1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Donner

- ▷ la décomposition de σ en cycles à supports dijoints
- ▷ une décomposition de σ en produit de transpositions
- ▷ la signature de σ
- ▷ la décomposition en cycles à supports disjoints de σ^{-1}

2. On considère $G = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle sur les fonctions. On appelle $\begin{array}{cccc} D & : & G & \longrightarrow & G \\ & & f & \longmapsto & f' \end{array}$. Vérifier que D est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.

3. Soit φ un morphisme de corps de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$. En étudiant les images possibles pour $\varphi(i)$, montrer que φ est $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ ou que φ est la conjugaison.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

4. Vrai ou faux ? En justifiant.

***a*)** Tout homomorphisme de groupes est injectif si, et seulement si, son noyau est réduit à l'élément neutre du groupe de départ.

***b*)** Le noyau d'un homomorphisme d'anneaux est constitué de tout élément qui envoie à l'unité de l'anneau d'arrivée.

***c*)** Dans tout groupe, les itérés naturels de tout élément constituent un sous-groupe.

5. Vrai ou faux ? En justifiant.

***a*)** Toute fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée positive est croissante.

***b*)** Toute fonction $f : [0, 2025] \to \mathbb{C}$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable de dérivée nulle.

***c*)** La réciproque de toute fonction réelle bijective et dérivable est dérivable.

***d*)** Toute fonction de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et nulle à l'infini est bornée.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr