FIN ▽

2024–2025

Lycée Pasteur

MPSI 1

Mathématiques
DS 08 (4H00)

Samedi 05 avril – 8h-12h

Le sujet comporte 7 pages avec la page de garde. Il comprend trois **exercices obligatoires** et deux problèmes. Il est demandé de **rendre séparément** les exercices d'une part et les problèmes d'autre part. Les trois exercices sont indépendants des deux problèmes ; les deux problèmes sont indépendants et leurs parties sont indépendantes entre elles ; et dans la partie I du problème 1, la question 3 est indépendante de toutes les autres.

Exercice 1 (*Limites*).

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} x^x$. On note ℓ cette limite.

2. Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers 0, de $x^x - \ell$.

3. En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^{(x^x)} \ln(x)}{x^x - 1}$.

Exercice 2 (*Décompositions dans quatre bases*).

Soit $P = (2X+1)(3X-2)(4X+3) \in \mathbb{C}[X]$. On nomme respectivement (A_0, A_1, A_2, A_3), (B_0, B_1, B_2, B_3), (C_0, C_1, C_2, C_3), et (D_0, D_1, D_2, D_3) les quatre familles

▷ $(1\ ,\ X\ ,\ X^2\ ,\ X^3)$.

▷ $(1\ ,\ X-5\ ,\ (X-5)^2\ ,\ (X-5)^3)$.

▷ $(1\ ,\ X-1\ ,\ (X-1)(X-2)\ ,\ (X-1)(X-2)(X-3))$.

▷ $((X-1)(X-2)(X-3)\ ,\ X(X-2)(X-3)\ ,\ X(X-1)(X-3)\ ,\ X(X-1)(X-2))$.

1. Justifier que les quatre familles précédentes sont des bases (de décomposition linéaires à coefficients scalaires des éléments) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$.

2. Déterminer la liste des coordonnées de P

a) Dans la base (A_0, A_1, A_2, A_3).

b) Dans la base (B_0, B_1, B_2, B_3).

c) Dans la base (C_0, C_1, C_2, C_3).

d) Dans la base (D_0, D_1, D_2, D_3).

Exercice 3 (*Valuations échelonnées*).

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on appelle **valuation** de P, qu'on note $val(P)$, l'élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ égal à la multiplicité de $0_{\mathbb{C}}$ dans P ; c.-à-d. le plus bas des degrés des coefficients non nuls de la décomposition canonique de P si $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, et $+\infty$ si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

On dit qu'une famille de polynômes $(P_1, P_2 \dots, P_n)$ est **à valuations échelonnées** si, et seulement si,

$$\mathrm{val}(P_1) < \mathrm{val}(P_2) < \cdots < \mathrm{val}(P_n).$$

1. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Donner, **en justifiant**, des formules (avec des égalités ou des inégalités) pour $\mathrm{val}(P+Q)$ et $\mathrm{val}(PQ)$.

2. Démontrer qu'une famille de polynômes tous non nuls à valuations échelonnées est libre.

Problème 1. Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes complexes en une indéterminée X, et $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degrés inférieurs à n. On définit la famille des polynômes de Bernstein d'ordre n notée $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$, par

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Partie I. Définition et premières propriétés.

1. Déterminer la décomposition linéaire canonique des polynômes $(B_{3,k})_{0\leqslant k\leqslant 3}$.

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Donner (sans justification) les racines de $B_{n,k}$ et leurs multiplicités.

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tous $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell \in [\![0,m]\!]$, déterminer $B_{n,k} \wedge B_{m,\ell}$.

4. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Donner le degré de $B_{n,k}$ ainsi que l'expression de ses coefficients. Donner en particulier le coefficient dominant de $B_{n,k}$.

5. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$?

6. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$.

Partie II. Engendrement et liberté.

Dans la suite, n est supposé non nul. Pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, on pose

$$V_\ell = \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \ldots, B_{n,n-\ell}).$$

7. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \ldots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \ldots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

8. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que

$$(1) \quad \forall \ell \in [\![0,n]\!],\ V_\ell = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \ldots, X^{n-\ell})$$

9. En déduire que les polynômes de Bernstein d'ordre n sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Conclure que $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

10. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. En écrivant que $X^k = X^k(X+(1-X))^{n-k}$, écrire X^k comme combinaison linéaire des $(B_{n,\ell})_{0\leqslant \ell\leqslant n}$. Retrouver (1).

Problème 2. Propriétés de la trace

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Partie I. Trace et matrices de rang 1

Soit $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Dans les questions 1, 2 et 3, $n = 3$**,** $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

1. Calculer le produit matriciel $U^\top \times V$, puis le produit $U \times V^\top$.

On vérifiera que $U^\top \times V$ donne bien un scalaire, que l'on notera τ, et que $U \times V^\top$ donne bien une matrice, que l'on notera M.

2. Résoudre les deux systèmes linéaires $MX = 0$ et $MX = \tau X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $MX = 0_{3,1}$ et $\mathcal{S}_\tau$ l'ensemble des solutions de $MX = \tau X$. On présentera les solutions à l'aide de la notation Vect.

3. Déterminer $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_\tau$.

Désormais, n**,** U **et** V **sont à nouveau quelconques !**

4. Exprimer, à l'aide de $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ les produits $U^\top \times V$, $V^\top \times U$ et $U \times V^\top$. On note $M = U \times V^\top$.

5. Comparer $U^\top \times V$ et $\mathrm{Tr}(M)$.

On note $\tau = \mathrm{Tr}(M)$.

6. Démontrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $M^p = \tau^{p-1} M$.

On suppose désormais que $\tau \neq 0$. On nomme $\mathcal{S}_0 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0_{n,1}\}$ et $\mathcal{S}_\tau = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \tau X\}$.

7. Démontrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists!(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau,\ X = X_0 + X_\tau.$$

8. Démontrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists \alpha \in \mathbb{K},\ MX = \alpha U$. Déterminer MU en fonction de U, de V, de τ. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\tau$.

Partie II. Une caractérisation de la trace

9. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Soit maintenant une application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Si $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui vaut 1 :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} 1_{\{(a,b)\}}(i, j) = \delta_{i,a}\delta_{b,j}.$$

3. Que vaut $\varphi(0_n)$?

4. Soit $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. En exprimant $\varphi(E_{a,b}E_{b,b})$ de deux manières différentes, montrer que $\varphi(E_{a,b}) = 0$.

5. Soit $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. Démontrer que $\varphi(E_{a,a}) = \varphi(E_{b,b})$.
On pourra introduire les matrices $E_{a,b}$ et $E_{b,a}$

6. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A).$$

Partie III. Matrices semblables

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

7. Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.

8. Soient A et B deux matrices semblables. Démontrer que si B est scalaire (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ B = \lambda \mathrm{I}_n$), alors $A = B$. Démontrer que si B est inversible, alors A est inversible (et préciser son inverse).

9. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente si, et seulement si, il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. Démontrer que si A est nilpotente et est semblable à B, alors B est nilpotente (*s'il y a un raisonnement par récurrence, on le rédigera avec soin*).

10. Donner deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui soient de traces égales mais qui ne soient pas semblables.

On va dans cette partie démontrer le résultat suivant : toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

11. Un exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 6 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible, calculer P^{-1} et montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

> **Propriété 1.**
> On admet que : A est semblable à B si, et seulement si, on peut passer de A à B par un enchaînement d'opération élémentaires simultanées sur les lignes **et** les colonnes parmi les trois sortes suivantes :
>
> ▷ une **double** transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ **ET** $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.
>
> ▷ une **double** dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **ET** $C_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} C_i$.
>
> ▷ une **double** permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ **ET** $C_j \leftrightarrow C_i$.
>
> En d'autres termes on a $B = PAP^{-1}$ avec P un produit de matrices de transvection, dilatation ou permutation.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -21 & -7 \end{pmatrix}$ comme le prouve les deux opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ **ET** $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$. **qu'on effectue en même temps.**

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

12. Si A est une matrice scalaire que dire de A ?

13. On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix},$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est de trace nulle, où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

On pourra commencer par traiter le cas où la première ligne de A comporte un coefficient non nul qui n'est pas en position $(1,1)$; puis se ramener à ce cas en discutant selon si A est diagonale ou non.

14. En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

On pourra procéder par récurrence sur n.

***