

Thèmes : Espaces vectoriels, limites.

1. Soient E un \mathbb{K} -e.v., (a, b, c, d) une 4-liste dans E , x dans E . Par définition, dire que « x est combinaison linéaire de (a, b, c, d) » c'est dire que

...

2. Soient E un \mathbb{K} -e.v. et V une partie de E . **En pratique**, dire que « V est un sous-espace vectoriel de E » c'est dire que ...

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$?

4. Le polynôme $P = 20X^2 - 12X - 8 \in \mathbb{R}_2[X]$ est-il combinaison linéaire de (Q_1, Q_2, Q_3) , où $Q_1 = (X - 2)(X - 3)$, $Q_2 = (X - 1)(X - 3)$ et $Q_3 = (X - 1)(X - 2)$?

5. (*) Montrer que $(Q_k) = (X^{n-k}(1 - X)^k)_{0 \leq k \leq 2025}$ est une base du \mathbb{C} -e.v.

6. (*) Montrer que les fonctions $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\alpha t}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, sont linéairement indépendantes sur \mathbb{C} . (Étapes du raisonnement.)

7. **Asymptotique.** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$.