Thèmes : EV's, applications linéaires, limites.

(avec corrigé)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Définir $F+G$.

Le sous-espace $F+G$ est constitué de tout vecteur de l'espace E qui peut s'écrire comme la somme d'un couple de vecteurs tels que la première composante appartienne à F et la dernière à G :

$$F+G=\{f+g\ :\ (f,g)\in F\times G\}.$$

2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. **Définir** « la somme de F et G est directe » puis donner une proposition **caractérisant** la qualité directe d'une somme.

On dit que la somme du couple de s.e.v. (F,G) est directe si, et seulement si, l'écriture de tout vecteur de l'espace somme comme la somme d'un couple de vecteurs tels que la première composante appartienne à F et la dernière à G, cette écriture est unique :

$$\forall h\in F+G, \exists!(f,g)\in F\times G/\ h=f+g\ .$$

3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une base de F et $(g_1,\dots,g_p)$ une base de G. Donner une CNS portant sur F et G pour que...

▷ $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p)$ soit libre...

C'est que la somme $F+G$ soit directe.

▷ $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p)$ soit génératrice...

C'est que la somme $F+G$ soit égale à l'espace E tout entier.

▷ $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p)$ soit une base...

C'est que la somme $F+G$ soit directe et égale à l'espace E tout entier ; autrement dit, que F et G soient supplémentaires l'un de l'autre dans E.

4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Donner la définition d'une application linéaire de E dans F.

C'est une application de E dans F qui est additive et $\mathbb{K}$-homogène ; autrement dit, qui est fait passer de toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ à la combinaison linéaire des images affectés des mêmes coefficients ; autrement dit, qui respecte toute relation de dépendance linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$.

---

5. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Définir $\operatorname{Ker}(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$, donner une CNS d'injectivité sur φ portant sur le noyau.

L'espace image de l'application linéaire φ est l'espace d'arrivée F qui comprend tout vecteur de cet espace E lui-même si, et seulement si, ce vecteur admet est l'image par φ d'un certain vecteur de l'espace de départ E tout entier ; autrement dit, c'est l'image directe par φ de E tout entier.

L'espace noyau de l'application linéaire φ est la partie de l'espace de départ E qui comprend tout vecteur de cet espace E lui-même si, et seulement si, ce vecteur admet pour image par φ le vecteur nul de l'espace d'arrivée F ; autrement dit, c'est l'image réciproque par φ du sous-espace nul de F.

Pour qu'une application linéaire soit injective, il est nécessaire et suffisant que son espace noyau soit réduit au sous-espace nul de l'espace de départ ; autrement dit, que son noyau ne comprenne que le vectuer nul de l'espace de départ.

---

6. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}((1;2;3))$, $G = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Démontrer que $E = F \oplus G$. Donner la matrice canoniquement associée au projecteur de support F et de direction G.

Premièrement ! *[Je vérifie que F et G sont deux s.e.v. de E]* Le couple (F, G) est bien un couple de parties de E d'après les définitions de ses composantes. L'ensemble F est la partie de E engendré par une famille de vecteurs de E. Quant à l'ensemble G, c'est la partie de E noyau d'une combinaison linéaire des formes linéaires coordonnées canoniques de E. J'en déduis que (F, G) est composé de s.e.v. de E.

Deuxièmement ! *[Je vise à décomposer tout vecteur de manière unique comme... Ce qui achèvera les deux tâches requises.]* Que soit donné $w \in E$ *[à décomposer comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G]* . Je choisis $(u, v) \in E \times E$ quel qu'il soit *[un couple candidat]* .

[Je cherche quelque condition nécessaire pour que le couple choisi donne satisfaction. J'espère ainsi réduire significativement l'ensemble de recherche.] D'abord, je suppose que

(O) $u \in F,\ v \in G$ et $u + v = w$.

Pour tout vecteur x de E, je vais noter $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

[*Je vois que la définition de F par énumération est adaptée au parcours...*] Comme $u \in F$, je prends $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_1 = a$, $u_2 = 2a$ et $u_3 = 3a$. [*... tandis que la définition de G par caractérisation est adaptée à la sélection.*] Comme $v \in G$, à l'égalité $u + v = w$ j'applique l'opérateur $x \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3$, lequel qui est linéaire, pour obtenir l'égalité $14a = w_1 + 2w_2 + w_3$. Cette dernière égalité définit de manière unique le réel a.

[*Ainsi, a est défini de manière unique, ce qui définit le couple (u, v).*] J'ai montré que si $u + v = w$ alors

(1) $\quad u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\quad v = w - \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$

où $a \in \mathbb{R}$ est défini par la relation

(3) $\quad 14a = w_1 + 2w_2 + w_3$.

[*Ayant réduit l'ensemble de recherche à un seul couple, je vérifie si cet unique couple donne satisfaction.*] Ensuite, je suppose réciproquement que la couple (u, v) respecte la condition nécessaire ci-avant. De la relation (2), jointe à la relation (1), je déduis que $u + v = w$; puis en appliquant $x \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3$, je trouve que $14a + v_1 + 2v_2 + 3v_3 = w_1 + 2w_2 + 3w_3$; en joignant la relation (3), je trouve que $v \in G$. Enfin, de la relation (1) je déduis que $u \in F$. Donc la requête visée (O)[*comme **O**bjectif*] est satisfaite.

[*La tâche de décomposition par recherche de tout couple satisfaisant, en espérant en trouver exactement un, cette tâche est achevée.*] En somme,

▷ F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans E,

▷ le couple (p_F, p_G) de projecteurs de E associé à la décomposition $E = F \oplus G$ est définit par :

$$p_F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{14} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \\ 3x + 6y + 9z \end{pmatrix} \; ; \; p_G : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13x - 2y - 3z \\ -2x + 10y - 6z \\ -3x - 6y + 5z \end{pmatrix} .$$

et les matrices canoniquement associées sont

$$\mathrm{Mat}(p_F) = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \; ; \; \mathrm{Mat}(p_G) = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, $G = \mathrm{Vect}(\exp)$. Démontrer **brièvement** que $E = F \oplus G$. Exprimer le projecteur de support F et de direction G.

En procédant comme ci-avant, je trouve que

▷ F et G sont supplémentaires l'un de l'autre dans E,

▷ le couple (p_F, p_G) de projecteurs de E associé à la décomposition $E = F \oplus G$ est définit par :

$$p_F : \varphi \mapsto \varphi - \varphi(0)\exp \ ; \ p_G : \varphi \mapsto \varphi(0)\exp \ .$$

---

8. Asymptotique. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

[*Je vérifie que l'expression est bien définie pour x suffisamment proche de 0.*] Posons $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ si, et seulement si, cela est bien défini. Alors $f(x)$ existe si, et seulement si, $\ln(1+x)$ existe et est non nul ; i.e. si, et seulement si, $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

[*Je peux abréger le travail ci-vant*] Je suppose que $x \in]-\eta, \eta[\setminus\{0\}$, où $\eta = 1/2025$! . Alors $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ existe.

On a : [*J'opère une première estimation asymptotique ; peut-être m'aidera-t-elle à avancer, notamment en trouvant une limite.*]

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

Donc la fonction admet une limite en 0, laquelle est égale à 1. Cela étant, on peut prolonger f par continuité (de manière unique) en posant $f(0) \overset{\text{def.}}{=} 1$.

[*Je pousse l'estimation asymptotique pour traiter la tâche requise.*] A l'aide de développements limités en 0 de $y \mapsto \ln(1+y)$ et $y \mapsto e^y$ et en vertu des propriétés des opérations sur les limites [*combinaison linéaire, produit, quotient et composition de limites*] , je trouve que : lorsque x tend vers 0,

$$f(x) = a + bx + x \cdot o(1)$$

où $(a, b) = (1; 1)$. Ainsi, je (re)trouve que la fonction admet une limite en 0, laquelle est égale à a. J'en déduis que le prolongement par continuité de f en 0 admet alors un développement limité à l'ordre 1 en zéro de coefficient de degré 1 égal à b ; donc, d'après la caractérisation de la dérivabilité par le développement limité à l'ordre 1, il est dérivable en 0 de nombre dérivé égal à b.

`Commentaire.`

Ici, on peut relever ceci :

▷ *ce que f admette un prolongement par continuité en 0 équivaut à ce que f admette un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = a + o(1)$, où $a \in \mathbb{C}$.*

▷ *ce que f admette un prolongement par continuité en 0, lequel est dérivable en ce point, équivaut à ce que f admette un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = a + bx + x \cdot o(1)$, où $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.*
