FIN ▽

2024–2025

Lycée Pasteur

MPSI 1

Mathématiques
DS 07 (4H00)

Samedi 15 mars – 8h-12h

Avec corrigé

Table des matières

Exercice 1.

1. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x - z = -1$; $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Nommons $\mathcal{P}$ cet ensemble. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x - z = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = & \alpha = & 0 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ y = & \beta = & 0 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1, \\ z = & 1 + \alpha = & 1 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \end{cases} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in p + \mathrm{Vect}\,(u, v)$$

où $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme u et v sont linéairement indépendant (les deux vecteurs sont non colinéaires), ils constituent une base des vecteurs du plan $\mathcal{P}$.

---

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$, où $\varphi : (M_{3,1}(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (M_{2,1}(\mathbb{R}), +)$ est définie par

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y & = 0 \\ x - y - z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la matrice suivante est inversible, en précisant son inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Plusieurs voies.

Voie 1. $A = J + (a-1)\mathrm{I}_3$, où $J = A - (a-1)\mathrm{I}_3$ est telle que $J^2 = 3J$. Donc $(a-1)(a+2)\mathrm{I}_3 = AB = BA$, où $B = (A - (2a+1)\mathrm{I}_3)$. Donc si $a \in \mathbb{C} \setminus \{-2; 1\}$ alors la matrice A est inversible d'inverse égal à

$$\frac{1}{(a+2)(a-1)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Sinon, la matrice $AB = 0_3$ avec $B \neq 0_3$ donc A n'est pas inversible.

Voie 2. En résolvant un système linéaire par analyse puis synthèse (*recherche de conditions*), nous pouvons aboutir au même résultat notamment en formant une combinaison linéaire des équations membres à membres avec coefficients égaux à 1.

Voie 3. On peut suivre la méthode du pivot sans guère tenir compte des spécificités de la matrice en jeu.

Exercice 2.

1. (*Égalité des accroissements finis)* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Supposons que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et à valeurs réelles. Montrer qu'il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

2. Définir une fonction $f : [0; 1] \to \mathbb{C}$ telle que f est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$; mais, pour tout $c \in]0; 1[$, $f(1) - f(0) \neq f'(c)$.

Cette fonction convient : $[0; 1] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{i2\pi t}$ (*course sur un cercle*).

3. Soit un polynôme P à coefficients réels et de degré supérieur à 2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Nommons n l'entier naturel égal au degré de P. Alors la fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto P(x)$ s'annule en au moins n points, avec $n \geqslant 2$. Comme cette fonction est continue sur tout segment non trivial en étant dérivable sur son intérieur, d'après le théorème de Rolle, le polynôme P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes. Or P' est de degré $n-1$ car $n \geqslant 1$; donc il est scindé sur $\mathbb{R}$.

Polynômes de Tchebychev, applications

I Définitions et propriétés usuelles

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

I-A. Polynômes de première espèce

1. Démontrer que si une telle famille de polynômes existe, elle est unique.

Commentaire : Attention à noter P et P' seulement si P' désigne le polynôme dérivé de P.

Soit une autre famille $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tels polynômes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = S_n(\cos(\theta))$. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, T_n et S_n sont alors égaux en une infinité de valeurs. Étant des polynômes, on en déduit $T_n = S_n$. D'où l'unicité.

---

2. Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3.

On calcule $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

---

3. En remarquant que pour tout réel θ, on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$. Par la formule du binôme de Newton,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}.$$

Or pour k pair, $(i\sin(\theta))^k$ est réel ; pour k impair il est imaginaire pur. Donc

$$\begin{aligned}
&(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n \\
&=\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2p}(-1)^p\sin(\theta)^{2p}\cos(\theta)^{n-2p} \\
&\quad+i\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]-1}\binom{n}{2p+1}(-1)^p\sin(\theta)^{2p+1}\cos(\theta)^{n-2p-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(n\theta)=\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2p}(-1)^p\sin(\theta)^{2p}\cos(\theta)^{n-2p}.$$

Or, $\sin(\theta)^{2p}=(\sin^2(\theta))^p=(1-\cos^2(\theta))^p$, donc

$$\cos(n\theta)=\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-\cos^2(\theta))^p\cos(\theta)^{n-2p}.$$

Donc, par unicité de T_n,

$$T_n(X)=\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-X^2)^pX^{n-2p}.$$

L'existence de T_n est donc démontrée.

---

4. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

(1) $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n.$

En déduire, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n.

Retrouver ce résultat avec l'expression de la question 3.

Commentaire : Pas de raisonnement par récurrence ! Sauf lorsque, ayant traité ***à tâtons*** *des "cas simples", on se demande si on peut s'appuyer sur leurs traitements pour les "cas complexes" puis qu'on trouve un moyen pour cela.* ***Le raisonnement par récurrence se fait seulement lorsqu'on perçoit un procédé récurrent.***

Soit n un entier non nul. Il est vrai que

(SC) $\forall a,b\in\mathbb{R},\ \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b).$

Donc

$$\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)=2\cos(n\theta)\cos(\theta).$$

On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1}(X)+T_{n-1}(X)=2XT_n(X),$$

D'où le relation de récurrence visée.

Démontrons alors, par récurrence double, que $\deg(T_n) = n$ et que si $n \geqslant 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

L'**initialisation** vient du calcul de T_1 et T_2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$. Alors $\deg(T_n) = n$, et $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ donc $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = n+2$. De plus, le monôme dominant de $2XT_{n+1} - T_n$ est celui de $2XT_{n+1}$, i.e. $2X \times 2^n X^{n+1}$, i.e. $2^{n+1}X^{n+2}$. Donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et son coefficient dominant est 2^{n+2-1}, d'où l'hérédité et le résultat !

---

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de T_n.

Commentaire : Si on trouve $n \geqslant 1$ racines distinctes à un polynôme de degré n alors on peut l'écrire comme multiple d'un produit de n polynôme de la forme $X - \alpha$, avec quotient de degré 0. La situation invite à chercher n racines distinctes entre -1 et 1 exclus et à exprimer ces racines sous la forme $\cos(\theta)$ pour $]0,\pi[$.

D'abord, $\cos$ opère une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1;1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,\pi[$. Alors

$$T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \ k \in [\![0, n-1]\!].$$

Posons alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. Alors $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont n racines distinctes de T_n, qui est de degré n, donc T_n est scindé à racines simples, de racines $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

I-B. Polynômes de deuxième espèce

On définit les polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}.$$

6. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \ U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

(On rappelle que $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$)

Commentaire : Attention à la définition du nombre dérivé d'une fonction f en un point x :

$$f'(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

*Si x est une **variable muette** dans un intervalle, alors x et $f(x)$ sont deux variables tandis que f est une fonction qui fait passer de la valeur de la première variable à la valeur de la dernière ; on note alors*

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = \frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$$

*Si x est une **variable parlante**, alors on peut écrire*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}(f(x'))}{\mathrm{d}x'}\Big|_{x'=x} = \left[\lim_{\mathrm{d}x'\to 0} \frac{f(x'+\mathrm{d}x')-f(x')}{\mathrm{d}x'}\right]_{x'=x} = \lim_{\mathrm{d}x'\to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x')-f(x)}{\mathrm{d}x'}.$$

ou avec un tout autre caractère que x'.

Cela dit, la notation $(f(x))'$ ne saurait désigner le nombre dérivée de f en x noté $f'(x)$, mais ne peut désigner qu'une variable non définie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos(\varphi)) = \cos((n+1)\varphi)$ donc, en dérivant,

$$-\sin(\theta)T'_{n+1}(\cos(\theta)) = -(n+1)\sin((n+1)\theta),$$

Or $\theta \in R\setminus\pi\mathbb{Z}$; donc $\sin(\theta) \neq 0$, puis

$$\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

D'où le résultat.

---

7. En déduire les propriétés suivantes :

▷ la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence (1) que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Il est vrai que

(SS) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b).$

Donc

$$\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2\sin((n+2)\theta)\cos(\theta)$$

Donc, comme $\cos(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}) =]-1,1[$,

$$U_{n+2} + U_n = 2XU_{n+1}.$$

D'où le relation de récurrence.

▷ Pour tout entier naturel n, le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $]-1,1[$.

Déterminer l'expression explicite des racines de U_n.

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Alors

$$\begin{aligned} U_n(\cos(\theta)) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![1,n]\!]. \end{aligned}$$

Comme U_n est de degré n, on trouve comme plus haut que

$$\boxed{\text{les racines de } U_n \text{ sont les } \left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}.}$$

II Arithmétique des polynômes de Tchebychev

II-A. Division euclidienne

8. Montrer que

$$\begin{cases} T_m \cdot T_n = \dfrac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m}) & \text{pour tous entiers } 0 \leqslant m \leqslant n \\ T_m \cdot U_{n-1} = \dfrac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1}) & \text{pour tous entiers } 0 \leqslant m < n. \end{cases}$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $\theta \in]0,\pi[$.

▷ On suppose que $0 \leqslant m \leqslant n$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors on applique (SC) avec $(a,b) = (n\theta, m\theta)$ pour obtenir

$$T_{n+m}(\cos(\theta)) + T_{n-m}(\cos(\theta)) = 2T_n(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta)).$$

▷ On suppose que $0 \leqslant m < n$. Alors on applique (SS) avec $(a,b) = ((n-1)\theta, m\theta)$ pour obtenir

$$U_{n-1+m}(\cos(\theta)) + U_{n-1-m}(\cos(\theta)) = 2U_{n-1}(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta).$$

D'où les résultats.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. On se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m.

9. On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$$

Discutons.

- ▷ On suppose d'abord $2m \leqslant n < 3m$. Par la question précédente, comme $n-m \geqslant m$,

$$2T_{n-m}T_m = T_n + T_{n-2m},$$

donc

$$T_n = 2T_{n-m}T_m - T_{n-2m},$$

et $\deg(-T_{n-2m}) < \deg(T_m)$ car $n < 3m$.

Ainsi, $\boxed{Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{n-2m}.}$

- ▷ On suppose ensuite que $m < n < 2m$. Par la question précédente, comme $n-m \leqslant m$,

$$2T_{n-m}T_m = T_{2m-n} + T_n,$$

d'où

$$T_n = 2T_{n-m}T_m - T_{2m-n},$$

donc $\boxed{Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{2m-n}.}$

D'où la formule dans les deux cas.

---

10. Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

On suppose $n = (2p+1)m$. Alors, par la question 8,

$$2T_{2pm}T_m = T_{(2p+1)m} + T_{(2p-1)m},$$

donc

$$\begin{aligned} T_n &= T_{(2p+1)m} \\ &= 2T_{2pm}T_m - T_{(2p-1)m} \\ &= 2T_{2pm}T_m - 2T_{2(p-1)m}T_m + T_{(2p-2)m} \\ &= \dots \\ &= 2T_m \left(\sum_{k=0}^{p} T_{2km}(-1)^{p-k} \right) \quad \text{par récurrence.} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{Q_{n,m} = \sum_{k=0}^{p} T_{2km}(-1)^{p-k} \text{ et } R_{n,p} = 0.}$

---

11. On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geqslant 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2\left(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1}T_{n-(2p-1)m}\right)$$

et $R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$

Montrons d'abord l'existence et l'unicité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

D'une part, supposons que p convient. Soit alors $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que p. Alors $|(n - 2mp_1) - (n - 2p)| < m + m$; donc $|p_1 - p| < 1$. Or $|p_1 - p| \in \mathbb{N}$; donc $p_1 = p$. D'où l'unicité.

D'autre part, comme $2m \neq 0$, soit q le quotient de la division euclidienne de n par $2m$. Alors, ou bien $q \cdot 2m \leqslant n < q \cdot 2m + m$, ou bien $q \cdot 2m + m < n < q \cdot 2m + 2m$, le cas $n = q \cot 2m + m$ étant exclu par l'énoncé. Dans le premier cas, $q = 0$ implique $n < m$, ce qui est exclu, donc $p = q$ convient ; dans le dernier cas, $p = q + 1$ convient. D'où l'existence.

Autre voie : en raisonnant par recherche de conditions, on trouve que nécessairement, $p = \lfloor n/(2m) + 1/2 \rfloor$. Puis on vérifie en remontant les calculs.

A présent, traitons de la division entre polynômes. On procède de même que plus haut : on commence en écrivant que

$$2T_{n-m}T_m = T_n + T_{n-2m}$$

donc

$$\begin{aligned}
T_n &= 2T_m T_{n-m} - T_{n-2m} \\
&= 2T_m T_{n-m} - T_{n-2m} \\
&= 2T_m T_{n-m} - 2T_m T_{n-3m} + T_{n-4m} \\
&= \ldots \\
&= 2T_m\left(T_{n-m} - T_{n-3m} + T_{n-5m} + \cdots + (-1)^k T_{n-(2k-3)m}\right) \\
&\quad + (-1)^{k-1} T_{n-2(k-2)m},
\end{aligned}$$

par récurrence. L'égalité est en particulier vraie quand $k = p$. Mais alors

$$m < n - 2(p-2)m < 3m,$$

donc on est dans le champ d'application de la question 9 : le reste de la division euclidienne de $T_{n-2(p-2)m}$ par T_m est $T_{|m-2(p-2)-2m|} = -T_{|m-2p|}$, et son quotient est $2T_{n-(2p-1)m}$. D'où

$$\boxed{\begin{aligned} T_n = 2T_m\Big(T_{n-m} - T_{n-3m} + T_{n-5m} + \cdots + (-1)^{p-1}T_{n-(2p-1)m}\Big) \\ + (-1)^p T_{|m-2p|} \end{aligned}}$$

II-B. Plus grand commun diviseur

Dans toute cette sous-partie, on fixe deux entiers naturels m et n.

12. Soit h le pgcd dans $\mathbb{N}$ de $m+1$ et $n+1$. En examinant les racines communes à U_n et U_m, montrer que U_h est un pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m.

▷ On sait que les racines de U_n sont $\left(\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$, celles de U_m sont $\left(\cos\dfrac{k\pi}{m+1}\right)_{1\leqslant k\leqslant m}$. Cherchons à quel point ces racines peuvent être communes. Soit x une racine commune à U_n et U_m. On dispose de $k \in [\![1,n]\!]$ et $\ell \in [\![1,m]\!]$ tels que

$$x = \cos\frac{k\pi}{n+1} = \cos\frac{\ell\pi}{m+1}$$

Alors $\dfrac{k\pi}{n+1} = \dfrac{\ell\pi}{m+1}$ car $\dfrac{k\pi}{n+1}$ et $\dfrac{\ell\pi}{m+1}$ sont dans $[0,\pi]$.
Ainsi, $k(m+1) = \ell(n+1)$, d'où $k\dfrac{m+1}{h} = \ell\dfrac{n+1}{h}$.
Mais $\dfrac{m+1}{h}$ et $\dfrac{n+1}{h}$ sont premiers entre eux donc on dispose de $q \in \mathbb{N},\ k = q\dfrac{n+1}{h}$.
Ainsi,

$$\cos\frac{k\pi}{n+1} = \cos\frac{q\pi}{h}.$$

Donc une racine commune à U_m et U_n est une racine de U_h.

▷ Réciproquement, toute racine de U_h est de la forme $\cos\dfrac{k\pi}{h}$. Comme $n+1 = th$ avec $t \in \mathbb{N}$, $\cos\dfrac{k\pi}{h} = \cos\dfrac{kt\pi}{n+1}$, racine de U_n. De même on montre qu'une telle racine est une racine de U_m.

Donc $U_m \wedge U_n$ et U_h ont les mêmes racines. Comme ils sont scindés à racines simples, ces deux polynômes sont associés ! Donc U_h est un pgcd de U_n et U_m.

Soit $g > 0$ le pgcd de m et n. On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.

13. Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m.

Montrons que les racines de T_g sont les exactement les racines communes à T_n et T_m.

- Soit x une racine de T_g. Alors on dispose de k dans $\mathbb{N}$ tel que $\cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2g}$. Ainsi, $T_n(x) = \cos\left(n\dfrac{(2k+1)\pi}{2g}\right) = \cos\left(\dfrac{n_1(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ car n_1 est impair. De même, $T_m(x) = 0$.
- Réciproquement, si x est une racine commune à T_n et T_m, on dispose de k et ℓ tels que $x = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = \cos \dfrac{(2\ell+1)\pi}{2m}$. Ainsi,
$$\frac{2k+1}{2n} = \frac{2\ell+1}{2m} \text{ donc } (2k+1)m_1 = (2\ell+1)n_1,$$
donc, par interprimalité de m_1 et n_1, n_1 divise $2k+1$, donc $2k+1 = pn_1$, donc
$$x = \cos \frac{pn_1\pi}{2n} = \cos \frac{pn_1\pi}{2g}.$$
Mais comme $2k+1$ est impair, p est impair, et ainsi x est racine de T_g.

Comme T_g est scindé à racines simples, on en déduit que tout pgcd de T_m et T_n divise T_g. Ainsi, T_g est un pgcd de T_n et T_m.

---

14. Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.

Par le même raisonnement que précédemment, on en déduirait que si x est une racine commune à T_n et à T_m, $(2k+1)m_1 = (2\ell+1)n_1$, ce qui imposerait que m_1 et n_1 soient pairs, ce qui contredit le fait que $m_1 \wedge n_1 = 1$.

---

15. Que peut-on dire des pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes.

Discutons !

- Lorsque m et n sont impairs, m_1 et n_1 sont impairs, donc le pgcd de T_m et T_n est T_g.
- Lorsque m et n sont deux puissances de 2 distinctes, l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair (si $n \neq m$), donc T_n et T_m sont premiers entre eux.

III Un théorème

Dans cette partie, on munit l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes de la loi de composition interne associative donnée par la compositiojn notée $\circ$. Plus précisément, étant donnés $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang, on a

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k Q^k.$$

On dit que les polynômes P et Q commutent si $P \circ Q = Q \circ P$. On note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes complexes qui commutent avec le polynôme P :

$$\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{C}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}.$$

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes complexes vérifiant

$$\text{(2)} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \deg(F_n) = n \qquad \text{et} \qquad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ F_n \circ F_m = F_m \circ F_n.$$

Il est clair que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient.

On note G l'ensemble des polynômes complexes de degré 1, et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

III-A. Préliminaires

16. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (2). On pourra comparer $T_n \circ T_m$ et T_{nm}.

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} T_n \circ T_m(\cos(\theta)) &= T_n(\cos(m\theta)) \\ &= \cos(n \times (m\theta)) \\ &= \cos(nm\theta) \\ &= \cos(m \times (n\theta)) \\ &= T_m(\cos(n\theta)) = T_m \circ T_n(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

L'égalité entre $T_n \circ T_m$ et $T_m \circ T_n$ étant vraie en tous les réels de $[-1, 1]$, on a $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

De plus, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

$\boxed{\text{Donc la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la propriété (2).}}$

---

17. Vérifier que G est un groupe pour la loi $\circ$.

Commentaire :

Premièrement, une réponse semi-honnête consisterait à montrer que les fonctions affines de coefficient directeur non nul forme un sous-groupe de l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: problème, ce n'est pas exactement le même type d'objet que l'on manipule ici, car on a affaire à des polynômes.

*Deuxièmement et dernièrement, il n'est pas ici question d'un sous-groupe d'un groupe. Et parler de symétrique demande de parler de l'élément neutre, parler de l'élément neutre demande de parler de l'associativité qui assure l'unicité d'un tel élément, puis parler de l'associativité demande de parler du caractère interne de la loi de composition. Donc on procède aux vérifications dans l'ordre : loi de composition **interne** qui est **associative**, qui admet un **élément neutre** (lequel est alors unique) et qui admet pour tout élément un **symétrique** (par rapport à l'élément neutre, lequel est alors unique).*

▷ $\circ$ est bien une loi de composition interne : soient P et Q deux polynômes de degré 1, $P(X) = aX + b$, $Q(X) = cX + d$, avec (a, c) non nuls. Alors

$$P \circ Q = a(cX + d) + b = (ac)X + (ad + b),$$

et $ac \neq 0$, donc $P \circ Q$ est un polynôme de degré 1.

▷ $\circ$ est associative (on l'a supposé dans l'énoncé)

▷ $\circ$ admet un élément neutre : $E = X$. En effet, pour tout P de degré 1, $E \circ P = P \circ E = P$.

▷ si P est de degré 1, $P(X) = aX + b$, avec $a \neq 0$, alors en posant $Q = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$,

$$P \circ Q(X) = a\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}\right) + b = X - b + b = X = E,$$

et

$$Q \circ P(X) = \frac{1}{a}(aX + b) - \frac{b}{a} = X + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = X = E,$$

donc P admet un inverse pour $\circ$.

$\boxed{\text{Donc } (G, \circ) \text{ est un groupe.}}$

L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1}.

III-B. Commutant de X^2 et T_2

18. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme complexe non constant qui commute avec P_α. Montrer que Q est unitaire.

---

*Commentaire : **Où sert telle supposition ?** A priori, on doit se servir de ce que Q est **non constant** pour conclure. Sinon, soit on a négligé un fait, soit la question est mal posée.*

Écrivons $Q(X) = a_n X^n + R(X)$, où n est le degré de Q et a_n son coefficient dominant, où R un polynôme de degré strictement inférieur à n. Alors

$$Q \circ P_\alpha = a_n (X^2 + \alpha)^n + R \circ P_\alpha.$$

Le monôme dominant de $Q \circ P_\alpha$ est alors $a_n X^{2n}$. De même,

$$P_\alpha \circ Q = (a_n X^n + R(X))^2 + \alpha.$$

Le monôme dominant de $P_\alpha \circ Q$ est alors $a_n^2 X^{2n}$ **car n** $\neq$ **0**. Comme P_α et Q commutent, $a_n^2 = a_n$, soit, $\boxed{\text{comme } a_n \neq 0,\ a_n = 1.}$ Donc Q est unitaire.

---

19. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α. Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

Soient Q et R de degré n, qui commutent avec P_α. Alors

$$P(X^2 + \alpha) = P^2 + \alpha \text{ et } Q(X^2 + \alpha) = Q^2 + \alpha,$$

donc

$$(P - Q)(X^2 + \alpha) = (P - Q)(P + Q).$$

Notons $m = \deg(P - Q)$. Comme P et Q sont unitaires, $\deg(P - Q) < n$ et $\deg(P + Q) = n$. Mais l'égalité ci-dessus implique que $2m = mn$, i.e., si $m \neq -\infty$, $m = n$, absurde !

Donc $P - Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$, i.e. $P = Q$.

Ensuite,

$$\boxed{\mathcal{C}(X^2) = \{0, 1\} \cup \{X^n, n \in \mathbb{N}\}.}$$

▷ on remarque en effet que ces éléments commutent bien avec X^2,

▷ réciproquement, si P commute avec X^2,

- ou bien P n'est pas constant et, par unicité d'un commutant non constant d'un degré fixé, si $n = \deg(P)$, $P = X^n$,

- ou bien P est constant, égal à $K \in \mathbb{C}$: $P \circ X^2 = K$ et $X^2 \circ P = K^2$, donc $K^2 = K$ donc $K = 0$ ou 1.

---

20. Soit P un polynôme complexe de degré 2. Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$. Déterminer ces deux éléments lorsque $P = T_2$.

Effectuons une analyse-synthèse.

Analyse. On suppose qu'il existe $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$. Notons $U = rX + s$, $a \neq 0$ et $P = aX^2 + bX + c$. Alors

$$\begin{aligned} P \circ U^{-1} &= a\left(\frac{1}{r}X - \frac{s}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}X - \frac{s}{r}\right) + c \\ &= \frac{a}{r^2}X^2 + \frac{br - 2as}{r^2}X + \frac{as^2 - bsr + cr^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} U \circ P \circ U^{-1} &= r\left(\frac{a}{r^2}X^2 + \frac{br - 2as}{r^2}X + \frac{as^2 - bsr + cr^2}{r^2}\right) + s \\ &= \frac{a}{r}X^2 + \frac{br - 2as}{r}X + \frac{as^2 - bsr + sr + cr^2}{r} \end{aligned}$$

Pour que ce polynôme soit égal à P_α, il faut $r = a$ et $s = \dfrac{br}{2a}$. α est alors déterminé de manière unique. D'où l'unicité !

Synthèse. En posant $r = a$ et $s = \dfrac{br}{2a}$, on a le résultat désiré.
Comme $T_2 = 2X^2 - 1$, $U = 2X$ convient. On a alors $U \circ T_2 \circ U^{-1} = X^2 - 2$.

---

21. Justifier que $\mathcal{C}(T_2) = \{-1/2\} \cup \{T_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Déjà, $-\dfrac{1}{2}$ commute bien avec T_2 : $T_2 \circ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, et, pour tout n, T_n commute bien avec T_2.

Ensuite, si P est un polynôme non constant de degré n qui commute avec T_2, alors $P = T_n$. Si P est constant égal à K, $P \circ T_2 = K$ et $T_2 \circ P = 2K^2 - 1$, donc $2K^2 - K - 1 = 0$, donc $K = 1$ (c'est T_0) ou $K = -1/2$. D'où le résultat désiré !

III-C. Théorème de Block et Thielmann

22. Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré trois sont 0 et -2.

▷ Déjà, on a vu précédemment que si $\alpha = 0$, $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contient X^3,

▷ De même, si $\alpha = -2$, alors $P_\alpha = U \circ T_2 \circ U^{-1}$ avec $U = 2X$. Comme T_3 commute avec T_2, $U \circ T_3 \circ U^{-1}$ commute avec $U \circ T_2 \circ U^{-1}$, donc P_α contient $U \circ T_3 \circ U^{-1}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3. Notons $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ ce polynôme. Alors ce polynôme est unitaire (vu dans les questions précédentes) et alors

$$Q \circ P_\alpha = (X^2 + \alpha)^3 + b(X^2 + \alpha)^2 + cX^2 + c\alpha + d,$$

et

$$P_\alpha \circ Q = (X^3 + bX^2 + cX + d)^2 + \alpha.$$

En particulier, comme le premier polynôme est pair, tous les termes de degré impair de $P_\alpha \circ Q$ sont nuls, donc

▷ (degré 5) $2b = 0$,

▷ (degré 3) $2bc + 2d = 0$,

▷ (degré 1) $2cd = 0$

donc $b = d = 0$. Donc l'égalité devient

$$(X^2 + \alpha)^3 + cX^2 + c\alpha = (X^3 + cX)^2 + \alpha,$$

soit, en égalisant les termes de différents degrés,

▷ (degré 4) $3\alpha = 2c$,

▷ (degré 2) $3\alpha + c = c^2$,

▷ (degré 0) $\alpha^3 + c\alpha = \alpha$.

Donc, ou bien $\alpha = 0$, ou bien $c = \dfrac{3}{2}\alpha$, donc

$$3\alpha + \frac{3}{2}\alpha = \frac{9}{4}\alpha^2,$$

i.e. ($\alpha \neq 0$) $\alpha = \dfrac{4}{9}\left(3 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{9}{2} = 2.$

Donc nécessairement, $\boxed{\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2}$.

---

23. En déduire le théorème de Block et Thielmann : si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2), alors il existe $U \in G$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U.$$

Supposons que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la proposition (2). Alors

▷ $\deg(F_2) = 2$ donc on dispose de $U \in G$ et de $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $U \circ F_2 \circ U^{-1} = P_\alpha$.

▷ $\deg(F_3) = 3$ et

$$\begin{aligned} U \circ F_3 \circ U^{-1} \circ P_\alpha &= U \circ F_3 \circ U^{-1} \circ U \circ F_2 \circ U^{-1} \\ &= U \circ F_3 \circ F_2 \circ U^{-1} \\ &= U \circ F_2 \circ F_3 \circ U^{-1} \\ &= U \circ F_2 \circ U^{-1} \circ U \circ F_3 \circ U^{-1} \\ &= P_\alpha \circ U^{-1} \circ U \circ F_3 \circ U^{-1}. \end{aligned}$$

Mais $U^{-1} \circ U \circ F_3 \circ U^{-1}$ est de degré 3, donc $U^{-1} \circ U \circ F_3 \circ U^{-1}$ est un polynôme de degré 3 commutant avec P_α, $\boxed{\text{donc } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2.}$

▷ Donc $F_2 = U \circ X^2 \circ U^{-1}$ ou $F_2 = U \circ P_2 \circ U^{-1} = V \circ T_2 \circ V^{-1}$ car P_2 est conjugué à T_2.

▷ Mais alors si on considère la suite $(U \circ F_n \circ U^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (si $\alpha = 0$) ou la suite $(V \circ F_n \circ V^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (si $\alpha = 2$), alors ces suites sont ou bien dans $\mathcal{C}(X^2)$, ou bien dans $\mathcal{C}(T_2)$. Donc

- (si $\alpha = 0$) pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $U \circ F_n \circ U^{-1} = X^n$, i.e. $F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U$,
- (si $\alpha = 2$) pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $V \circ F_n \circ V^{-1} = T_n$, i.e. $F_n = V^{-1} \circ T_n \circ V$.

D'où le résultat désiré !

***