible et

$$\exp(N)^{-1} = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} (-1)^\ell(\exp(N) - \mathrm{I}_n)^\ell\,.$$

Puis, d'après 8, $\exp(N)^{-1} = \exp(-N)$; donc

$$\exp(N)^{-1} = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}N^\ell\,.$$

QED.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$; $L(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k}X^k$; et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}X^k$ de $\mathbb{R}_m[X]$.

10. Monter que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad E(L(x)) = 1 + x + x^m\varepsilon(x)$$

où ε est une certaine fonction de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en 0 .

Soit $x \in]-1;+\infty[$. On a alors

$$\ln(1+x) = L(x) + x^m\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad L(x) = xb_1(x) \qquad \text{(voir plus bas)};$$

puis

$$
\begin{aligned}
E(L(x)) &= \exp(L(x)) - L(x)^m \varepsilon_2(L(x)) \\
&= \exp(L(x)) - x^m b_1(x)^m \varepsilon_2(x b_1(x)) \\
&= \exp\Big(\ln(1+x) - x^m\varepsilon_1(x)\Big) - x^m\varepsilon_3(x) \\
&= \exp\Big(\ln(1+x)\Big)\exp\Big(-x^m\varepsilon_1(x)\Big) - x^m\varepsilon_3(x) \\
&= (1+x)\exp\Big(-x^m\varepsilon_1(x)\Big) - x^m\varepsilon_3(x) \\
&= (1+x)\Big(1 - x^m\varepsilon_1(x) - x^m\varepsilon_1(x)\varepsilon_4\big(-x^m\varepsilon_1(x)\big)\Big) - x^m\varepsilon_3(x) \\
&= 1 - x^m\varepsilon_1(x) - x^m\varepsilon_1(x)\varepsilon_4\big(-x^m\varepsilon_1(x)\big) \\
&\quad + x - x^m x\varepsilon_1(x) - x^m x\varepsilon_1(x)\varepsilon_4\big(-x^m\varepsilon_1(x)\big) \\
&\quad - x^m\varepsilon_3(x) \\
&= 1 + x + x^m\varepsilon_5(x)
\end{aligned}
$$

Où les ε_i et b_1 sont des fonctions définies autour de 0, avec les premières de limite nulle en ce point, et la dernière bornée autour de ce point.

En exemple (rappel), on peut définir $\varepsilon_1 :]-1;+\infty[\to]-\infty;+\infty[$ comme suit :

$$
\forall x \in]-1;+\infty[, \quad \varepsilon_1(x) = \begin{cases} \big(\ln(1+x) - L(x)\big)/x^m & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

et $\varepsilon_2 :]-\infty;+\infty[\to]-\infty;+\infty[$ comme suit :

$$
\forall y \in]-\infty;+\infty[, \quad \varepsilon_2(y) = \begin{cases} \big(\exp(y) - E(y)\big)/y^m & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.
$$

QED.

---

11. En déduire que

$$
\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(L(X))^k = 1 + X + X^{m+1}Q(X)
$$

où Q est un certain polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Nommons R et Q le reste et le quotient de la division euclidienne du polynôme $E \circ L$ par le polynôme non nul X^{m+1}. Alors, $E(L(X)) = R(X) + X^{m+1}Q(X)$, avec $\deg(R) \leqslant m$. Donc

$$
\forall x \in]-1;1[, \quad E(L(x)) = R(x) + x^m x Q(x) = R(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^m).
$$

Donc, par unicité des coefficients d'un développement limité à l'ordre, $R(X) = 1 + X$. QED.

---

12. En déduire que $\mathcal{U}$ est l'ensemble image de l'application Φ.

Soit $N \in \mathcal{N}$. Choisissons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{m+1} = 0$. Posons $N_0 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$. Alors, comme plus haut, $N_0 = NA$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $AN = NA$; donc $N \in \mathcal{N}$. Puis, d'après ce qui précède, $\mathrm{I}_n + N = \exp(N_0)$.

C'est que tout élément de $\mathcal{U}$ s'écrit $\exp(N_0)$ avec $N_0 \in \mathcal{N}$. Or, d'après 5, tout élément de cette forme est de $\mathcal{U}$. QED.

***

L'exponentielle d'une matrice carrée apparaît notamment lors de la résolution d'un système *d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants (programme de deuxième année). Et les EDL's sont indispensables pour décrire les évolutions des phénomènes naturelles. Ici, on n'a pas traité de l'exponentielle d'une matrice complexe en général. En deuxième année, on pourra définir l'exponentielle matricielle comme application de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *à l'aide de limites (évidemment) puis on pourra montrer (avec peine, via la décomposition de Dunford-Jordan) que cette application induit un homomorphisme* surjectif *du groupe* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$ *dans le groupe* $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr