FIN ▽

2024–2025

Lycée Pasteur

MPSI 1

Mathématiques
DS 08 (4H00)

Samedi 05 avril – 8h-12h

Avec corrigé

Table des matières

Exercice 1 (*Limites*).

1. Déterminer $\lim_{x \to 0} x^x$. On note ℓ cette limite.

On écrit que, si $x > 0$, $x^x = e^{x \ln(x)}$. Or, par croissances comparées, $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc par continuité de exp en 0 et par composition des limites, $\boxed{x^x \xrightarrow[x \to 0]{} e^0 = 1}$.

---

2. Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers 0, de $x^x - \ell$.

Comme $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $\dfrac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y \to 0]{} 1$; donc par composition des limites, on en déduit que $x^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \ln(x)$.

---

3. En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^{(x^x)} \ln(x)}{x^x - 1}$.

Soit $x \in]0; 10^{-2025}[$. On a

$$\frac{x^{(x^x)} \ln(x)}{x^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^{(x^x)} \ln(x)}{x \ln(x)} = x^{x^x - 1} = e^{(x^x - 1) \ln(x)}.$$

Or, $(x^x - 1) \ln(x) \underset{x \to 0}{\sim} x \ln(x)^2$ et $x \ln(x)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées, donc

$\boxed{x^{x^x - 1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$.

Exercice 2 (*Décompositions dans quatre bases*).

Soit $P = (2X+1)(3X-2)(4X+3) \in \mathbb{C}[X]$. On nomme respectivement (A_0, A_1, A_2, A_3), (B_0, B_1, B_2, B_3), (C_0, C_1, C_2, C_3), et (D_0, D_1, D_2, D_3) les quatre familles

▷ $(1\ ,\ X\ ,\ X^2\ ,\ X^3)$.

▷ $(1\ ,\ X - 5\ ,\ (X - 5)^2\ ,\ (X - 5)^3)$.

▷ $(1\ ,\ X - 1\ ,\ (X - 1)(X - 2)\ ,\ (X - 1)(X - 2)(X - 3))$.

▷ $((X-1)(X-2)(X-3)\ ,\ X(X-2)(X-3)\ ,\ X(X-1)(X-3)\ ,\ X(X-1)(X-2))$.

1. Justifier que les quatre familles précédentes sont des bases (de décomposition linéaires à coefficients scalaires des éléments) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$.

2. Déterminer la liste des coordonnées de P

a) Dans la base (A_0, A_1, A_2, A_3).

A l'aide de la double distributivité, en développant, je trouve

$\boxed{(-6; -11; 14; 24)}$.

b) Dans la base (B_0, B_1, B_2, B_3).

A l'aide de la formule de Taylor, notamment en calculant les évaluations de P, P', P'' et P''' en 5, je trouve

$\boxed{(3289; 1929; 374; 24)}$.

c) Dans la base (C_0, C_1, C_2, C_3).

A l'aide d'un système linéaire triangulaire je trouve

$\boxed{(21; 199; 158; 24)}$.

d) Dans la base (D_0, D_1, D_2, D_3).

A l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange, notamment en calculant les évaluations de P en 0, 1, 2, et 3, je trouve

$\boxed{(1; 10,5; -110; 122,5)}$.

Exercice 3 (*Valuations échelonnées*).

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on appelle **valuation** de P, qu'on note $val(P)$, l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ égal à la multiplicité de $0_{\mathbb{C}}$ dans P ; c.-à-d. le plus bas des degrés des coefficients non nuls de la décomposition canonique de P si $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, et $+\infty$ si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

On dit qu'une famille de polynômes $(P_1, P_2 \dots, P_n)$ est **à valuations échelonnées** si, et seulement si,

$$\mathrm{val}(P_1) < \mathrm{val}(P_2) < \cdots < \mathrm{val}(P_n).$$

1. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Donner, **en justifiant**, des formules (avec des égalités ou des inégalités) pour $\mathrm{val}(P+Q)$ et $\mathrm{val}(PQ)$.

Démontrons que $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et

$Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$. Notons $s = \mathrm{val}(P)$ et $t = \mathrm{val}(Q)$. Alors $\forall k < s, a_k = 0$ et $\forall k < t, b_k = 0$. Donc, $\forall k < \min(s,t)$, $a_k + b_k = 0$, $\boxed{\text{donc } \mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(s,t)}$.

Ensuite, démontrons que $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$. Notons $s = \mathrm{val}(P)$ et $t = \mathrm{val}(Q)$. Notons $PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si $k < s + t$, alors, comme

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell},$$

on remarque que pour tout ℓ dans $[\![0, k]\!]$, ou $\ell < s$, et donc $a_\ell = 0$, ou $\ell \geqslant s$, donc $k - \ell < s + t - s = t$, donc $b_{k-\ell} = 0$. Donc $c_0, \dots, c_{s+t-1}$ sont nuls.

Ensuite, $c_{s+t} = a_s b_t$, qui est non nul, $\boxed{\text{donc la valuation de } PQ \text{ est égale à } s+t.}$

---

2. Démontrer qu'une famille de polynômes tous non nuls à valuations échelonnées est libre.

Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes tous non nuls à valuations échelonnées.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Par l'absurde, supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Alors l'ensemble $A = \{k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Il possède donc un plus petite élément m. Mais alors $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Nommons alors $v \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ la valuation de P_m. Comme $P_m \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, on a $v \in \mathbb{N}$. Nommons alors $a \in \mathbb{C}^*$ le coefficient canonique du monôme X^v dans P, alors, comme les valuations des polynômes sont échelonnées, le coefficient canonique du monôme X^v dans $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k$ est $\lambda_m a$. Donc, comme $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{C}[X]}$, $\lambda_m a = 0$, donc $\lambda_m = 0$ car $a \neq 0$. Ce qui est absurde car $m \in A$.
Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.

---

1 Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes complexes en une indéterminée X, et $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degrés inférieurs à n. On définit la famille des polynômes de Bernstein d'ordre n notée $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$, par

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}.$$

I Définition et premières propriétés.

1. Déterminer la décomposition linéaire canonique des polynômes $(B_{3,k})_{0\leqslant k\leqslant 3}$.

Calculons :

- ▷ $B_{3,0} = \binom{3}{0} X^0(1-X)^3 = (1-X)^3 = 1-3X+3X^2-X^3.$
- ▷ $B_{3,1} = \binom{3}{1} X(1-X)^2 = 3X(1-2X+X^2) = 3X-6X^2+3X^3.$
- ▷ $B_{3,2} = \binom{3}{2} X^2(1-X) = 3X^2-3X^3.$
- ▷ $B_{3,3} = \binom{3}{3} X^3(1-X)^0 = X^3.$

---

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Donner (sans justification) les racines de $B_{n,k}$ et leurs multiplicités.

Étant donné que $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$, on en déduit que

$\boxed{0 \text{ est racine de } B_{n,k} \text{ de multiplicité } k}$ et $\boxed{1 \text{ est racine de } B_{n,k} \text{ de multiplicité } n-k}$.

---

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tous $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, m]\!]$, déterminer $B_{n,k} \wedge B_{m,\ell}$.

On sait que $B_{n,k}$ et $B_{m,\ell}$ sont scindés, avec deux racines uniquement : 0, de multiplicité k pour $B_{n,k}$ et ℓ pour $B_{m,\ell}$ et 1, de multiplicité $n-k$ pour $B_{n,k}$ et $m-\ell$ pour $B_{m,\ell}$, donc, d'après les formules sur la mutliplicité des racines d'un pgcd,

$$B_{n,k} \wedge B_{m,\ell} = X^{\min(k,\ell)}(1-X)^{\min(n-k,m-\ell)}.(-1)^{\min(n-k,m-\ell)},$$

la dernière puissance servant à rendre le polynôme unitaire.

---

4. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Donner le degré de $B_{n,k}$ ainsi que l'expression de ses coefficients. Donner en particulier le coefficient dominant de $B_{n,k}$.

Développons proprement, d'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
B_{n,k} &= \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} X^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (-1)^\ell X^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell} (-1)^\ell X^{\ell+k} =_{j=k} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^j,
\end{aligned}$$

donc $B_{n,k}$ est de degré n et son coefficient α_j est égal à 0 si $j < k$ ou $j > n$, et égal à $\boxed{\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}}$ sinon. En particulier son coefficient dominant est $\boxed{\binom{n}{k}(-1)^{n-k}}$.

5. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$?

On écrit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1},$$

car X **et** $(1-X)$ **commutent pour** $\times$.

6. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$.

On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= X \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k} \\
&= X \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-k} \\
&= nX \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} X^{\ell} (1-X)^{n-1-\ell} \qquad (\ell = k-1) \\
&= nX, \qquad \text{(car } X \text{ et } 1-X \text{ commutent).}
\end{aligned}$$

D'où le résultat !

II Engendrement et liberté.

Dans la suite, n est supposé non nul. Pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$V_\ell = \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-\ell}).$$

7. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

Les transvections et les dilatations sur les listes de vecteurs préservent l'espace engendré, il est vrai que

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

car $B_{n,n-\ell} = aX^{n-\ell} + \vec{r}$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\vec{r} \in \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)})$ d'après la formule définissant ce polynôme.

---

8. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que

$$(1) \qquad \forall \ell \in [\![0, n]\!],\ V_\ell = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-\ell})$$

Raisonnons par récurrence.

(1°) Pour commencer, $V_0 = \mathrm{Vect}(X^{n-0})$ car $B_{n,n-0} = X^{n-0}$.

(2°) Ensuite, soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$V_{\ell-1} = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}).$$

Alors

$$\begin{aligned} V_\ell &= \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-(\ell-1)}) + \mathrm{Vect}(B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}) + \mathrm{Vect}(B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell}) \end{aligned}$$

(3°) D'où le résultat, en vertu de la propriété du plus petit élément dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

En particulier, $V_n = \mathbb{C}_n[X]$. Donc la liste est génératrice.

---

9. En déduire que les polynômes de Bernstein d'ordre n sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Conclure que $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

En deux temps.

$*$ D'après ce qui précède, on a :

$$\{0_{\mathbb{C}_n[X]}\} = \mathrm{Vect}(\emptyset) \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = \mathbb{C}_n[X].$$

Or, d'après la propriété d'ajout d'un vecteur à une famille libre, ou bien la nouvelle famille est liée et engendre le même espace, ou bien la nouvelle famille est libre et engendre un sous-espace strictement plus grand. Donc la famille en question est libre.

$*$ Comme $V_n = \mathbb{C}_n[X]$, cette famille engendre $\mathbb{C}_n[X]$. Donc, étant libre, il s'agit d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

---

10. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. En écrivant que $X^k = X^k(X + (1 - X))^{n-k}$, écrire X^k comme combinaison linéaire des $(B_{n,\ell})_{0 \leqslant \ell \leqslant n}$. Retrouver (1).

$*$ On écrit

$$\begin{aligned} X^k &= X^k(X + (1 - X))^{n-k} \\ &= X^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} X^\ell (1 - X)^{n-k-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} X^{k+\ell}(1 - X)^{n-(k+\ell)} \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} X^j (1 - X)^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} \frac{1}{\binom{n}{j}} \binom{n}{j} X^j (1 - X)^{n-j} = \boxed{\sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} \frac{1}{\binom{n}{j}} B_{n,j}}, \end{aligned}$$

$*$ Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. Alors, d'après les calculs ci-avant,

$$\forall k \in [\![n - \ell, n]\!], \ X^k = \mathrm{Vect}(B_{n,j})_{n-\ell \leqslant j \leqslant n}.$$

Donc

$$\mathrm{Vect}(X^j)_{n-\ell \leqslant j \leqslant n} \subset \mathrm{Vect}(B_{n,j})_{n-\ell \leqslant j \leqslant n}.$$

L'inclusion réciproque se déduit de manière semblable. D'où le résultat.

---

2 Propriétés de la trace

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

I Trace et matrices de rang 1

Soit $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Dans les questions 1, 2 et 3, $n = 3$**,** $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

1. Calculer le produit matriciel $U^\top \times V$, puis le produit $U \times V^\top$.

On vérifiera que $U^\top \times V$ donne bien un scalaire, que l'on notera τ, et que $U \times V^\top$ donne bien une matrice, que l'on notera M.

On calcule $U^\top \times V$:

$$U^\top V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 4 = 2.$$

Puis on calcule

$$UV^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

.

---

2. Résoudre les deux systèmes linéaires $MX = 0$ et $MX = \tau X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $MX = 0_{3,1}$ et $\mathcal{S}_\tau$ l'ensemble des solutions de $MX = \tau X$. On présentera les solutions à l'aide de la notation Vect*.*

On résout $MX = 0$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\alpha - 2\beta \\ y = \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$). Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -3\alpha - 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \ : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

On résout $MX = 2X$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2x \\ -x - 3y - 2z = 2y \\ 2x + 6y + 4z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 5y - 2z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 & \\ -8y - 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 12y + 6z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 & \\ 2y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2/(-4) \\ 2y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3/6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 & \\ 2y + z = 0 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x + 2z = \alpha/2 \\ y = -\alpha/2 \\ z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

---

3. Déterminer $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_T$.

On veut chercher un X qui soit solution des équations vérifiées par $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_T$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $X \in \mathcal{S}_T$ donc $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais $X \in \mathcal{S}_0$, donc $\alpha + 3(-\alpha) + 2(2\alpha) = 0$, i.e. $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $X = 0_{3,1}$. Réciproquement, $0_{3,1}$ est dans l'intersection, donc $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_T = \{0_{3,1}\}$.

Désormais, n, U et V sont à nouveau quelconques !

4. Exprimer, à l'aide de $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ les produits $U^\top \times V$, $V^\top \times U$ et $U \times V^\top$. On note $M = U \times V^\top$.

On remarque que

$$\boxed{U^\top \times V = V^\top U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n u_k v_k},$$

et que $U \times V^\top$ est la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\boxed{m_{ij} = u_i v_j}$.

---

5. Comparer $U^\top \times V$ et $\mathrm{Tr}(M)$.

Calculons $\mathrm{Tr}(M)$. $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = U^\top \times V}$.

On note $\tau = \mathrm{Tr}(M)$.

6. Démontrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $M^p = \tau^{p-1} M$.

Procédons par récurrence. L'initialisation est évidente. Ensuite, si $M^p = \tau^{p-1} M$ pour un certain p, $M^{p+1} = M^p M = \tau^{p-1} M^2$. Or,

$$M^2 = UV^\top UV^\top = U(V^\top U)V^\top = \tau UV^\top = \tau M.$$

Donc $M^{p+1} = \tau^{p-1} \tau M = \tau^p M$, d'où l'hérédité et le résultat.

On suppose désormais que $\tau \neq 0$. On nomme $\mathcal{S}_0 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0_{n,1}\}$ et $\mathcal{S}_\tau = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \tau X\}$.

7. Démontrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists!(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau,\ X = X_0 + X_\tau.$$

Effectuons une analyse-synthèse. Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Analyse. Supposons qu'il existe $(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau$ tel que $X = X_0 + X_\tau$. Alors $MX = MX_0 + MX_\tau$, donc $MX = \tau X_\tau$, donc $\boxed{X_\tau = \frac{1}{\tau} MX}$, puis $\boxed{X_0 = X - X_\tau = \left(\mathrm{I}_n - \frac{1}{\tau} M\right) X}$.

Synthèse. Posons $X_\tau = \frac{1}{\tau} MX$ et $X_0 = X - X_\tau$. Alors

▷ clairement, $\boxed{X = X_0 + X_\tau}$.

▷ ensuite, $MX_\tau = \dfrac{1}{\tau}M^2X = \dfrac{1}{\tau}\tau MX = \tau X_\tau$, donc $\boxed{X_\tau \in \mathcal{S}_\tau}$.

▷ enfin, $MX_0 = MX - MX_\tau = MX - M\dfrac{1}{\tau}MX = MX - \dfrac{1}{\tau}M^2X = MX - \dfrac{1}{\tau}\tau MX = 0_{3,1}$, donc $\boxed{X_0 \in \mathcal{S}_0}$.

D'où l'existence et le résultat !

---

8. Démontrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists \alpha \in \mathbb{K},\ MX = \alpha U$. Déterminer MU en fonction de U, de V, de τ. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\tau$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $MX = (UV^\top)X = U(V^\top X) = (V^\top X)U$, avec $V^\top X \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, qui est donc un élément de $\mathbb{K}$.

Ensuite, $MU = UV^\top U = U(V^\top U) = U\tau = \tau U$.

Enfin,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S}_\tau &\Leftrightarrow MX = \tau X \\ &\Leftrightarrow (V^\top U)X = \tau X. \end{aligned}$$

Donc $X \in \mathcal{S}_\tau \Rightarrow X \in \mathrm{Vect}(U)$. Réciproquement, si $X = \alpha U$, alors $MX == \alpha MU = \alpha\tau U = \tau X$.

Donc $\mathcal{S}_\tau = \mathrm{Vect}(U)$.

II Une caractérisation de la trace

9. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

C'est une question de cours !

Soit maintenant une application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Si $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui vaut 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} 1_{\{(a,b)\}}(i,j) = \delta_{i,a}\delta_{b,j}.$$

3. Que vaut $\varphi(0_n)$?

$\varphi(0_n) = \varphi(0_n + 0_n) = \varphi(0_n) + \varphi(0_n)$, donc $\varphi(0_n) = 0$.

4. Soit $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. En exprimant $\varphi(E_{a,b}E_{b,b})$ de deux manières différentes, montrer que $\varphi(E_{a,b}) = 0$.

On sait que $E_{a,b}E_{b,b} = E_{a,b}$, alors que $E_{b,b}E_{a,b} = 0_n$, car $b \neq a$. Donc

$\boxed{\varphi(E_{a,b}) = \varphi(E_{a,b}E_{b,b}) = \varphi(E_{b,b}E_{a,b}) = \varphi(0_n) = 0}$.

5. Soit $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. Démontrer que $\varphi(E_{a,a}) = \varphi(E_{b,b})$.

On pourra introduire les matrices $E_{a,b}$ et $E_{b,a}$

On remarque que $E_{a,b}E_{b,a} = E_{a,a}$ et $E_{b,a}E_{a,b} = E_{b,b}$. Donc

$\boxed{\varphi(E_{a,a}) = \varphi(E_{a,b}E_{b,a}) = \varphi(E_{b,a}E_{a,b}) = \varphi(E_{b,b})}$.

6. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(A) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

Posons $\lambda = \varphi(E_{1,1})$. Alors par la question précédente, $\varphi(E_{i,i}) = \lambda$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$. Donc

$$\varphi(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\varphi(E_{ij}).$$

Or, $\varphi(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$ et λ si $i = j$, donc

$$\boxed{\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda = \lambda \operatorname{Tr}(A)}.$$

D'où le résultat !

III Matrices semblables

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

7. Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.

Soient A et B deux matrices semblables. Alors on trouve P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{Tr}(B)}$.

8. Soient A et B deux matrices semblables. Démontrer que si B est scalaire (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ B = \lambda I_n$), alors $A = B$. Démontrer que si B est inversible, alors A est inversible (et préciser son inverse).

A et B sont semblables donc on trouve P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

▷ si B est scalaire, on trouve $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B = \lambda I_n$. Alors

$$\boxed{A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n}.$$

▷ si B est inversible, comme P^{-1}, P et B sont inversibles, $A = PBP^{-1}$ est inversible et $\boxed{A^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}}$.

9. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente si, et seulement si, il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. Démontrer que si A est nilpotente et est semblable à B, alors B est nilpotente (*s'il y a un raisonnement par récurrence, on le rédigera avec soin*).

A est nilpotente donc on trouve k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. De plus, A est semblable à B donc $A = PBP^{-1}$. Alors $B = P^{-1}AP$. Montrons par récurrence sur s que pour tout s dans $\mathbb{N}$, $B^s = P^{-1}A^sP$.

Initialisation. Si $s = 0$, $B^0 = I_n$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_nP = I_n$.

Hérédité. Si, pour un certain s, $B^s = P^{-1}A^sP$, alors

$$B^{s+1} = B^s \times B = P^{-1}A^sPP^{-1}AP = P^{-1}A^sI_nAP = \boxed{P^{-1}A^{s+1}P,}$$

d'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

$\boxed{\text{On en déduit que } B^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}0_nP = 0_n. \text{ Donc } B \text{ est nilpotente !}}$

10. Donner deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui soient de traces égales mais qui ne soient pas semblables.

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = 0_2$. Alors A est de trace nulle, B aussi, mais A est inversible et pas B donc A et B ne sont pas semblables.

On va dans cette partie démontrer le résultat suivant : toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

11. Un exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 6 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible, calculer P^{-1} et montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

À l'aide d'un pivot de Gauss, on remarque que P est inversible d'inverse

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

On calcule alors

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}},$$

qui est de diagonale nulle.

Propriété 1.

On admet que : A est semblable à B si, et seulement si, on peut passer de A à B par un enchaînement d'opération élémentaires simultanées sur les lignes **et** les colonnes parmi les trois sortes suivantes :

- ▷ une **double** transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ **ET** $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.
- ▷ une **double** dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **ET** $C_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} C_i$.
- ▷ une **double** permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ **ET** $C_j \leftrightarrow C_i$.

En d'autres termes on a $B = PAP^{-1}$ avec P un produit de matrices de transvection, dilatation ou permutation.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -21 & -7 \end{pmatrix}$ comme le prouve les deux opérations

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ **ET** $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$. **qu'on effectue en même temps.**

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

12. Si A est une matrice scalaire que dire de A ?

Si A est une matrice scalaire, on trouve $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Alors $\mathrm{Tr}(A) = n\lambda$. Donc si A est de trace nulle, $\lambda n = 0$ donc $\lambda = 0$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est nulle.}}$

---

13. On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix},$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est de trace nulle, où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

On pourra commencer par traiter le cas où la première ligne de A comporte un coefficient non nul qui n'est pas en position $(1,1)$; puis se ramener à ce cas en discutant selon si A est diagonale ou non.

Si A est une matrice scalaire, alors A est nulle d'après ce qui précède, et il n'y a rien à faire. Pour la suite, supposons que A n'est pas scalaire. Procédons en deux temps.

$*$ D'abord, supposons que la première ligne de A comporte un coefficient non nul qui n'est pas en position $(1,1)$. Nommons a le coefficient $(1,1)$ et b un coefficient non nul sur la première ligne pas en position $(1,1)$. Supposons qu'il soit en $(1,j)$ avec $j \neq 1$.

On effectue alors la double transvection $L_j \leftarrow L_j + \dfrac{a}{b} L_1$ (dont on se moque de l'effet), **puis** $C_1 \leftarrow C_1 - \dfrac{a}{b} L_j$. Cette opération a pour effet d'amener un coefficient nul en position $(1,1)$, et le résultat est donc démontré !

$*$ Ensuite, montrons que A est semblable à une matrice avec un coefficient non nul sur la première ligne et pas à la position $(1,1)$. Ce qui fera conclure d'après le traitement ci-avant.

- ▷ Supposons que A est diagonale. Comme A n'est pas scalaire, choisissons i tel que le coefficient (i,i), notons sa valeur b, soit différent du coefficient $(1,1)$, dont on note la valeur a. On effectue la double transvection $L_1 \leftarrow L_1 - L_i$ et $C_i \leftarrow C_i + C_1$. On obtient alors en position $(1,i)$ le coefficient $a - b \neq 0$.
- ▷ Supposons que A n'est pas diagonale. Choisissons alors une position (i,j), où $i \neq j$, dont le coefficient est non nul. Appelons a la valeur de ce coefficient. Effectuons la double permutation $L_i \leftrightarrow L_1$ et $C_i \leftrightarrow C_1$. On amène donc a en

position $(1, j)$ par la première opération, puis ce coefficient n'est pas affecté par la deuxième comme $i \neq j$!

Donc A est semblable à une matrice avec un coefficient non nul sur la première ligne et pas en position $(1, 1)$.

---

14. En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

On pourra procéder par récurrence sur n.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\underset{n}{\text{Pr}}$: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \text{Tr}(A) = 0 \Rightarrow A$ est semblable à une matrice de diagonale nulle..

Initialisation. Si $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, de trace nulle, alors, comme A n'a qu'un coefficient, A est nulle, donc semblable à une matrice de diagonale nulle.

Hérédité. On suppose $\underset{n}{\text{Pr}}$ vraie pour un certain n. Soit alors A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, de trace nulle. Alors, par la question précédente, A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$ où A' est une matrice de taille $n \times n$ de trace nulle, où L est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que l'on trouve $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$.

Par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice de diagonale nulle, donc on trouve $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QA'Q^{-1}$ est de diagonale nulle. Posons alors $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$. Alors R est inversible d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Mais $R \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & LQ^{-1} \\ QC & B \end{pmatrix}$ qui est de diagonale nulle. Donc $RPAP^{-1}R^{-1} = (RP)A(RP)^{-1}$ est de diagonale nulle. D'où l'hérédité et le résultat !

***