CH17 ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES

17.2 APPLICATIONS LINÉAIRES

17.2.1 Généralités ***a.*** Applications linéaires et isomorphismes de $\mathbb{K}$-e.v., endomorphismes et automorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v., formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v.. respect des relations linéaires. ***b.*** Exemples de $\lambda \mapsto \lambda.\vec{v}_0$, $\vec{v} \mapsto \lambda_0.\vec{v}$ et des formes linéaires coordonnées associées à une base : $\sum x_i \vec{b}_i \mapsto x_{i_0}$. ***c.*** Les combinaisons linéaires et les composées bien définies d'applications linéaires sont des applications linéaires. e.v. $(\mathcal{L}(E;F),+,.)$, s.e.v. de $F^E = \mathcal{F}(E,F)$. ***d.*** Caractérisation des applications linéaires arrivant dans un espace muni d'une base finie : $f \in F^E$ est linéaire si, et seulement si, chacune de ses applications coordonnées est linéaires. ***e.*** Représentation des applications linéaires partant d'un espace muni d'une base finie ou infinie : $\mathcal{L}(E,F) \ni f \mapsto (f(\vec{b}_i))_{i\in I} \in F^I$ induit un isomorphisme d'e.v. (*exemple de la dérivation polynomiale pour le cas où I est infini*). ***f.*** Isomorphisme canonique entre $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n),+,.)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: matrice et application linéaire canoniquement associées l'une à l'autre. ***g.*** Bilinéarité de la composition d'applications linéaires. ***h.*** Application réciproque d'une application linéaire et bijective. ***i.*** Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. $(E,+,.)$ (*2ème année : algèbre* $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$) et son groupe des inversibles $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ (ou $\mathrm{GL}(E)$).

17.2.2 Sous-espace image et noyau ***a.*** Action d'une application linéaire sur les s.e.v. au départ et à l'arrivée : image directe et image réciproque. ***b.*** Caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité en termes de sous-espaces images et noyaux. ***c.*** Ensemble des antécédents de tout vecteur par une application linéaire, en lien avec le sous-espace noyau. ***d.*** Étant donné un système linéaire, interprétation de l'ensemble des solutions *homogènes* comme sous-espace noyau d'une application linéaire, et interprétation de l'ensemble des seconds membres pour lesquels le système est compatible comme sous-espace image de la même application linéaire.

17.2.3 Application linéaire et familles de vecteurs ***a.*** Action d'une application linéaire sur un famille génératrice, sur une famille liée et sur une famille libre ; ***b.*** Caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité par l'action sur une base.

17.2.4 Projecteurs, projections linéaires ***a.*** Le projecteur supporté par un s.e.v. V_1 et dirigé par un s.e.v. V_2 supplémentaire du premier (ou, du point de vue affine, la projection linéaire sur le s.e.v. V_1, parallèlement au s.e.v. V_2). ***b.*** Endomorphisme idempotent. tout projecteur est un endomorphisme idempotent. ***c.*** Réciproquement, tout endomorphisme idempotent est un projecteur, lequel est supporté par son sous-espace image et dirigé par son sous-espace noyau, lesquels bien supplémentaires l'un de l'autre (*d'où l'unicité du support et de la direction* de tout projecteur). ***d.*** Si p est la projection linéaire sur un premier s.e.v. V parallèlement à un dernier s.e.v. W alors $\mathrm{id}-p$ est la projection linéaire sur le dernier s.e.v. W parallèlement au premier s.e.v. V.

17.2.5 Symétries linéaires ***a.*** La symétrie supportée par un s.e.v. V_1 et dirigée par un s.e.v. V_2 supplémentaire du premier (ou, du point de vue affine, la symétrie linéaire par rapport au s.e.v. V_1, parallèlement au s.e.v. V_2). ***b.*** Toute symétrie linéaire est un endomorphisme involutif. ***c.*** Réciproquement, tout endomorphisme involutif est une symétrie linéaire, laquelle est supportée par le sous-espace des vecteurs qu'elle laisse invariants et dirigée par le sous-espace des vecteurs qu'elle multiplie par -1. ***d.*** Si p est la projection linéaire sur un premier s.e.v. V parallèlement à un dernier s.e.v. W alors $\mathrm{id}-2p$ est la symétrie linéaire par rapport au dernier s.e.v. W parallèlement au premier s.e.v. V.

17.2.6 Formes linéaires et hyperplans ***a.*** Un hyperplan est un supplémentaire de toute droite qu'il ne contient pas. ***b.*** Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. ***c.*** Si une forme linéaire s'annule sur un hyperplan alors elle est un multiple de toute forme linéaire *non nulle* définissant cet hyperplan. ***d.*** Les formes linéaires *non nulles* définissant un même hyperplan sont toutes proportionnelles (équations de l'hyperplan).

17.2.7 Stabilisation et commutation ***a.*** Les endomorphismes qui commutent à u constituent un s.e.v. de $(\mathcal{L}(E),+,.)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ (i.e. une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$). ***b.*** Les noyaux et images des endomorphismes qui commutent à u sont des s.e.v. stables par u lui-même. ***c.*** (*HP incontournable*) Si un endomorphisme stabilise toute droite vectorielle, alors c'est une homothétie.

CH18 DÉNOMBREMENT (*en questions de cours)*

18.1 ENSEMBLES FINIS ET CARDINAUX

18.1.1 Ensemble fini ***a.*** Un ensemble E non vide est dit fini si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel n non nul tel les ensembles E et $[\![1,n]\!]$ sont en bijection (se correspondent un à un). ***b.*** Pour $m,n\in\mathbb{Z}$, bijections entre $\{x\in\mathbb{Z}:\ m<x<n\}$ et $[\![1,n-m-1]\!]$, et entre $\{x\in\mathbb{Z}:\ m\leqslant x\leqslant n\}$ et $[\![1,n-m+1]\!]$. ***c.*** Principe des tiroirs : toute application de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est non injective. ***d.*** Par suite, $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,p]\!]$ sont en bijection si, et seulement si, $p=n$.

18.1.2 Cardinal d'un ensemble fini ***a.*** Si un ensemble fini est en bijection avec un second, alors le second est fini et de même cardinal. ***b.*** Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier. ***c.*** Les ensembles infinis sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés. ***d.*** Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et s'il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier. ***e.*** Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

18.1.3 Fonctions et ensembles finis ***a.*** Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée. ***b.*** Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ. ***c.*** Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

18.1.4 Parties finies d'un même ensemble ***a.*** Réunion finie de parties finies et disjointes. ***b.*** *Lemme des bergers* : un ensemble fini étant mis en Parties disjointes de même cardinal, le nombre d'éléments par parties, multiplié par le nombre de parties, produit le nombre d'éléments de l'ensemble tout entier. ***c.*** Complémentaire dans ensemble fini. ***d.*** Différence d'une partie finie privée d'une partie quelconque. ***e.*** Union de deux parties finies. ***f.*** Réunion d'une famille finie de parties finies quelconques : majoration du cardinal et cas d'égalité.

18.1.5 Opérations externes sur les ensembles finis : produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis. fonctions d'un ensemble fini dans un autre. ensemble des parties d'un ensemble fini.

18.2 LISTES ET COMBINAISONS

18.2.1 Listes d'éléments d'un ensemble fini ***a.*** Nombre de p-listes d'un ensemble fini. ***b.*** Nombre de façons de choisir, *successivement* à p reprises (en p fois) et **sans** remise, un élément parmi n. ***c.*** Nombre de fonctions d'un ensemble fini dans un autre (retour).

18.2.2 Arrangements d'un ensemble fini : ***a.*** Nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (ou d'arrangements de p éléments parmi n) ***b.*** Nombre de façons de choisir, *successivement* à p reprises (en p fois) et **sans** remise, un élément parmi n. ***c.*** Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre.

18.2.3 Formules combinatoires ***a.*** Formule « combinatoire » de Pascal : $|\mathcal{P}_p(n)| + |\mathcal{P}_{p+1}(n)| = |\mathcal{P}_{p+1}(n+1)|$. ***b.*** Formule « combinatoire » du binôme : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} |\mathcal{P}_p(n)|\, a^{n-p} b^p$.

18.2.4 Combinaisons d'un ensemble fini ***a.*** Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n (ou de combinaisons de p éléments parmi n).
b. Nombre de façons de choisir, *simultanément* (en une seule fois) p éléments parmi n (sans égard à leur ordre). ***c.*** Nombre de parties d'un ensemble fini (retour).

CH19 ESPACES DE DIMENSIONS FINIES

19.1 DIMENSION FINIE

19.1.1 Existence de bases finies ***a.*** un $\mathbb{K}$-e.v. admet une base finie de cardinal n si, et seulement si, il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. ***b.*** un e.v. de dimension finie est défini comme un e.v. qui admet une base finie. ***c.*** si les cardinaux des familles finies libres d'un e.v. sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'e.v. admet une base finie, de cardinal majoré par cet entier. ***d.*** lemme « de la base intermédiaire » : si $(x_i)_{i\in L}$ est une famille finie libre et que $(x_i)_{i\in G}$ est une famille finie génératrice, sur- famille de la première, alors il existe une famille intermédiaire $(x_i)_{i\in B}$ qui est une base, laquelle est finie. ***e.*** théorème de la base extraite : de toute famille finie libre on peut extraire une base, laquelle est finie.
f. théorème de la base incomplète : étant donné une famille finie libre et une famille finie génératrice, on peut obtenir une base finie en complétant la famille libre par des vecteurs de la famille génératrice. ***g.*** lemme fondamental (premier énoncé) : étant donné un entier naturel n, dans tout espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteur est liée. ***h.*** lemme fondamental (second énoncé) : dans un e.v., quel qu'il soit, le cardinal de toute famille finie libre est inférieur au cardinal de toute famille finie génératrice.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par ce même entier.

2. Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

3. Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

4. Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

5. Une réunion finie de parties finies est une partie finie de cardinal inférieur à la somme des cardinaux. s'il y a égalité alors les parties sont disjointes les unes des autres.

6. Cardinal de l'ensemble des fonctions d'un ensemble fini dans un autre.

7. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

8. Cardinal de l'ensemble des listes, d'une longueur donnée, d'éléments distincts d'un ensemble fini.

9. Formule de Pascal, version combinatoire : $|\mathcal{P}_p(n)| + |\mathcal{P}_{p+1}(n)| = |\mathcal{P}_{p+1}(n+1)|$ (*indépendamment de la formule du binôme, bien sûr*).

10. Formule du binôme, version combinatoire : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} |\mathcal{P}_p(n)|\, a^{n-p} b^p$ (*indépendamment de la formule de Pascal, bien sûr*).

11. Cardinal de l'ensemble des parties, à un nombre donné d'éléments distincts, d'un ensemble fini.

walter.ngambou@ac-versailles.fr