1. Espaces vectoriels sur K et applications linéaires

a) *Espace vectoriel sur **K*** :

(i) Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: groupe additif de vecteurs muni d'une multiplication par les scalaires qui est doublement distributive et compatible avec la multiplication entre les scalaires ; **espace des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel** ; espaces vectoriels de référence ; espace vectoriel produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; combinaisons linéaires de deux vecteurs, d'une famille finie ou d'une famille infinie de vecteurs.

(ii) Sous-espaces vectoriels (s.e.v.) : **partie non vide et stable par addition et par multiplication externe** ; stabilité par combinaisons linéaires quelconques ; l'ensemble des combinaison linéaires des éléments de toute partie A est égal au sous-espace engendré par cette partie A elle-même (adaptation pour les familles) ; croissance de l'engendrement pour l'inclusion ; engendrement et ajout d'un nouveau vecteur, combinaison linéaire ou non des anciens ; invariance de l'espace engendré par opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille.

(iii) Familles de vecteurs : **famille génératrice et invariance de la qualité génératrice** par retrait d'un vecteur combinaison linéaire des autres, et par opérations élémentaires ; **famille libre et invariance de la qualité libre** par ajout d'un vecteur non combinaison linéaire des anciens, et par opérations élémentaires ; famille liée de vecteurs ou famille de vecteurs linéairement dépendants, et **conditions suffisantes de liaison** ; à toute famille libre un vecteur donne une famille liée si le nouveau est combinaison linéaire des anciens, et une famille libre sinon ; toute famille (liste ou suite) de polynômes tous non nuls de degrés distincts est libre ; base de décomposition linéaire, bases canoniques d'espaces de référence, et exemples de bases de polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.

(iv) Somme de deux s.e.v. : sous-espace somme d'un couple de s.e.v. ; somme des sous-espaces engendré par un couple de parties ; couple de s.e.v. en somme directe ; **caractérisations du caractère direct d'une somme de s.e.v.** (*par annulation et par intersection*). concaténation de familles génératrices, libres ; couple de s.e.v. supplémentaires l'un de l'autre.

b) *Applications linéaires* :

(i) Généralités : applications linéaires et isomorphismes de $\mathbb{K}$-e.v., endomorphismes et automorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v., formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v. ; respect des relations linéaires ; exemples de $\lambda \mapsto \lambda.\vec{v}_0$, $\vec{v} \mapsto \lambda_0.\vec{v}$ et des formes linéaires coordonnées associées à une base : $\sum x_i\vec{b}_i \mapsto x_{i_0}$; les combinaisons linéaires et les composées bien définies d'applications linéaires sont des applications linéaires ; e.v. $(\mathcal{L}(E;F),+,.)$, s.e.v. de $F^E = \mathcal{F}(E,F)$; **caractérisation des applications linéaires arrivant dans un espace muni d'une base finie** : $f \in F^E$ est linéaire si, et seulement si, chacune de ses applications coordonnées est linéaires ; **représentation des applications linéaires partant d'un espace muni d'une base finie** : $\mathcal{L}(E,F) \ni f \mapsto (f(\vec{b}_i))_{i\in I} \in F^I$ induit un isomorphisme d'e.v. (*encore vrai si I est infini mais non abordé*) ; isomorphisme canonique entre $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n),+,.)$ entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: matrice et application linéaire canoniquement associées l'une à l'autre ; bilinéarité de la composition d'applications linéaires ; application réciproque d'une application linéaire et bijective ; anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +, .)$ (*2ème année : algèbre* $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$) et son groupe des inversibles $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

(ii) Sous-espace image et noyau : action d'une application linéaire sur les s.e.v. au départ et à l'arrivée : image directe et image réciproque. caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité d'une application linéaire en termes de sous-espaces images et noyaux ; ensemble des antécédents de tout vecteur par une application linéaire, en lien avec le sous-espace noyau ; étant donné un système linéaire, interprétation de l'ensemble des solutions *homogènes* comme sous-espace noyau d'une application linéaire, et interprétation de l'ensemble des seconds membres pour lesquels le système est compatible comme sous-espace image de la même application linéaire.

(iii) Application linéaire et familles de vecteurs : action d'une application linéaire sur un famille génératrice, sur une famille liée et sur une famille libre ; **caractérisation de la surjectivité, de l'injectivité et de la bijectivité par l'action sur une base**.

(iv) Projecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. : le projecteur (*linéarité admise*) supporté par un s.e.v. V_1 et dirigé par un s.e.v. V_2 supplémentaire du premier (*plus généralement, la projection sur le s.e.a. V_1 parallèlement au s.e.a. V_2, point de vue à venir*) ; endomorphisme idempotent ; tout projecteur est un endomorphisme idempotent ; réciproquement, **tout endomorphisme idempotent est le projecteur supporté par son sous-espace image et dirigé par son sous-espace noyau**, lesquels bien supplémentaires l'un de l'autre (*d'où l'unicité du support et de la direction* de tout projecteur).

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

a. L'ensemble des combinaisons linéaires de toute famille A est égal au sous-espace engendré par cette famille elle-même.

b. Ajouter à (resp. soustraire de) toute famille un vecteur préserve l'espace engendré si le vecteur ajouté (resp. soustrait) est combinaison linéaire des autres, et fait croître strictement (resp. décroître strictement) l'espace engendré sinon.

c. Ajouter à toute famille *libre* un vecteur donne une famille liée si le vecteur ajouté est combinaison linéaire des autres, et une famille libre sinon.

d. Toute suite de polynômes de degrés échelonnés décrivant $\mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Conséquence : formule de Taylor polynomiale (deuxième version).

e. Caractérisations du caractère direct d'une somme de s.e.v. (*par annulation et par intersection*).

f. Caractérisation des applications linéaires arrivant dans un espace muni d'une base finie : $f \in F^E$ est linéaire si, et seulement si, chacune de ses applications coordonnées est linéaires.

g. Représentation des applications linéaires partant d'un espace muni d'une base finie : $\mathcal{L}(E, F) \ni f \mapsto (f(\vec{b}_i))_{i \in I} \in F^I$ induit un isomorphisme d'e.v.

h. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par son action sur une base.

i. Projecteurs et endomorphismes idempotents : tout projecteur est un endomorphisme idempotent ; réciproquement, tout endomorphisme idempotent est le projecteur supporté par son sous-espace image et dirigé par son sous-espace noyau, lesquels bien supplémentaires l'un de l'autre (*d'où l'unicité du support et de la direction de tout projecteur*).

walter.ngambou@ac-versailles.fr