

FIN ▾

2024–2025

Lycée Pasteur

MPSI 1

Mathématiques DS 07 (4H00)

Samedi 15 mars – 8h-12h

Hormis la page de garde, le sujet comporte 5 pages. Il comprend deux exercices et un problème. Il est demandé de **rendre séparément** les deux exercices d'une part et le problème d'autre part.

Exercice 1.

1. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x - z = -1$; $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$, où $\varphi : (M_{3,1}(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (M_{2,1}(\mathbb{R}), +)$ est définie par

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la matrice suivante est inversible, en précisant son inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. (*Égalité des accroissements finis*) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et à valeurs réelles. Montrer qu'il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2. Définir une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que f est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$; mais, pour tout $c \in]0; 1[$, $f(1) - f(0) \neq f'(c)$.

3. Soit un polynôme P à coefficients réels et de degré supérieur à 2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Polynômes de Tchebychev, applications

Partie I. Définitions et propriétés usuelles

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

I-A. Polynômes de première espèce

1. Démontrer que si une telle famille de polynômes existe, elle est unique.
2. Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3 .
3. En remarquant que pour tout réel θ , on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$

4. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

En déduire, pour tout entier naturel n , le degré et le coefficient dominant de T_n .

Retrouver ce résultat avec l'expression de la question 3.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $] -1, 1[$. Déterminer les racines de T_n .

I-B. Polynômes de deuxième espèce

On définit les polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}.$$

6. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

(On rappelle que $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$)

7. En déduire les propriétés suivantes :

- ▷ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence (1) que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ▷ Pour tout entier naturel n , le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $] -1, 1[$.

Déterminer l'expression explicite des racines de U_n .

Partie II. Arithmétique des polynômes de Tchebychev

II-A. Division euclidienne

8. Montrer que

$$\begin{cases} T_m \cdot T_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m \leq n \\ T_m \cdot U_{n-1} = \frac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m < n. \end{cases}$$

Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$. On se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m .

9. On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$$

10. Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

11. On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair.

Montrer qu'il existe un unique entier $p \geq 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2 \left(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1} T_{n-(2p-1)m} \right)$$

$$\text{et } R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$$

II-B. Plus grand commun diviseur

Dans toute cette sous-partie, on fixe deux entiers naturels m et n .

12. Soit h le pgcd dans $\mathbb{N}$ de $m+1$ et $n+1$. En examinant les racines communes à U_n et U_m , montrer que U_h est un pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m .

Soit $g > 0$ le pgcd de m et n . On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.

13. Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m .

14. Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.

15. Que peut-on dire des pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes.

Partie III. Un théorème

Dans cette partie, on munit l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes de la loi de composition interne associative donnée par la composition notée $\circ$. Plus précisément, étant donnés $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang, on a

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k Q^k.$$

On dit que les polynômes P et Q commutent si $P \circ Q = Q \circ P$. On note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes complexes qui commutent avec le polynôme P :

$$\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{C}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}.$$

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes complexes vérifiant

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \deg(F_n) = n \quad \text{et} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, F_n \circ F_m = F_m \circ F_n.$$

Il est clair que la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.

On note G l'ensemble des polynômes complexes de degré 1, et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

III-A. Préliminaires

16. Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (2). On pourra comparer $T_n \circ T_m$ et T_{nm} .

17. Vérifier que G est un groupe pour la loi $\circ$.

L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1} .

III-B. Commutant de X^2 et T_2

18. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme complexe non constant qui commute avec P_α . Montrer que Q est unitaire.

19. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α . Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

20. Soit P un polynôme complexe de degré 2. Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$. Déterminer ces deux éléments lorsque $P = T_2$.

21. Justifier que $\mathcal{C}(T_2) = \{-1/2\} \cup \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$.

III-C. Théorème de Block et Thielmann

22. Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré trois sont 0 et -2 .

23. En déduire le théorème de Block et Thielmann : si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (2), alors il existe $U \in G$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U.$$

DEBUT $\triangle$