 walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 17

Espaces vectoriels

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.

2. $F = \{(a, y, x) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = -1\}$.

3 $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.

4. L'ensemble des fonctions croissantes

5. L'ensemble des polynômes de degré n.

6. L'ensemble des polynômes dont 1 est

racine double.

7. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$.

8. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

Exercice 2.

1. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \mapsto e^x$ est-elle combinaison linéaire de $(x \mapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$?

2. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

3. La famille $(t \mapsto t^{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?

4. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X^2 - 1, (X+1)^2)$.

On ne change pas l'espace engendré si l'on échange deux vecteurs, ou qu'on multiplie un vecteur par un scalaire non nul, ou qu'on ajoute à un vecteur un multiple d'un autre. Ainsi,

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vect}((X-1)^2\ ,\ X^2-1\ ,\ (X+1)^2)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2-2X+1\ ,\ X^2-1\ ,\ X^2+2X+1)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2-2X+1+X^2+2X+1\ ,\ X^2-1\ ,\ X^2+2X+1)\\
&=\mathrm{Vect}(2X^2+2\ ,\ X^2-1\ ,\ X^2+2X+1)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+1\ ,\ X^2-1\ ,\ X^2+2X+1)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+1\ ,\ X^2-1-(X^2+1)\ ,\ X^2+2X+1-(X^2+1))\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+1\ ,\ -1\ ,\ 2X)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2\ ,\ -1\ ,\ 2X)\\
&=\mathrm{Vect}(1\ ,\ X\ ,\ X^2)=\mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

---

5. Soient $(x_0,\dots,x_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Donner, dans $\mathbb{K}[X]$, un supplémentaire de $F=\{P\in\mathbb{K}[X],\ P(x_0)=\cdots=P(x_n)=0\}$.

Exercice 3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, differente de 0_n. Soit φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe $\mathrm{Tr}(M)A-\mathrm{Tr}(A)M$.

1. Démontrer que $\varphi\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$.

2. Déterminer $\ker(\varphi)$. φ est-elle injective ?

3. φ est-elle surjective ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $\lambda\in\mathbb{K}$, le *sous-espace propre* associé à λ est l'ensemble noté $E_\lambda(u)=\{x\in E,\ u(x)=\lambda x\}$.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Démontrer que $E_\lambda(u)=\ker(\varphi_\lambda)$, avec φ_λ un endomorphisme à préciser.

2. Soit u défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\ u(P)=XP'$. Démontrer que u est un endomorphisme et déterminer, pour k dans $[\![0,n]\!]$, $E_k(u)$.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

3. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$. Démontrer que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe.

4. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

5. Soit $(x_1, \ldots, x_r) \in E^r$, non nuls, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ deux à deux distincts, tels que pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. On va démontrer que la famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre dans E.

(a) **Première preuve.** Démontrer le résultat par récurrence sur r.

(b) **Deuxième preuve.** r est fixé. Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ dans $\mathbb{K}^r$ tels que $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r = 0$.

- Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mu_1 \lambda_1^k x_1 + \cdots + \mu_r \lambda_r^k x_r = 0$.
- Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, $\mu_1 P(\lambda_1) x_1 + \cdots + \mu_r P(\lambda_r) x_r = 0$.
- En utilisant l'interpolation de Lagrange, conclure.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, p et q deux projecteurs de E. Soit $r = p + q$.

1. Montrer que r est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors

$$\begin{aligned}(p+q)\circ(p+q) &= p\circ p + p\circ q + q\circ p + q\circ q \\ &= p\circ p + q\circ q \quad \text{par hypothèse.} \\ &= p+q \quad \text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $p+q$ est un projecteur. On a alors $(p+q)\circ(p+q) = p+q$. Donc $p\circ p + p\circ q + q\circ p + q\circ q = p+q$, donc

$$p\circ q + q\circ p = 0.$$

En composant à gauche par p, on obtient $p\circ q + p\circ q\circ p = 0$. En composant à droite par p, on obtient $p\circ q\circ p + q\circ p = 0$, donc $p\circ q = q\circ p$, donc $2p\circ q = 0$ donc $p\circ q = q\circ p = 0$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

2. On suppose que r est un projecteur. Déterminer $\ker(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

En adaptant la question précédente, montrons que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$. On a, comme r est un projecteur, $p \circ q = q \circ p = 0$.

- Image.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = (p+q)(x) = p(x)+q(x)$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$ donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on dispose de $f \in \mathrm{Im}(p)$ et $g \in \mathrm{Im}(q)$ tels que $y = f + g$. Calculons alors

  $$(p+q)(y) = p(f) + q(f) + p(g) + q(g).$$

  Or, $f \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(f) = f$. Donc $q(f) = q(p(f)) = 0$. De même $p(g) = 0$ et $q(g) = g$. Donc $(p+q)(y) = f + g = y$ donc $y \in \mathrm{Im}(p+q)$.

- Noyau.

  Soit $x \in \ker(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0$. Donc $p(x) = -q(x)$. Donc en composant par p à gauche, $p \circ p(x) = -p \circ q(x)$. Or $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$, donc $p(x) = 0$, donc $x \in \ker(p)$. De même $q(x) = 0$, i.e. $x \in \ker(q)$.

  Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$. Donc $x \in \ker(p+q)$.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définition

Exercice 6. ◐○○

Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

- $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
- $F = \{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha);\quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 2z = 0\}$.
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$.
- $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geqslant 0\}$.
- $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 2z\}$.
- $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leqslant 1\}$.
- $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$.
- $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.

Alors

(i) E est un espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 0, 2)$ et $v = (0, 0, 1)$.

(ii) F n'est pas un espace vectoriel car $(0, 0, 0) \notin F$.

(iii) G est un espace vectoriel (c'est un plan de $\mathbb{R}^3$).

(iv) H n'est pas un espace vectoriel : $0 \notin H$.

(v) J n'est pas un espace vectoriel : même si $0 \in J$, on remarque par exemple que $(1, 1, 1) \in J$ mais $-1(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin J$.

(vi) K est un espace vectoriel (c est une droite de $\mathbb{R}3$)

(vii) L n'est pas un espace vectoriel : $(-1, -1) \in L$ mais pas $(-1).(-1, -1)$.

(viii) M n'est pas un espace vectoriel : c'est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

(ix) N n'est pas un espace vectoriel : c'est la réunion de deux droites (on peut par exemple dire que $(1, 1) \in N$, $(-1, 1) \in N$ mais $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2) \notin N$.

Exercice 7. ●◐○

Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

(i) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes.

Non, car $x \mapsto x$ est dans cet ensemble mais pas $x \mapsto -x$.

(ii) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 1\}$.

Non, car 0 n'appartient pas à cet ensemble.

(iii) L'ensemble des suites réelles convergentes.

Oui ! Montrons-le, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Notons E cet ensemble.

- E est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.
- E n'est pas vide car la suite nulle est convergente.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E, λ et μ deux réels. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(iv) L'ensemble des suites monotones.

Non ! Car si l'on prend $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2n)_{n\in\mathbb{N}}$, les deux sont monotones mais $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n(n-2))_{n\in\mathbb{N}}$, et donc $w_0 = 0$, $w_1 = -1$ et $w_2 = 0$, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

(v) L'ensemble des suites qui s'écrivent comme la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Oui ! Montrons-le, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Notons F cet ensemble.

- F est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.
- F n'est pas vide car la suite nulle est somme de la suite nulle, qui est croissante, et de la suite nulle, qui est décroissante.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F, λ et μ deux réels. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissantes. Alors
  - Si λ et μ sont strictement positives, alors $(\lambda a_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(\lambda b_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
  - Si λ et μ sont négatives, alors $(\lambda a_n+\mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\lambda b_n+\mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
  - Si $\lambda > 0$ et $\mu \leqslant 0$, alors $(\lambda a_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(\lambda b_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
  - Si $\lambda \leqslant 0$ et $\mu > 00$, alors $(\lambda b_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\lambda a_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8. ●◐○ Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A|x|\}$ est un sous-espace vectoriel, mais que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant |x|\}$ n'en est pas un.

Déjà la fonction nulle appartient à F. Ensuite, si f et g sont dans F, on dispose de A et de B strictement positifs tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant A|x|$ et $|g(x)| \leqslant B|x|$. Donc, si λ et μ sont dans $\mathbb{R}$, et x est dans $\mathbb{R}$, $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant (|\lambda|A + |\mu|B)|x|$, donc $\lambda f + \mu g$ est dans F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
En revanche $\varphi : x \mapsto |x|$ est dans G mais pas 2φ. Donc G n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2.2 Combinaisons linéaires et Vect, familles libres

Exercice 9 (Combinaisons linéaires). ●○○

1. On considère les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, m)$, où m est un réel. À quelle condition sur le paramètre m le vecteur v_3 est-il combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

On résout le système $v_3 = xv_1 + yv_2$ d'inconnues x et y réelles.

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x + 3y = -1 \\ x - 3y = m \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 7y = -7 \\ -y = m - 3 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2y + 3 = 1 \quad = m - 3 \end{cases}$$

Donc il y a une unique solution si, et seulement si $m = 4$.

---

2. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $P = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $Q = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et de $R = X^2 + 7X - 2$?

Oui, $2Q + 3R = P$.

---

3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos(2x)$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et de $x \mapsto \cos^2(x)$? De $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$?

Oui pour la première ! $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Mais non pour la seconde : supposons qu'il existe λ et μ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x).$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\mu = 1$. En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda = -1$. Donc $\cos(2x) = -\sin(x) + \cos(x)$. Ceci est absurde, en évaluant en $-\frac{\pi}{2}$, on obtient $-1 = 1$.

Exercice 10. ●●○ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ soit combinaison linéaire des vecteurs $\left(1, j, j^2\right), \left(j, j^2, 1\right), \left(j^2, 1, j\right)$.

On note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$. Alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ \lambda j + \mu j^2 + \nu = y \\ \lambda j^2 + \mu + \nu j = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = j^2 y \quad L_2 \leftarrow j^2 L_2 \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = jz \quad L_3 \leftarrow j L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ 0 = j^2 y - x \quad L_2 \leftarrow j^2 L_2 \\ 0 = jz - x \quad L_3 \leftarrow j L_3 \end{cases}$$

Donc une CNS pour qu'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de (u, v, w) est $x = j^2 y = jz$.

Exercice 11. ●◐○ Les systèmes suivants de vecteurs sont-ils libres ?

(i) $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, a, b)$, $u_3 = (1, a^2, b^2)$ (on discutera selon la valeur de a et b)

Il faut résoudre un système linéaire : $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2y = 0 \\ x + by + b^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (a-1)y + (a^2-1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (b-1)y + (b^2-1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow (S)$$

Si $a = 1$ ou $b = 1$, ou $a = b$ alors la deuxième ligne s'annule, donc on a un système échelonné avec deux équations uniquement, donc il admet des solutions non triviales. Donc la famille n'est pas libre. En revanche, on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + (a+1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2/(a-1) \\ y + (b+1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3/(b-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + (a+1)z = 0 \\ (b-a)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On a alors un système échelonné à trois équations, trois inconnues, donc il n'a qu'une seule solution, la solution nulle, donc la famille est libre !

(ii) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \sin(x+1)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x+2)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x+3)$.

Question plus piégeuse, mais en fait assez simple. Il **faut savoir** qu'il y a des formules permettant d'explrimer $\sin(p) + \sin(q)$ en fonction de $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$:

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Donc pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_3(x) &= \sin(x+1) + \sin(x+3) \\ &= 2\sin\left(\frac{x+1+(x+3)}{2}\right)\cos\left(\frac{x+1-(x+3)}{2}\right) \\ &= 2\sin(x+2)\cos(-1) \\ &= 2\cos(1)f_2(x). \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f_1 - 2\cos(1)f_2 + f_3 = 0$, donc la famille est liée.

(iii) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \ln(x+1)$, $f_2 : x \mapsto f_1 \circ f_1$, $f_3 : x \mapsto f_1 \circ f_1 \circ f_1$.

Soient λ, μ et ν tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0$. Alors pour tout x tel que $f_1(x) \neq 0$,

$$\lambda + \mu\frac{f_2}{f_1} + \nu\frac{3_3}{f_1} = 0.$$

Or, quand $u \to +\infty$, $\dfrac{\ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{f_3(x)}{f_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par unicité de la limite, $\lambda = 0$. De même on montre que μ et ν sont nuls.

(iv) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

SOIENT $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$, i.e. tels que pour tout x,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{a_i x} = 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Soit alors

$$A = \{i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}.$$

Si A est vide, c'est gagné. Sinon soit $p = \sup(A)$. Alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e^{a_i x} = 0,$$

avec $\lambda_p \neq 0$. Alors, en divisant par e^{px} et en faiant x vers $+\infty<$ on obtient $\lambda_p = 0$ absurde ! Donc $A = \emptyset$.

Exercice 12. ●●○

1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

Pour tout entier naturel k,

$$P(2k\pi)\sin(2k\pi) + Q(2k\pi)\cos(2k\pi) = 0,$$

i.e. $Q(2k\pi) = 0$. Donc Q admet une infinité de racines, donc Q est nul. De même, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ donc P est nul.

---

2. On pose, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f_p : x \mapsto x^p \sin(x)$ et $g_q : x \mapsto x^q \cos(x)$. Que peut-on dire de la famille $(f_p)_{p \geqslant 0} \cup (g_q)_{q \geqslant 0}$?

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et $\mu_0, \dots, \mu_m$ $n+m$ réels tels que

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda_p f_p + \sum_{q=0}^{m} \mu_q g_q = 0.$$

Alors si l'on pose $P(X) = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p X^p$ et $Q(X) = \sum_{q=0}^{m} \mu_q X^q$, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Donc, par la question précédente, $P = Q = 0$.

Exercice 13. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E. Pour tout k, on pose $v_k = u_1 + \dots + u_k$.

1. Démontrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

2. Démontrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.

Exercice 14 (Un excursion dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel)**.** ●●◐ Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$)

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des vecteurs $(\ln(p_k))_{k=1,2,\dots,p}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}, +, .)$ est nulle, alors tous les coefficients sont nuls.

2. En déduire qu'il ne peut pas exister un ensemble fini de nombres réels $(x_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble fini) tel que pour tout réel x, il existe une famille $(q_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels tels que $x = \sum_{i\in I} q_i.x_i$. *Ceci s'interprète en disant que* $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de dimension infinie.*

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels, espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 15. ●◐○ Soit $E = \mathbb{R}^3$, et soient

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$

- $g = (1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(g)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Déjà F est non vide parce que $(0, 0, 0) \in F$.

Ensuite, si (x, y, x) et (x', y', z') sont dans F, et λ et μ sont dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'),$$

et

$$(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x - y + z) + \mu(x' - y' + z') = 0,$$

donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque méthode : remarquez bien que puisque F est défini par une condition, pour vérifier l'appartenance à F, il suffit de vérifier cette condition !

---

2. En résolvant le système $x - y + z = 0$, déterminer une base de F.

On résout le système $x - y + z = 0$. Il est déjà échelonné, donc on pose $z = \alpha$ et $y = \beta$, d'où $x = -\alpha + \beta$, donc l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(u, v), \quad \text{où} \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc (u, v) engendre F et est libre dans F, donc (u, v) forme une base de F.

---

3. Montrer que $E = F \oplus G$.

On pose $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de montrer qu'en concaténant les bases de F et de G, on obtient une base de E : résolvons pour cela le système $\lambda u + \mu v + \nu w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'inconnues réelles λ, μ, ν. La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & a+c \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & a+c \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -a+2b-c \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

Donc le système a une unique solution, $\lambda = b-a$, $\mu = -a+2b-c$ et $\nu = a-b+c$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc la somme est directe.

---

4. Soit p le projecteur sur G parallèlement à F. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de $p(x, y, z)$.

Par l'expression précédente, on sait que pour tout (x, y, z) dans F, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y - z)u + (-x + 2y - z)v + (x - y + z)w,$$

donc la composante selon G de (x, y, z) est $(x - y + z)w$, donc

$$p(x, y, z) = (x - y + z, x - y + z, x - y + z).$$

Exercice 16. ●◐○ Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

(i) $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$

Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On dispose de $y \in F \cap G$ et de $z \in F \cap H$ tels que $x = y + z$. Alors $y \in F$, $z \in F$, donc $x \in F$. De plus, $y \in G$, $z \in H$, donc $x \in G + H$. Donc $x \in F \cap (G + H)$.

(ii) $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Soit $x \in F + (G \cap H)$. Alors on dispose de $y \in F$, de $z \in G \cap H$, tels que $x = y + z$. Alors $y \in F$, $z \in G$, donc $x \in F + G$. De même, $y \in F$, $z \in H$, donc $x \in F + H$. Donc $x \in F + H$.

Exercice 17. ●●○

Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On suppose que $\begin{cases} E_1 + E_3 = E_2 + E_3, \\ E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3, \\ E_1 \subset E_2. \end{cases}$

1. Montrer que $E_1 = E_2$.

Montrons que $E_2 \subset E_1$. Soit $x \in E_2$. Alors $x \in E_2 + E_3 = E_1 + E_3$, donc on dispose de y dans E_1 et de z dans E_3 tels que $x = y + z$. Alors $y \in E_1$, donc $y \in E_2$, donc $z = x - y \in E_2$, donc $z \in E_2 \cap E_3 = E_1 \cap E_3$. Donc $z \in E_1$, donc $y + z \in E_1$, i.e. $x \in E_1$. D'où le résultat.

2. En déduire le corollaire suivant : si $E_1 \oplus E_3 = E_2 \oplus E_3$ et $E_1 \subset E_2$, alors $E_1 = E_2$.

Il suffit de remarquer qu'en cas de somme directe, on a $E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.

3. Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas $E_1 \subset E_2$.

Il suffit de prendre trois droites du plan deux à deux non confondues.

Exercice 18. ●●○ Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts, et

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n) = 0\},$$
$$G = \mathbb{R}_n[X].$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$.

Analyse. Supposons que $P = Q + R$ avec Q dans F et R dans G. Comme $Q \in F$, on sait que $Q(\alpha_1) = \dots = Q(\alpha_n) = 0$. Comme les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux distincts, on en

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

déduit que $(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ sont deux à deux distincts, donc si $A=\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$, alors $Q=AS$. Donc $P=AS+R$ avec $\deg(R)<\deg(A)$. Par unicité de la division euclidienne des polynômes, S est le quotient et R est le reste de la division euclidienne de P par A. D'où l'unicité.

Synthèse. Soit (S,R) le quotient et le reste de la division euclidienne de P par A. Posons $Q=AS$.

- par définition de la division euclidienne, $R\in\mathbb{R}_n[X]$.
- par définition de la division euclidienne, $P=AS+R$.
- par définition de A, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $A(\alpha_i)=0$ donc $Q(\alpha_i)=0$ donc $Q\in F$.

D'où l'existence, et la supplémentarité !

Exercice 19. ●●◐ Soient E, F et G les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$E=\{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-u_{n+2}-u_{n+1}+u_n=0\}.$$
$$F=\{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}+u_n=0\}.$$
$$G=\{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0\}.$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La vérification « à la main » ne pose pas de problème, mais je voudrais présenter une autre méthode, liée aux applications linéaires. Soit S l'application de shift :

$$S:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.\end{array}\right.$$

Alors S est linéaire, et $E=\ker(S^3-S^2-S+\mathrm{Id})$, $F=\ker(S+\mathrm{Id})$, $G=\ker(S^2-2S+\mathrm{Id})$, donc E, F et G sont des espaces vectoriels.

---

2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

Déjà on vérifie que F et G sont dans E.

- si (u_n) est dans F, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = 0$, et donc

$$(u_{n+3} + u_{n+2}) - 2(u_{n+2} + u_{n+1}) + (u_{n+1} + u_n) = 0,$$

donc (u_n) est dans E.

- si (u_n) est dans G, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, i.e.

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} + u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0,$$

i.e. $u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$, donc (u_n) est dans E.

Ensuite, pour montrer que F et G sont supplémentaires, décrivons plus en détail les éléments de F et de G :

- les éléments de F sont les suites vérifiant $u_{n+1} = -u_n$, i.e. les suites géométriques de raison -1, i.e. les suites de la forme $a.(-1)^n$, avec a un réel.
- les éléments de G sont les suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, i.e., comme 1 est racine double du polynôme carctéristique de la relation de récurrence, les suites de la forme $b + cn$, avec b et c deux réels.

Montrons alors que toute suite de E s'écrit de manière unique sous la forme $a.(-1)^n + b + cn$, avec a, b et c trois réels.

Analyse. Soit (u_n) dans E telle que pour tout entier naturel n, $u_n = a.(-1)^n + b + cn$, avec a, b et c trois réels. Alors

$$\begin{cases} u_0 = a + b, \\ u_1 = -a + b + c, \\ u_2 = a + b + 2c, \end{cases}$$

donc $c = \dfrac{u_2 - u_0}{2}$, $b = \dfrac{2u_1 + 3u_0 - u_2}{4}$ et $a = \dfrac{u_0 - 2u_1 + u_2}{4}$. D'où l'unicité de la décomposition.

Synthèse. Soit (u_n) dans E. Posons pour n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n = a.(-1)^n + b + cn,$$

avec $c = \dfrac{u_2 - u_0}{2}$, $b = \dfrac{2u_1 + 3u_0 - u_2}{4}$ et $a = \dfrac{u_0 - 2u_1 + u_2}{4}$. Alors $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ et pour tout entier naturel n, on a $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$ **et** $v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} - v_n$, donc par une récurrence immédiate, $v_n = u_n$ pour tout entier naturel n.

3 Applications linéaires

3.1 Définitions

Exercice 20. ●○○ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z) \end{array} \right.$
3. $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0) \end{array} \right.$
4. $h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2) \end{array} \right.$
5. $\theta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P^2 \end{array} \right.$
6. $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P(X) \mapsto P(X + 1) \end{array} \right.$

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

7. $\kappa : \left| \begin{array}{rcl} \{\text{suites convergentes}\} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} u_n \end{array} \right.$

8. $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array} \right.$

Non, Non, Oui, Non, Non, Oui, Oui, Oui

3.2 Noyau et image

Exercice 21. ◐○○ Soit φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z).$$

Montrer que φ appartient à $\mathrm{GL}(E)$ et déterminer φ^{-1}.

Déjà φ est linéaire car canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ensuite, déterminons la bijectivité de φ. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\varphi(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ 4x - y + z = b \\ 2x + 2y + 3z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y + z = b - 4a & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -2y + 3z = c - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y + z = b - 4a \\ 25y = c + 10a - 3b & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{25}(10a - 3b + c) \\ z = \frac{1}{25}(-10a - 2b - 9c) \\ x = \frac{1}{25}(5a + 6b - 2c) \end{cases}$$

D'où le résultat : φ est bijective et pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{25}(5a + 6b - 2c, 10a - 3b + c, -10a - 2b - 9c).$$

Exercice 22. ●○○ Soient f, g, h, k les 4 endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$,

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

- $f(P) = P'$,
- $g(P) = XP$,
- $h(P)' = P$ et $h(P)(0) = 0$,
- $P - k(P) \in X^5\mathbb{R}[X]$ et $\deg(k(P)) < 5$.

Ces endomorphismes sont-ils injectifs ? Surjectifs ? Déterminer leur noyau et leur image.

Alors

(a) f n'est pas injective car $\ker(f)$ est l'ensemble des polynômes constants. Elle est surjective car si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P = Q'$ où $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.

(b) g est injective car si $XP = 0$ alors $P = 0$. Elle n'est pas surjective car si P est non nul, $\deg(g(P)) = 1 + \deg(P) > 0$, donc les polynômes constants n'ont pas d'antécédent par g.

(c) h est injective : si $h(P) = 0$, alors, comme $h(P)' = P$, $P = 0$. En revanche elle n'est pas surjective car l'image de h est incluse dans les polynômes s'annulant en 0. Elle est d'ailleurs égale à ce sous-espace vectoriel, en posant, si P s'annule en 0, $Q = P'$. Alors $h(Q) = P$, car $h(Q)' = Q = P'$ et $h(Q)$ et P s'annulent en 0.

(d) Enfin, k n'est pas surjective : son image est égal à $\mathbb{R}_4[X]$. Il est inclus dedans car un reste de division euclidienne par X^5 est nécessairement de degré inférieur ou égal à 4, et il contient $\mathbb{R}_4[X]$ car si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4, il est égal à son reste dans la division euclidienne par X^5.
k n'est pas non plus injective : $k(X^5) = 0$. On peut même montrer que $\ker(k) = \{X^5 P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. En effet, si $P \in \ker(k)$, son reste dans la division euclidienne par X^5 est nul, donc $P \in \{X^5 P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. Réciproquement, tout multiple de X^5 a un reste dans la division euclidienne par X^5 nul.

Exercice 23. ●●○ Montrer que l'application partie entière Ent : $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Linéarité.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Soient $R_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $R_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$ deux fractions rationnelles, E_1 et E_2 leurs parties entières. Alors $P_1 = E_1Q_1 + F_1$ et $P_2 = E_2Q_2 + F_2$, avec $\deg(F_1) < \deg(Q_1)$ et $\deg(F_2) < \deg(Q_2)$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\lambda\frac{P_1}{Q_1} + \mu\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\lambda P_1Q_2 + \mu P_2Q_1}{Q_1Q_2}.$$

Or, $\lambda P_1Q_2 + \mu P_2Q_1 = \lambda E_1Q_1Q_2 + \mu E_2Q_2Q_1 + \lambda F_1Q_2 + \mu F_2Q_1$, avec $\lambda F_1Q_2 + \mu F_2Q_1 < Q_1Q_2$. Donc la partie entière de $R_1 + R_2$ est $\lambda E_1 + \mu E_2$.

Noyau.

On sait enfin qu'une fraction rationnelle a une partie entière nulle si, et seulement si son degré est strictement négativ, donc $\ker(\mathrm{Ent}) = \{R \in \mathbb{K}(X),\ \deg(R) < 0\}$.

Exercice 24. ●●○ Soit $\Psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\Psi(f) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt \end{array} \right.$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire bien définie. Est-elle injective ? est-elle surjective ?
2. Montrer que $\operatorname{Im}\Psi = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = 0, g'(0) = 0, g' \text{ est dérivable en } 0\}$.

Exercice 25. ●◐○ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et $f : F \times G \to E, \quad (x,y) \mapsto x + y$. Montrer que f est une application linéaire, préciser son image et son noyau.

Exercice 26. ●●○ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Montrer que

$$f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \operatorname{Ker} f \subset B + \operatorname{Ker} f$$

Exercice 27. ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f+g)$.

On a $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$. En effet, soit $x \in \ker f \cap \ker g$. Alors $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0$. Mais par exemple, si $f = \mathrm{Id}$ et $g = -\mathrm{Id}$, alors $\ker f \cap \ker g = \{0\}$ et $\ker(f+g) = E$.

2. Comparer $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im}(f+g)$.

On a $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, alors on dispose de x dans E tel que $f(x) + g(x) = y$. La réciproque est fausse en prenant $f = -g = \mathrm{Id}$.

3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.

On a $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. En effet, si $x \in \ker(f)$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. La réciproque est fausse : prendre $f(x, y) = (0, x)$. Alors $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

4. Comparer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

On a $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, mais l'inclusion réciproque est fausse avec le même contre-exemple.

Exercice 28. ●●◐ Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $x \in u^{-1}(u(F))$. Alors $u(x) \in u(F)$, i.e. on dispose de $y \in F$ tel que $u(x) = u(y)$. Alors $u(x-y) = 0$, i.e. $x - y \in \ker(u)$. Donc $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in \ker(u)$. Donc $u^{-1}(u(F)) \subset F + \ker u$.

Synthèse. Montrons que $F + \ker u \subset u^{-1}(u(F))$. Soit $x \in F + \ker u$. Alors on dispose de $y \in F$ et $z \in \ker u$ tels que $x = y + z$. Alors $u(x) = u(y) + u(z) = u(y) \in u(F)$.

---

2. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $x \in u(u^{-1}(F))$. Alors On dispose de $y \in u^{-1}(F)$ tel que $x = u(y)$. Alors $u(y) \in F$, i.e. $x \in F$. Donc $x \in F \cap \operatorname{Im} u$.

Synthèse. Si $x \in F \cap \operatorname{Im} u$, alors on dispose de $y \in E$ tel que $x = u(y)$. De plus $x \in F$ donc $u(y) \in F$ i.e. $y \in u^{-1}(F)$. Donc $x \in u(u^{-1}(F))$.

---

3. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Pour avoir égalité des deux ensembles, il faut donc avoir $F + \ker(u) = F \cap \operatorname{Im}(u)$. Comme $F \cap \operatorname{Im}(u) \subset F \subset F + \ker(u)$, la condition se réécrit simplement $F + \ker(u) \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$, i.e. $F \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$, i.e. $F = \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$. Réciproquement si $F = \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$, on a bien $F + \ker(u) = F \cap \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 29. ●●○

1. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi : f \mapsto f''$.

(i) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Déjà, $\varphi(E) \subset E$ car la dérivée seconde d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$. Soient f et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{E}$. Alors $(\lambda f + \mu g)'' = \lambda f'' + \mu g''$.

(ii) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$.

$\ker(\varphi) = \{f \in \mathscr{C}^\infty,\ f'' = 0\} = \{x \mapsto ax+b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. De plus, l'existence de primitives assure que $\operatorname{Im}(f) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(iii) A-t-on $\ker(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = E$?

Non, car $\operatorname{Im}(\varphi) = E$! !

2. Soient F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques, $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et ψ : $f \mapsto f'$.

(i) Montrer que $\psi \in \mathscr{L}(F)$.

Même résultat que dans la première question.

(ii) Montrer qu'un élément g de F admet sur $\mathbb{R}$ une primitive 2π-périodique si, et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$.

Soit g dans F.

Supposons que g est 2π-périodique de moyenne nulle, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{x+2\pi} g(t)dt &= \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt \\ &= \int_0^x g(t)dt + \int_x^{2\pi} g(t)dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} g(t)dt\end{aligned}$$

Déjà

$$\int_0^x g(t)dt + \int_x^{2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$$

par hypothèse. Par un changement de variables $u = x + 2\pi$ et par 2π-périodicité de g,

$$\int_{2\pi}^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt\ .$$

Donc $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ est une primitive de g qui est 2π-périodique ; et toute primitive de g est 2π-périodique.

Réciproquement, si g n'est pas de moyenne nulle, écrivons

$$VM(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt$$

et écrivons $g = g - VM(g) + VM(g)$. Alors les primitives de g sont de la forme $x \mapsto h(x) + VM(g)x + K$, avec h périodique et $x \mapsto VM(g)x$ n'est pas bornée donc pas bornée. Donc g n'admet pas de primitive périodique.

(iii) Déterminer $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.

$\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Par la question précédente, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions de valeur moyenne nulle.

(iv) A-t-on $\ker(\psi) \oplus \mathrm{Im}(\psi) = F$?

On a somme directe par le cours.

Exercice 30 (CCP MP). ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

Déjà, si $x \in \ker f$, alors $g \circ f(x) = g(0) = 0$. De plus, si $x \in \ker(g \circ f)$, alors $f(x) = f(g \circ f(x)) = f \circ g(f(x)) = 0$.

Ensuite, si $y \in \mathrm{Im} g \circ f$, alors $y = g \circ f(x)$ avec $x \in E$, donc $y = g(f(x))$, donc $y \in \mathrm{Im} g$.

De plus si $y \in \mathrm{Im} g$, alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = g(x) = g(f(g(x))) = g \circ f(g(x)) \in \mathrm{Im} g \circ f$.

---

2. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.

Analyse. Soit x dans E, supposons qu'il existe $(y, z) \in \ker f \times \mathrm{Im} g$. Alors $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$. Or, $z \in \mathrm{Im} g$, donc $z = g(t)$ avec $t \in E$, donc $f(x) = f(g(t)) = t$. Donc $t = f(x)$ et $z = g(t) = g \circ f(x)$, donc $y = x - z$. D'où l'unicité.

Synthèse. Soit x dans E, posons $z = g \circ f(x)$ et $y = x - z$. Alors les propositions voulues sont vérifiées.

---

3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

On peut conclure $g = f^{-1}$ si et seulement si f est inversible.

---

4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id} \circ f = g \circ f$, donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 31 (CCP MP 2016). ●●◐

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit x dans E.

Analyse. Supposons que $x = y + z$, où $y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) = f(y) + f(z) = y + f(z)$, et $f^2(x) = f(y) + f^2(z) = y + f^2(z)$. Donc, en sommant tout, on trouve

$$x + f(x) + f^2(x) = 3y + z + f(z) + f^2(z).$$

Or, $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ donc on dispose de k dans E tel que $z = f(k) - k$. Donc

$$z + f(z) + f^2(z) = f(k) - k + f^2(k) - f(k) + f^3(k) - f^2(k) = f^3(k) - k = 0,$$

car $f^3 = \mathrm{Id}$. Donc

$$x + f(x) + f^2(x) = 3y,$$

donc $y = \dfrac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$, donc $z = x - y = \dfrac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$.

Synthèse. Posons

$$y = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \text{ et } z = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)).$$

Alors

(i) $y + z = \dfrac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x) + 2x - f(x) - f^2(x)) = x$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

(ii) $f(y) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + f^3(x)) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + x) = y$ donc $y \in \ker(f - \mathrm{Id})$.

(iii)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}(x - f(x) + x - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}((f - \mathrm{Id})(-x) + f^3(x) - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}((f - \mathrm{Id})(-x) + (f - \mathrm{Id})(f^2(x))) \\ &= (f - \mathrm{Id})\left(\frac{1}{3}(-x + f^2(x))\right) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

D'où l'existence de la décomposition, d'où la supplémentarité des deux espaces considérés.

---

2. Montrer que $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

L'inclusion la plus simple est l'inclusion réciproque.

$\boxed{\supset}$ Soit y dans $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = f(x) - x$. Alors

$$(f^2 + f + \mathrm{Id})(y) = (f^2 + f + \mathrm{Id})(f - \mathrm{Id})(x) = (f^3 - \mathrm{Id})(x) = 0,$$

car $f^3 = \mathrm{Id}$. D'où le résultat.

$\boxed{\subset}$ Soit x dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$. Alors on sait que

$$x = y + z \text{ avec } y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \text{ et } z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E).$$

Donc $y = x - z \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$ car $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

Donc $y \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}) \cap \ker(f - \mathrm{Id})$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Mais alors $f^2(y)+f(x)+y=0$ et $f(y)=y$ donc $f^2(y)=y$ donc $3y=0$ donc $y=0$. Donc $x=z\in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$. D'où l'inclusion directe.

3. Montrer que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.

L'inclusion la plus simple est encore l'inclusion réciproque.

$\boxed{\supset}$ Soit y dans $\mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id})$. Alors on dispose de x dans E tel que $y=(f^2+f+\mathrm{Id})(x)$. Alors, comme précédemment, $(f-\mathrm{Id})(y)=(f-\mathrm{Id})(f^2+f+\mathrm{Id})(x)=(f^3-\mathrm{Id})(x)=0$. D'où le résultat !

$\boxed{\subset}$ Soit x dans $\ker(f-\mathrm{Id})$. Alors $f(x)=x$ et $f^2(x)=x$, donc

$$x=\frac{1}{3}(x+x+x)=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))=(f^2+f+\mathrm{Id})\left(\frac{1}{3}x\right)\in \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id}),$$

d'où l'inclusion directe.

3.3 Endomorphismes particuliers

Exercice 32 (Commutation et stabilisation). ●●○

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par g si $g(F)\subset F$.

1. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Soit $x\in\ker(f)$. Alors $f\circ(g(x))=g\circ f(x)=g(0)=0$, donc $g(x)\in\ker f$. De même, si $y\in\mathrm{Im}(f)$, alors on dispose de $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Alors $g(y)=g\circ f(x)=f\circ g(x)=f(g(x))$, donc $g(y)\in\mathrm{Im} f$.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

2. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $\ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ est stable par g.

Soit x dans $\ker(f - \lambda\mathrm{Id})$. Alors $f(x) - \lambda x = 0$, i.e. $f(x) = \lambda x$. Donc $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. De plus, comme $g \circ f = f \circ g$ donc $f(g(x)) = \lambda g(x)$, donc $(f - \lambda\mathrm{Id})(g(x)) = 0$, i.e. $g(x) \in \ker(f - \lambda\mathrm{Id})$. Donc $\ker(f - \lambda\mathrm{Id})$ est stable par g.

Exercice 33. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs qui commutent, i.e. tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

Calculons $(p \circ q) \circ (p \circ q)$.

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q.$$

Donc $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

- Étude de l'image.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Alors on dispose de y tel que $x = p \circ q(y) = p(q(y))$. Donc $x \in \mathrm{Im}(p)$. De plus, $p \circ q = q \circ p$, donc $x = q \circ p(y) = q(p(y))$ donc $c \in \mathrm{Im}(q)$. Donc $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Donc $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Alors

$$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p(q(x)) \\ &= p(x) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(q) \\ &= x \text{ car } x \in \mathrm{Im}(p). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$, d'où l'égalité.

- Étude du noyau.

  Soit $x \in \ker(p \circ q)$. Alors $p \circ q(x) = 0$, donc $q(x) \in \ker(p)$. Donc on peut écrire $x = q(x) + (x - q(x))$. Vérifions que $x - q(x) \in \ker(q)$:

  $$q(x - q(x)) = q(x) - q(q(x)) = q(x) - q(x) = 0.$$

  Donc x s'écrit comme la somme d'un élément de $\ker(p)$ et d'un élément de $\ker(q)$. Donc $\ker(p \circ q) \subset \ker(p) + \ker(q)$.

  Soit $x \in \ker(p) + \ker(q)$. Alors on dispose de $f \in \ker(p)$ et $g \in \ker(q)$ tels que $x = f + g$. Alors

  $$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p \circ q(f + g) \\ &= p \circ q(f) + p \circ q(g) \\ &= q(p(f)) + p(q(g)) \text{ car } p \circ q = q \circ p \\ &= 0 + 0 = 0 \text{ car } f \in \ker(p) \text{ et } g \in \ker(q). \end{aligned}$$

Exercice 34. ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. On suppose que $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$. Soit $r = p + q - p \circ q$.

1. Montrer que r est un projecteur.

Calculons $r \circ r$.

$$\begin{aligned}
r \circ r &= (p+q-p\circ q)\circ(p+q-p\circ q) \\
&= p\circ p + p\circ q - p\circ p\circ q \\
&\quad + q\circ p + q\circ q - q\circ p\circ q \\
&\quad - (p\circ q)\circ p - (p\circ q)\circ q + (p\circ q)\circ(p\circ q) \\
&= p + p\circ q - p\circ q \\
&\quad + q\circ p + q - q\circ p\circ q \\
&\quad - p\circ q\circ p - p\circ q + p\circ q\circ p\circ q \\
&= p + q - p\circ q + q\circ p - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p + p\circ q\circ p\circ q.
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Im} p \subset \ker q$, donc pour tout x, $p(x) \in \mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$, donc $q(p(x)) = 0$, donc $q\circ p = 0$. Donc

$$q\circ p - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p + p\circ q\circ p\circ q = 0.$$

Donc $r\circ r = p+q-p\circ q = r$, donc r est un projecteur.

---

2. Déterminer $\ker(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

Alors

- Déterminons le noyau de r.

  Analyse. Soit $x \in \ker(r)$. Alors $r(x) = 0$, i.e. $(p+q)(x) = p\circ q(x)$, i.e. en composant à gauche par p, $p(x) + p\circ q(x) = p\circ q(x)$, i.e. $p(x) = 0$. Donc $x \in \ker(p)$. De même, en composant à gauche par q, $q\circ p(x) + q(x) = q\circ p\circ q(x)$, i.e., comme $q\circ p = 0$, $q(x) = 0$. Donc $x \in \ker(q)$. Donc $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$.

  Synthèse. Soit $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$. Alors $p(x)+q(x)-p\circ q(x) = 0$.
  Donc $\ker(r) = \ker(p)\cap\ker(q)$.

- Déterminons l'image de r.

Analyse. Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = p(x) + q(x) - p \circ q(x)$. Or, $p(x) - p \circ q(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$ donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Synthèse. Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on dispose de $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $y = p(x) + q(x')$. Alors

$$\begin{aligned}
r(y) &= p(y) + q(y) - p \circ q(y) \\
&= p \circ p(x) + p \circ q(x') + q \circ p(x') + q \circ q(x') - p \circ q \circ p(x) - p \circ q \circ q(x') \\
&= p(x) + p \circ q(x') + 0 + q(x') - 0 - p \circ q(x') \\
&\text{(car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs et } q \circ p = 0) \\
&= p(x) + q(x') \\
&= y.
\end{aligned}$$

Donc $y \in \mathrm{Im}(r)$.

Exercice 35. ●●○ Soit p un projecteur de E.

1. L'ensemble des projecteurs de E est-il un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$?

NON ! Id_E est un projecteur, mais $\mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E = 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas un projecteur.

---

2. Soit $\mathrm{Pr} = \{ap + b\mathrm{Id},\ (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$.

(i) Montrer que Pr est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Déjà $0 = 0.p + 0.\mathrm{Id} \in \mathrm{Pr}$.

Ensuite, soient u et v deux éléments de Pr, λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de a,

b, a' et b' quatre éléments de $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$ et $v = a'p + b'.\mathrm{Id}$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v &= \lambda(ap + b.\mathrm{Id}) + \mu(a'p + b'.\mathrm{Id}) \\ &= (\lambda a + \mu a')p + (\lambda b + \mu b')\mathrm{Id},\end{aligned}$$

donc $\lambda u + \mu v \in \mathrm{Pr}$. Donc Pr est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

(ii) Montrer que Pr est un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, et montrer qu'il est commutatif.

Comme Pr est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, c'est un sous-groupe de $(\mathscr{L}(E), +)$.
De plus, $\mathrm{Id} \in \mathrm{Pr}$ car $\mathrm{Id} = 0.p + 1.\mathrm{Id}$.
Enfin, soient u et v deux éléments de Pr. Alors on dispose de a, b, a' et b' quatre éléments de $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$ et $v = a'p + b'.\mathrm{Id}$. ALors

$$\begin{aligned}u \circ v &= (ap + b\mathrm{Id}) \circ (a'p + b'\mathrm{Id}) \\ &= aa'.p \circ p + ab'.p \circ \mathrm{Id} + ba'\mathrm{Id} \circ p + bb'.\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} \\ &= (aa' + ab' + ba').p + (bb')\mathrm{Id} \in \mathrm{Pr}\,.\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{Pr}, +, \circ)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. De plus,

$$\begin{aligned}v \circ u &= (a'p + b'\mathrm{Id}) \circ (ap + b\mathrm{Id}) \\ &= a'a.p \circ p + a'b.p \circ \mathrm{Id} + ba'\mathrm{Id} \circ p + b'b.\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} \\ &= (a'a + a'b + b'a).p + (b'b)\mathrm{Id} = u \circ v.\end{aligned}$$

Donc l'anneau est commutatif.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

(iii) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, $\mathrm{Id}_E - \lambda p$ est un automorphisme de E.

Si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, $\mathrm{Id} - \lambda p$ est de manière évidente un endomorphisme de E. Reste à montrer qu'il est bijectif. Soit $y \in E$. Résolvons l'équation $\mathrm{Id}(x) - \lambda p(x) = y$ par analyse-synthèse. Si $x \in E$ est solution de l'équation, alors $p(x) - \lambda p(x) = p(y)$, i.e. $p(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}p(y)$. Alors $x = y + \lambda p(x) = y + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}p(y)$. D'où l'unicité d'un antécédent de y par $\mathrm{Id} - \lambda p$. Réciproquement, si $x = y + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}p(y)$, alors

$$\begin{aligned} x - \lambda p(x) &= y + \frac{\lambda}{1-\lambda}p(y) - \lambda p(y) - \frac{\lambda^2}{1-\lambda}p(y) \\ &= y + \frac{\lambda - \lambda(1-\lambda) - \lambda^2}{1-\lambda}p(y) = y. \end{aligned}$$

Donc tout élément de E admet un unique antécédent par $\mathrm{Id} - \lambda p$, donc $\mathrm{Id} - \lambda p$ est un endomorphisme bijectif, i.e. un automorphisme.

(iv) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau Pr.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit u un élément inversible de Pr. Alors on dispose de a et b dans $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$. Si $b = 0$, alors $u = ap$ n'est pas inversible car un projecteur non égal à l'identité n'est pas inversible. Donc nécessairement $b \neq 0$. Donc $p = b\,(\mathrm{Id} - \lambda p)$, avec $\lambda = \dfrac{-b}{a}$. Si $\lambda = 1$, alors $p = b(\mathrm{Id} - p)$, non inversible par la question (i). Donc nécessairement, $\lambda \neq 1$, i.e. $a \neq -b$.

Synthèse. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que $b \neq 0$ et $a \neq -b$. Alors si $u = ap + b\mathrm{Id}$, $u = b(\mathrm{Id} - \lambda p)$ avec $\lambda = -\dfrac{a}{b} \neq 1$, donc, par la question précédente, u est inversible.

Conclusion. Les éléments inversibles de Pr sont les endomorphismes s'écrivant comme $ap + b\mathrm{Id}$ avec $b \neq 0$ et $a \neq -b$.

Exercice 36 (Mines 2015). ●●○ Soit $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \frac{1}{2}(P(X)+P(-X)) + \frac{X}{2}(P(X)-P(-X))$.

1. Montrer que Φ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P+\mu Q) &= \frac{1}{2}((\lambda P+\mu Q)(X)+(\lambda P+\mu Q)(-X)) \\
&\quad + \frac{X}{2}((\lambda P+\mu Q)(X)-(\lambda P+\mu Q)(-X)) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda P(X)+\mu Q(X)+\lambda P(-X)+\mu Q(-X)) \\
&\quad + \frac{X}{2}(\lambda P(X)+\mu Q(X)-\lambda P(-X)-\mu Q(-X)) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda P(X)+\lambda P(-X)) + \frac{X}{2}(\lambda P(X)-\lambda P(-X)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu Q(X)+\mu Q(-X)) + \frac{X}{2}(\mu Q(X)-\mu Q(-X)) \\
&= \lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q).
\end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

---

2. Montrer que $\ker\Phi = \{(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}[X], Q \text{ impair}\}$.

Raisonnons par double inclusion.

Soit $P \in \ker(\Phi)$. Alors $\frac{1}{2}(P(X)+P(-X)) + \frac{X}{2}(P(X)-P(-X)) = 0$. En évaluant en 1, on obtient

$$\frac{1}{2}(P(1)+P(-1)) + \frac{1}{2}(P(1)-P(-1)) = 0,$$

i.e. $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P. Donc on dispose de Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que

$P = (X-1)Q$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= \frac{1}{2}\left((X-1)Q(X) + (-X-1)Q(-X)\right)\\ &\quad + \frac{X}{2}\left((X-1)Q(X) - (-X-1)Q(-X)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((X-1+X^2-X)Q(X) + (-X-1+X^2+X)Q(-X)\right)\\ &= \frac{X^2-1}{2}(Q(X)+Q(-X)).\end{aligned}$$

Donc si $\Phi(P) = 0$, alors nécessairement $Q(X)+Q(-X) = 0$, donc Q est impair.

Réciproquement, soit P un polynôme tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec Q impair. Alors de même que précédemment, $\Phi(P) = \dfrac{X^2-1}{2}(Q(X)+Q(-X)) = 0$. Donc $P \in \ker(\Phi)$.

Donc $\ker(\Phi) = \{(X-1)Q,\ Q \text{ impair}\}$.

---

3. Montrer que $\mathrm{Im}\Phi \oplus \ker\Phi = \mathbb{R}[X]$ (on cherchera à caractériser Φ).

Calculons $\Phi \circ \Phi$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\Phi(P) = \dfrac{1+X}{2}P(X) + \dfrac{1-X}{2}P(-X)$, donc

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(P)) &= \frac{1+X}{2}\left(\frac{1+X}{2}P(X) + \frac{1-X}{2}P(-X)\right)\\ &\quad + \frac{1-X}{2}\left(\frac{1-X}{2}P(-X) + \frac{1+X}{2}P(X)\right)\\ &= \left(\frac{1+X}{2} + \frac{1-X}{2}\right)\left(\frac{1+X}{2}P(X) + \frac{1-X}{2}P(-X)\right)\\ &= \frac{1+X}{2}P(X) + \frac{1-X}{2}P(-X) = \Phi(P).\end{aligned}$$

Donc Φ est un projecteur, il s'agit donc de la projection sur $\mathrm{Im}(\Phi)$ parallèlement à $\ker(\Phi)$. Donc en particulier $\ker(\Phi) \oplus \mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}[X]$.

Remarque. Plutôt que de faire le calcul un peu sale, on peut remarquer que $\Phi(P(-X)) = \Phi(P(X))$. Ceci simplifie grandement les calculs !
