Thèmes : Espaces vectoriels, limites.

(avec corrigé)

1. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v., $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ une 4-liste dans E, x dans E. Par définition, dire que « x est combinaison linéaire de (a, b, c, d) » c'est dire que ...

Il existe **au moins un élément** $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $\mathbb{K}^4$ tel que

$$x = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} \ .$$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et V une partie de E. **En pratique**, dire que « V est un sous-espace vectoriel de E » c'est dire que ...

V est non vide et stable par combinaisons linéaires (de couples de vecteurs).

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$? Si oui, écrire une décomposition linéaire qui le prouve.

Oui ! En résolvant un système de trois équations linéaires à trois inconnues scalaires, on trouve que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{, où } (x, y, z) = (4; 0; -1).$$

4. Le polynôme $P = 20X^2 - 12X - 8 \in \mathbb{R}_2[X]$ est-il combinaison linéaire de (Q_1, Q_2, Q_3), où $Q_1 = (X-2)(X-3)$, $Q_2 = (X-1)(X-3)$ et $Q_3 = (X-1)(X-2)$? Si oui, écrire une décomposition linéaire qui le prouve.

Oui ! D'après la formule d'interpolation de Lagrange, ou d'après le théorème de décomposition en éléments simples, on trouve que

$$P = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 \text{, où } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0; -48; 68).$$

5. $(\star)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(Q_k) = \left(X^{n-k}(1-X)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base du $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}_n[X]$. (*On pourra poser* $V_\ell = \mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_\ell)$)

Premièrement.

a) $V_0 = \mathrm{Vect}(X^{n-0})$.

b) Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, Q_\ell) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

car $Q_\ell = X^{n-\ell} + \vec{r}$ où $\vec{r} \in \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)})$.

c) Donc en raisonnant par récurrence on trouve que

$$\forall \ell \in \ell \in [\![1, n]\!],\ V_\ell = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-\ell})$$

En particulier, $V_n = \mathbb{C}_n[X]$. Donc la liste est génératrice.

Deuxièmement et dernièrement.

d) D'après ce qui précède, $\{0\} \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n$.

e) Dans la liste est libre car d'après la propriété d'ajout d'un vecteur à une partie aucun des polynômes n'est combinaison linéaire de ceux qui le précède.

---

6. $(\star)$ Montrer que la famille $(f_\alpha) = (\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t})_{\alpha \in \mathbb{C}}$ est libre sur $\mathbb{C}$.

()

Comme pour $(\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \mathrm{e}^{at})_{a \in \mathbb{R}}$. Toute fonction de la famille est non nulle ; puis toute sous-famille de n fonctions est libre, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

---

7. Asymptotique. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}$.

---

walter.ngambou@ac-versailles.fr