Thèmes : polyômes et fractions rationnelles, matrices, limites.

Vrai ou faux ? En justifiant.

1. Qu'on donne $A, B \in \mathbb{C}[X]$ quels qu'ils soient.

a) Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, si $A(a) = A(b) = 0$ alors $(X - a)(X - b)$ divise A.

b) Si $A, B \neq 0$ alors $A = B$ si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la multiplicité de α dans A est égale à la multiplicité de α lui-même dans B.

c) A est une constante non nul si, et seulement si, A n'admet aucune racine complexe.

d) Si $(A, B) \neq (0, 0)$, alors les racines complexes communes à A et B sont exactement les racines complexes de $A \wedge B$.

2. Qu'on donne $A, B, P \in \mathbb{C}[X]$ quels qu'ils soient, avec $B \neq 0$.

a) Si $P^2 | A$ alors $P | A$ et $P | A'$.

b) Si $P | A$ et $P | A'$ alors $P^2 | A$.

c) Si $\left(\dfrac{A}{B}\right)' = 0$ alors $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}$.

d) Pour tout $R \in \mathbb{C}(X)$, $R \in \mathbb{R}(X)$ si, et seulement si, $\overline{R} = R$.

3. Qu'on donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ est inversible.

b) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $MX \in \mathbb{R}X$, alors $M \in \mathbb{R}\mathrm{I}_2$.

c) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$, l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, admet au moins deux solutions.

d) Pour tous $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, si $AP = PA'$ alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

4. Qu'on donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $x \in]-1; 1[$

$$\Big(P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\Big)\Big(Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\Big) = P(x)Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

b) Toute suite réelle positive de limite nulle est décroissante.

walter.ngambou@ac-versailles.fr