

THÈME(s)

Polynômes formels et fractions rationnelles

- a) *Anneau des polynômes à une indéterminée* : (i) Définitions et structures : polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{K}$ et notation symbolique à l'aide d'une variable indéterminée ; égalité de deux polynômes formels **par définition** ; somme, produit par un scalaire et produit polynomial ; polynôme constant et inclusion de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}[X]$; **structures d'anneau et propriétés de la multiplication par tout scalaire** (structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, *structure d'algèbre hors programme*). (ii) Degré d'un polynôme formel : degré ; coefficient dominant d'un polynôme non nul ; polynôme unitaire ; degré d'une somme, d'un produit, d'un produit par un scalaire ; coefficient dominant d'un produit de polynômes tous non nuls ; notation $\mathbb{K}_n[X]$; **L'anneau** ($\mathbb{K}[X]$, $+$, $\times$) **est intègre** ; Éléments inversibles (unités) de l'anneau. (iii) Évaluation, composition et substitution : **évaluation d'un polynôme en un point et propriétés opératoires** ; composée d'un couple de polynôme ou évaluation d'un polynôme en un polynôme ; substitution d'une matrice carrée à l'indéterminée ou évaluation d'un polynôme en une matrice carrée.
- b) *Divisibilité et division euclidienne* (et analogies avec $\mathbb{Z}$) : (i) Définitions : divisibilité, diviseur, multiple ; propriétés de la divisibilité : rapport au degrés, stabilité, simplification ; couple de polynômes associés et rapport à la divisibilité. (ii) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$: **théorème de la division euclidienne et algorithme** ; sous-groupes additifs stables par la multiplication par tout polynôme (*HP de 1ère année*) ; divisibilité par un polynôme non nul et reste ; reste et quotient de la division euclidienne **dans un sur-corps** (cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seulement).
- c) *Fonctions polynomiales et racines* : (i) Fonction polynomiale : fonction polynomiale associée à un polynôme formel ; fonction polynomiale d'une partie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$; méthode de Hörner pour l'évaluation polynomiale ; **division euclidienne par** $(X - \omega)$. (ii) Racine / zéro d'un polynôme formel : caractérisation en termes de divisibilité ; **racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines distinctes ; détermination d'un polynôme formel par sa

fonction polynomiale. (iii) (Ordre de) multiplicité d'une racine : ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple ; caractérisation en termes de factorisation et d'évaluation ; **multiplicités de racines distinctes et factorisation** ; degré et nombres de racines comptées avec leurs multiplicités. (iv) Relations entre coefficients et racines (Formules de Viète) : polynôme scindé (constant ou non) ; fonctions symétriques élémentaires en les racines (*formules de Viète pour la somme et le produit des racines à retenir, les autres à retrouver*).

- d) *Dérivation formelle d'un polynôme* : (i) Polynôme dérivé : degré du polynôme dérivé ; dérivé d'une combinaison linéaire (linéarité) ; division par $(X - \omega)^2$; lien entre les fonctions polynomiales associées à A et à A' ; caractérisation d'une racine multiple ; dérivé d'un produit. (ii) Dérivée d'ordre quelconque : degrés des dérivés successives ; dérivés d'une combinaison linéaire (linéarité) ; **formule de Taylor polynomiale** ; division par $(X - \omega)^m$; d'un produit (formule de Leibniz). (iii) Détermination de la multiplicité par les dérivées : multiplicité dans A ; multiplicité dans A' ; multiplicité du conjugué d'un nombre complexe dans un polynôme réel.
- e) *Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$* : (i) Communs diviseurs : PGCD's de deux polynômes non tous les deux nuls ; lemme de préservation des communs diviseurs ; algorithme d'Euclide et unicité du PGCD unitaire noté $A \wedge B$; algorithme d'Euclide étendu et relation de Bézout ; PGCD unitaire **dans un sur-corps** (cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seulement) ; les communs diviseurs de A et B sont les diviseurs de $A \wedge B$. (ii) Couple de polynômes premiers entre eux : théorème de Bézout ; PGCD unitaire et factorisation ; produit de deux polynômes premiers à un troisième. (iii) Communs multiples : PPCM's de deux polynômes tous les deux non nuls ; unicité du PPCM unitaire noté $A \vee B$; les communs multiples de A et B sont les multiples de $A \vee B$; lemme de Gauss (divisibilité d'un produit) ; divisibilité par un produit ; lien entre PGCD unitaire et PPCM unitaire ; PPCM unitaire et factorisation. (iv) Polynômes irréductibles unitaires polynôme non constant et existence d'un facteur irréductible ; divisibilité entre irréductibles unitaires ; lemme d'Euclide (divisibilité d'un produit par un irréductible unitaire) ; théorème de décomposition en facteurs irréductibles.

- f) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$:** (i) **Théorème fondamental de l'algèbre** : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine dans le plan complexe (d'Alembert-Gauss, *non démontré*) ; irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$ (*énumération et caractérisation*). (ii) **Théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$** : tout polynôme complexe non nul se décompose de manière unique à l'ordre près comme produit d'un polynôme de degré 0 et de polynômes unitaires de degré 1 ; divisibilité et racines ; primalité relative et racine commune ; factorisation sur $\mathbb{C}$ de $X^n - 1$. (iii) **Théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$** : tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique à l'ordre près comme produit d'un polynôme de degré 0, de polynômes unitaires de degré 1 et de polynômes unitaires de degré 2 sans racine réelle ; divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ via $\mathbb{C}[X]$; primalité relatives dans $\mathbb{R}[X]$ via $\mathbb{C}[X]$.
- g) Interpolation polynomiale :** (i) (*HP : non exigible*) Base de Newton associée à une n -liste d'éléments distincts. (ii) Base de Lagrange associée à une n -liste d'éléments distincts : formule d'interpolation de Lagrange. (iii) Ensemble des polynômes interpolateurs associés à la liste de points **distincts** $x_0, \dots, x_{n-1}$ et à la liste de valeurs $y_0, \dots, y_{n-1}$. Unicité du polynôme interpolateur de degré strictement inférieur à n .
- h) Fractions rationnelles :** (i) Généralités : notions sur le corps $\mathbb{K}(X)$ (*construction HP*) ; forme irréductible d'une fraction rationnelle (dénominateur unitaire) ; degré d'une somme et d'un produit ; partie entière ; évaluation et fonction rationnelle ; fraction rationnelle dérivée ; fraction rationnelle conjuguée dans $\mathbb{C}(X)$; lemmes préparatoires au **théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$** : lemme des coefficients de Bézout précisés (*HP*) et lemme des divisions successives (*HP*). (ii) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$: énumération des éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ et théorème de décomposition sur $\mathbb{C}$; énumération des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ et théorème de décomposition sur $\mathbb{C}$; caractérisation par conjugaison des fractions rationnelles réelles parmi toutes les complexes. (iii) Calcul de primitives de fonctions rationnelles : primitives de fonctions rationnelles associées aux éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

- a) Théorème de la division euclidienne.
- b) Multiplicités de racines distinctes et factorisation.
- c) Formule de Taylor polynomiale. Unicité des coefficients.
- d) Caractérisation de la multiplicité par les dérivées. Multiplicité dans un polynôme réel et conjugaison.
- e) Relation de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
- f) (*Exo*) ¹ Soit $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$. Pour tout $W \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(W) < \deg(AB)$, il existe un unique $U \in \mathbb{K}[X]$ et un unique $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $W = AU + BV$, $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.
- g) Recherche des racines complexes de $X^n - 1$ et factorisation. Somme et produit de ces racines par les formules de Viète ($n \in \mathbb{N}^*$).
- h) Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Formes d'une fractions rationnelles.
- i) (*Exo*) Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^5 - 1$ et expression algébrique de $\cos(2\pi/5)$.
- j) Degré de la somme d'un couple de fractions rationnelles.
- k) Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ si P est scindé sur $\mathbb{K}$.
- l) (*Exo*) Relation de récurrence entre les fonctions $F_n : x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{1}{((t - \alpha)^2 + \beta^2)^n} dt$ pour $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$. Application : les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
- m) (*Exo*) Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur tout intervalle de son domaine de dérivabilité.

1. Aux volontaires.