

1. Polynômes formels et fractions rationnelles

Fractions rationnelles :

- (i) Généralités : notions sur le corps $\mathbb{K}(X)$ (*construction HP*) ; forme irréductible d'une fraction rationnelle (*dénominateur unitaire*) ; majoration du degré d'une somme avec cas d'égalité, degré d'un produit ; partie entière ; évaluation et fonction rationnelle ; fraction rationnelle dérivée ; fraction rationnelle conjuguée dans $\mathbb{C}(X)$; lemmes préparatoires au **théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$** : lemme des coefficients de Bézout précisés (*HP*) et lemme des divisions successives (*HP*).
- (ii) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$: énumération des éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ et théorème de décomposition sur $\mathbb{C}$; énumération des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ et théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$; caractérisation par conjugaison des fractions rationnelles réelles parmi toutes les complexes ; détermination du « premier coefficient » de la partie polaire associée à un pôle simple (*deux formules*) ; décomposition en éléments simples de P'/P si P est scindé sur $\mathbb{K}$ (*dérivée logarithmique*).
- (iii) Calcul de primitives de fonctions rationnelles : primitives de fonctions rationnelles associées aux éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

2. Espaces vectoriels sur K et applications linéaires

Espace vectoriel sur K :

- (i) Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: groupe additif de vecteurs muni d'une multiplication par les scalaires qui est doublement distributive et compatible avec la multiplication entre les scalaires ; **espace des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel** ; espaces vectoriels de référence ; espace vectoriel produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; combinaisons linéaires de deux vecteurs, d'une famille finie ou d'une famille infinie de vecteurs.
- (ii) Sous-espaces vectoriels (s.e.v.) : **partie non vide et stable par addition et par multiplication externe** ; stabilité par combinaisons linéaires quelconques ; l'ensemble des combinaison linéaires des éléments de toute partie A est égal au sous-espace engendré par cette partie A elle-même (adaptation pour les familles) ; croissance de l'engendrement pour l'inclusion ; engendrement et ajout d'un nouveau vecteur, combinaison linéaire ou non des anciens ; invariance de l'espace engendré par opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille.
- (iii) Familles de vecteurs : **famille génératrice et invariance de la qualité génératrice** par retrait d'un vecteur combinaison linéaire des autres, et par opérations élémentaires ; **famille libre et invariance de la qualité libre** par ajout d'un vecteur non combinaison linéaire des autres, et par opérations élémentaires ; famille liée de vecteurs ou famille de vecteurs linéairement dépendants, et conditions suffisantes de liaison ; toute famille (liste ou suite) de polynômes tous non nuls de degrés distincts est libre ; base de décomposition linéaire, bases canoniques d'espaces de référence, et exemples de bases de polynômes de degrés échelonnés

de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.

- (iv) Somme de deux s.e.v. : sous-espace somme d'un couple de s.e.v. ; somme des sous-espaces engendré par un couple de parties ; couple de s.e.v. en somme directe ; **caractérisations du caractère direct d'une somme de s.e.v.** (*par annulation et par intersection*). concaténation de familles génératrices, libres ; couple de s.e.v. supplémentaires l'un à l'autre.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

- a. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ si P est scindé sur $\mathbb{K}$.
- b. (Exo) Relation de récurrence entre les fonctions $F_n : x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{1}{((t-\alpha)^2 + \beta^2)^n} dt$ pour $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$. Application : les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
- c. (Exo) Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur tout intervalle de son domaine de dérivabilité.
- d. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de toute partie A est égal au sous-espace engendré par cette partie A elle-même (adaptation pour les familles).
- e. Toute suite de polynômes de degrés échelonnés décrivant $\mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Conséquence : formule de Taylor polynomiale (deuxième version).
- f. Si V_1 et V_2 sont des s.e.v. et que $V_1 \cup V_2$ est un s.e.v. alors $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$. Plus généralement $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B)$; quelles que soient les parties A et B .
- g. Caractérisations du caractère direct d'une somme de s.e.v. (*par annulation et par intersection*).
- h. Théorème de la division euclidienne. Conséquence : étant donné $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$, un des supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est ...
- i. Majoration du degré de la somme d'un couple de fractions rationnelles, avec cas d'égalité. Conséquence : un des supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ est ...