

Thèmes : polyômes et fractions rationnelles, matrices, limites.

(avec corrigé)

Vrai ou faux ? En justifiant.

1. Qu'on donne $A, B \in \mathbb{C}[X]$ quels qu'ils soient.

a) Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, si $A(a) = A(b) = 0$ alors $(X - a)(X - b)$ divise A .

Pour $A = X$, $a = b = 0$ on a $A(a) = A(b) = 0$ mais $(X - a)(X - b)$ ne divise pas A . Faux!

b) Si $A, B \neq 0$ alors $A = B$ si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la multiplicité de α dans A est égale à la multiplicité de α lui-même dans B .

Pour $A = X$, $B = 2$ on a $A \neq B$, mais la multiplicité dans A de tout $\alpha \in \mathbb{C}$ est égale à la multiplicité de α lui-même dans B . Faux!

c) A est une constante non nul si, et seulement si, A n'admet aucune racine complexe.

Supposons que $A \in \mathbb{C}^*$. Alors A n'admet aucune racine.

Supposons que $A \notin \mathbb{C}^*$. Alors soit $A = 0$, donc A admet une infinité de racines complexes; soit $A \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$, donc A admet des racines complexes (théorème de d'Alembert-Gaus), lesquels sont en nombre fini. En tout cas, A admet au moins une racine complexe.

En somme, l'équivalence est vraie. Vrai!

d) Si $(A, B) \neq (0, 0)$, alors les racines complexes communes à A et B sont exactement les racines complexes de $A \wedge B$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors α est une racine commune à A et B si, et seulement si, $(X - \alpha)$ est un diviseur commun à A et B ; donc si, et seulement si, $(X - \alpha)$ est un diviseur de $A \wedge B$; donc si, et seulement si, α est une racine de $A \wedge B$. Vrai!

On remarquera que si $A = \lambda_A \prod (X - \alpha)^{m_\alpha}$ et $B = \lambda_B \prod (X - \alpha)^{n_\alpha}$, où $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{C}^*$, $(m_\alpha), (n_\alpha) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{C})}$, alors

$$A \wedge B = \prod (X - \alpha)^{\min(m_\alpha, n_\alpha)} \quad \text{et} \quad A \vee B = \prod (X - \alpha)^{\max(m_\alpha, n_\alpha)}.$$

2. Qu'on donne $A, B, P \in \mathbb{C}[X]$ quels qu'ils soient, avec $B \neq 0$.

a) Si $P^2|A$ alors $P|A$ et $P|A'$.

Si $A = P^2Q$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$, alors $A' = PQ_1$ où $Q_1 = 2P'Q + PQ' \in \mathbb{C}[X]$. Vrai !

b) Si $P|A$ et $P|A'$ alors $P^2|A$.

Pour $A = X^3$ et $P = X^2$, $A' = 3X^2$; donc on a $P|A$ et $P|A'$; mais $P^2 \nmid A$. Faux !

En revanche, on montre que pour $P \neq 0$ (pour que $P \wedge P'$ soit défini), si $P|A$ et $P|A'$ et $P \wedge P' = 1$ alors $P^2|A$.

c) Si $\left(\frac{A}{B}\right)' = 0$ alors $\frac{A}{B} \in \mathbb{C}$.

En admettant le lemme ci-après mentionné fondant la bonne définition de la dérivée formelle de toute fraction rationnelle.

Supposons que $\left(\frac{A}{B}\right)' = 0$. Quitte à choisir la forme irréductible de $\frac{A}{B}$, supposons que $A \wedge B = 1$. Alors

$$(\mathcal{R}) \quad A'B - AB' = 0.$$

Donc $AB' \in B\mathbb{C}[X]$. Or $B \neq 0$ et $A \wedge B = 1$; donc d'après le théorème de Gauss; $B' \in B\mathbb{C}[X]$. Or, comme $B \neq 0$, $\deg(B') < \deg(B)$; donc $B' = 0$. Donc $(\mathcal{R})$ devient $A'B = 0$. Donc, comme $B \neq 0$, $A' = 0$. Ainsi $A' = B' = 0$; $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{C}^*$. D'où $\frac{A}{B} \in \mathbb{C}$. Vrai !

Lemme admis en salle.

Dans formule définissant la dérivée formelle d'une fraction rationnelle en passant par sa forme irréductible, on peut choisir une autre forme sans changer la fraction rationnelle dérivée.

Preuve du lemme.

On a $B \neq 0$ puis $(A, B) \neq (0, 0)$; donc posons $D = A \wedge B$. Écrivons

$$\begin{cases} B = \mu B_0 D \\ A = \mu A_0 D \end{cases}$$

où $B_0, A_0 \in \mathbb{C}[X]$ avec B_0 unitaire, et $\mu \in \mathbb{C}^*$, en sorte que $\frac{A}{B} = \frac{A_0}{B_0}$; la seconde forme étant irréductible. Alors $B_0 \neq 0$ et $A_0 \wedge B_0 = 1$. Ensuite,

$$\begin{cases} B' = \mu(B'_0 D + B_0 D') \\ A' = \mu(A'_0 D + A_0 D') \end{cases}.$$

Donc,

$$\begin{cases} AB' = \mu^2(A_0 B'_0 D^2 + A_0 B_0 D D') \\ A'B = \mu^2(A'_0 B_0 D^2 + A_0 B_0 D D') \end{cases}.$$

Donc,

$$\begin{cases} A'B - AB' = (A'_0 B_0 - A_0 B'_0) \mu^2 D^2 \\ B^2 = B_0^2 \mu^2 D^2 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } \boxed{\frac{A'B - AB'}{B^2} = \frac{A'_0 B_0 - A_0 B'_0}{B_0^2}}.$$

QED.

d) Pour tout $R \in \mathbb{C}(X)$, $R \in \mathbb{R}(X)$ si, et seulement si, $\overline{R} = R$.

Supposons que $R \in \mathbb{R}(X)$. Notons $\frac{A}{B}$ la forme irréductible de R dans $\mathbb{C}(X)$. Alors $B, A \in \mathbb{R}[X]$; donc $\overline{B} = B$ et $\overline{A} = A$ d'après la caractérisation des réels parmi les complexes en termes de conjugaison. D'où $\overline{R} = R$.

Supposons que $\overline{R} = R$. Notons $\frac{A}{B}$ la forme irréductible de R dans $\mathbb{C}(X)$. Alors $\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{A}{B}$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, si $P|\overline{A}$ et $P|\overline{B}$ alors $P|A$ et $P|B$. Donc $\overline{A} \wedge \overline{B} = 1$ et $\overline{B}$ est unitaire. Par unicité de la forme irréductible, $\overline{B} = B$ et $\overline{A} = A$. Donc $B, A \in \mathbb{R}[X]$ d'après la caractérisation des réels parmi les complexes en termes de conjugaison. D'où $R \in \mathbb{R}(X)$.

D'où la CNS. Vrai !

3. Qu'on donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ est inversible.

Les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux solutions du système linéaire homogène associé.

Faux !

b) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $MX \in \mathbb{R}X$, alors $M \in \mathbb{R}I_2$.

Que soit donné $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $MX \in \mathbb{R}X$.

Choisissons alors $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $c_1 = c_3 = c_2$; donc $M = c_1 I_2$. Vrai !

c) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$, l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, admet au moins deux solutions.

C'est l'application du lemme admis en cours : pour tout système linéaire homogène, si le nombre de lignes est strictement inférieur au nombre d'inconnues alors le système admet plus d'une solution.

Vrai !

On peut montrer par récurrence sur n , en suivant la méthode du pivot de Gauss pour échelonner en colonnes, que

$\mathcal{P}_n$: Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$, l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, admet au moins un solution autre que le vecteur nul.

(1°) Supposons que $n = 1$.

Que soit donné $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$. Ecrivons $A = \begin{pmatrix} a & a' \end{pmatrix}$. Si $a = 0$ alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, sinon

$$X = \begin{pmatrix} a' \\ -a \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

Donc $\mathcal{P}_n$.

(2°) Supposons que $n > 1$ et que $\mathcal{P}_{n'}$ est vraie pour tout entier naturel $n' < n$. Que soit donné $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$. Deux cas se présentent.

Cas 1 : Les coefficients de la première ligne de A sont nuls sauf éventuellement son premier coefficient.

Ecrivons alors

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ \cdot & A' \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $A' \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{P}_{n-1}$, choisissons $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$A' \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } X = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ convient.}$$

Cas 2 : La première ligne de A admet un coefficient autre que le premier qui est nul.

Choisissons alors $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ tel que $A_{1,j} \neq 0$.

Nommons B la matrice obtenue en transformant A par l'échange de la colonne d'indice 1 avec la colonne d'indice j ; ce qui revient à multiplier A à droite par la matrice $P_{1,j}$. Alors $B_{1,1} = A_{1,j}$; donc $B_{1,1} \neq 0$.

Nommons à présent C la matrice obtenue en transformant B par les transvections successives : $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{B_{1,2}}{B_{1,1}}C_1; \dots; C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \frac{B_{1,n+1}}{B_{1,1}}C_1$; ce qui revient à multiplier B à droite par la matrice inversible $\left(I_{n+1} - \frac{B_{1,2}}{B_{1,1}}E_{1,2}\right) \cdots \left(I_{n+1} - \frac{B_{1,n+1}}{B_{1,1}}E_{1,n+1}\right)$. Alors les coefficients de la première ligne de C sont nuls sauf éventuellement son premier coefficient.

Donc, d'après le cas 1, choisissons un vecteur non nul X_1 tel que $CX_1 = 0$. Or, C étant obtenue à partir de A par opérations élémentaires sur les colonnes, choisissons $P \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ tels que $AP = C$. Alors, comme $X_1 \neq 0$ et que $P \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $PX_1 \neq 0$. Donc $X = PX_1$ convient.

Somme des cas : En tout cas, on trouve au moins un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = 0$. Donc $\mathcal{P}_n$.

(3°) En vertu du principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

d) Pour tous $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, si $AP = PA'$ alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$.

Que soient donnés $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Supposons que $AP = PA'$. Alors $A' = P^{-1}(AP)$; donc $\text{Tr}(A') = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A)$. Vrai !

4. Qu'on donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $x \in]-1; 1[$

$$\left(P(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)\right) \left(Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)\right) = P(x)Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Que soient donnés $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x \in]-1; 1[$. Alors, par (double) distributivité de la multiplication sur l'addition,

$$\left(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right) \left(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)\right) = P(x)Q(x) + x^n \varepsilon_3(x).$$

Où les ε_i sont des fonctions réelles définies autour de 0 et de limite nulle en 0 lui-même, en vertu des propriétés des opérations sur les limites. Vrai !

Cependant, PQ n'est pas nécessairement de degré inférieur à n . Si pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$, on note $[A]_n$ la troncature de A à l'ordre n définie par

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \right]_n \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Alors ci-haut, on tronque le polynôme PQ à l'ordre n pour obtenir un développement limité à l'ordre n .

$$\left(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right) \left(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)\right) = [PQ]_n(x) + x^n \varepsilon_4(x).$$

Où ε_4 est une fonction comme plus haut.

Remarque : si $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ alors

$$[PQ]_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^k p_{k-\ell} q_\ell \right) X^k \in \mathbb{R}_n[X].$$

b) Toute suite réelle positive de limite nulle est décroissante.

Soient $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 (e.g. $(a_n) = (2^{-n})$). Alors la suite $(0, a_0, 0, a_1, 0, a_2, \dots)$ est une suite de réels positifs; elle tend vers 0 mais elle n'est pas décroissante. Faux !

