FIN ▽

TD18

Dénombrement

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1 (Dénombrement sur les permutations)**.**

1. Dans $\mathcal{S}_n$, combien y a-t-il de transpositions ?

2. De manière générale, dans $\mathcal{S}_n$, combien y a-t-il de p-cycles ?

Exercice 2. ●○○ Soit E un ensemble de cardinal n, $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E ?

Choisir un couple (A, B) de parties de E, c'est choisir d'abord une partie de E, d'où 2^n possibilités, puis une partie de E, d'où 2^n possibilités, d'où, au total, 4^n possibilités.

Autre point de vue : choisir un tel couple (A, B), c'est, pour chaque élément de E, se demander s'il appartient à $A \cap B$, à A seulement, à B seulement ou à aucun des 2, d'où, pour chaque élément, 4 possibilités. D'où les 4^n possibilités au total.

---

2. Combien de ces couples vérifient la condition $A \subset B$?

Choisir deux parties A et B telles que $A \subset B$, c'est déjà choisir le cardinal de B, k, puis une partie B de E à k éléments ($\binom{n}{k}$ possibilités) puis une partie A de B, i.e. 2^k possibilités. D'où au total

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^k \text{ possibilités.}$$

Autre point de vue : choisir un tel couple (A, B), c'est, pour chaque élément de E, se demander s'il appartient à A (donc à B),à B mais pas à A ou à $E \setminus B$, d'où, pour chaque élément, 3 possibilités. D'où les 3^n possibilités au total.

3. Combien vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

Choisir A et B tels que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, c'est simplement choisir une partie A de E, la partie B étant alors fixée. D'où 2^k possibilités.

Autre point de vue : choisir un tel couple (A, B), c'est, pour chaque élément de E, se demander s'il appartient à A ou B, sans avoir d'autre chois possible, d'où, pour chaque élément, 2 possibilités. D'où les 2^n possibilités au total.

4. Combien vérifient $A \cup B = E$?

Choisir A et B tels que $A \cup B = E$, c'est choisir une partie A de E, d'où $\binom{n}{k}$ possibilités, puis, étant donné que $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, et que $B \setminus A$ est entièrement déterminé, choisir B, c'est simplement choisir $B \cap A$. Donc choisir A et B tels que $A \cup B = E$, c'est choisir A et $C \subset A$. D'où 3^n possibilités.

Autre point de vue : choisir un tel couple (A, B), c'est, pour chaque élément de E, se demander s'il appartient à $A \cap B$,à A mais pas à B ou à B mais pas à A, d'où, pour chaque élément, 3 possibilités. D'où les 3^n possibilités au total.

Exercice 3. ●●○ On considère des déplacements sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, partant de 0. À chaque étape, on peut aller en haut, en bas, à gauche ou à droite (on peut revenir sur nos pas).

1. Combien y a-t-il de chemins de longueur n ?

Si on interdit à un chemin de faire demi-tour direct, il y a 3 choix de direction à chaque fois, d'où 3^n chemins. Sinon il y en a 4^n.

2. Combien y a-t-il de chemis de longueur $2n$ qui ramènent au point de départ ?

On s'autorise à revenir sur nos pas. Choisir un chemin de longueur $2n$ c'est choisir un mot a $2n$ lettres dans l'alphabet HBGD, avec, si n_H, n_B, n_G et n_D les nombres de H,B,G,D, $n_H + n_D = n_B + n_G = n$, $n_H = n_B$ et $n_D = n_G$. S'il y a k « H », on a $\binom{2n}{k}$ manières de choisir les H, puis $\binom{2n-k}{n-k}$ manières de choisir les « D », puis $\binom{n}{k}$ manières de choisir les B (et les G sont donc imposés). D'où au total $\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{n-k}\binom{n}{k}$ manières de choisir les chemins si $n_H = k$, i.e.

$$\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}.$$

D'où, en sommant sur k, un cardinal de

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{nn}{k}\binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n}^2$$

Exercice 4 (Nombre de surjections d'un ensemble dans un autre)**.** Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $p > n$ que vaut ? $S_{n,p}$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.

- Si $p > n$, il n'existe pas de surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. Donc $S_{n,p} = 0$.
- Une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$, donc une permutation de $[\![1, n]\!]$, donc $S_{n,n} = n!$.
- Une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $\{1\}$ est unique, c'est l'application constante égale à 1, donc $S_{n,1} = 1$.
- Une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $\{1, 2\}$ correspond à une partition de $[\![1, n]\!]$ en deux ensembles non vides. Le choix d'une partition de $[\![1, n]\!]$ correspond au choix d'un entier k, le cardinal de l'image réciproque de 1, puis de k antécédents parmi n, d'où $S_{n,2} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$.

Dans le reste de l'exercice, on suppose $0 < p \leqslant n$.

2. Une première relation de récurrence.

Montrer que pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il y a $\binom{p}{k} S_{n,k}$ applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ dont l'image possède k éléments.

En déduire, par un raisonnement de dénombrement, que $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

Une application est toujours une surjection de l'ensemble d'arrivée sur son image. Donc une application ayant une image à k éléments est déterminée par le choix de cette image (d'où $\binom{n}{k}$ choix), puis le choix d'une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans cet ensemble, d'où $\binom{n}{k} S_{n,k}$ applications.

Le nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ est égal à la somme sur k des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ dont l'image est de cardinal k, d'où $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

3. Une deuxième relation de récurrence.

Montrer en dénombrant que si $1 \leqslant p \leqslant n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

Au cours du dénombrement, on pourra, si φ est une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, considérer sa restriction à $[\![1, n-1]\!]$.

Soit $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Soit φ une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, et ψ la restriction de φ à $[\![1, n-1]\!]$.

- soit ψ est elle-même une surjection : il y a $S_{n-1,p}$ possibilités de choisir ψ, et p possibilités de choisir $\varphi(n)$ dans $[\![1, p]\!]$.
- soit ψ n'est pas une surjection, c'est-à-dire que $\varphi(n)$ admet un unique antécédent. Alors il y a p possibilités pour $\varphi(n)$, puis la restriction de φ à $[\![1, n-1]\!]$ est une surjection sur $[\![1, p]\!] \setminus \{\varphi(n)\}$, d'où $S_{n-1,p-1}$ possibilités.

Au final on a $pS_{n-1,p} + pS_{n-1,p-1}$ possibilités, d'où $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

4. En déduire, à l'aide de l'une des relations de récurrence, que $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n$.

Par la formule précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S_{n,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} \binom{k}{j} S_{n,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=j}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} \binom{k}{j} S_{n,j}\end{aligned}$$

Or, $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{j!(p-j)} \frac{(p-j)!}{(p-k)!(k-j)!} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{p-k}$, donc

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} S_{n,j} \sum_{k=j}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p-j}{p-k},$$

soit, en posant $\ell = p - k$,

$$\sum_{k=j}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p-j}{p-k} = \sum_{\ell=0}^{p-j} (-1)^{\ell} \binom{p-j}{\ell} = \begin{cases} 0 \text{ si } p-j > 0, \\ 1 \text{ si } p-j = 0. \end{cases}$$

Donc $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n = \binom{p}{p} S_{n,p} = S_{n,p}$. D'où le résultat.

2 Exercices à faire en TD

Stratégie. Il y a deux types d'exercices :

- les exercices « pour s'entraîner à faire des petits raisonnements de dénombrements » : ce sont les 5, 6, 7, 8, 9. Un peu aussi le 12 même si les raisonnements sont clairement moins triviaux. En faire quelques uns.

- les exercices davantage liés à des notions mathématiques, dans la lignée des 2 et 3 : les 10, 11 et 13.

Minimum à faire. Si vous faites et comprenez bien 5, 6, 8, 12, c'est très bien !

Exercice 5. ●○○ Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot « NOUNOURS » .

Choisir une anagramme de NOUNOURS, c'est

- choisir les emplacements des « N » : $\binom{8}{2}$ possibilités.
- puis choisir les emplacements des « O » : $\binom{6}{2}$ possibilités.
- puis choisir les emplacements des « U » : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- puis choisir l'emplacement du « R » : $\binom{2}{1}$ possibilités.

D'où

$$\frac{8\times 7}{2}\times\frac{6\times 5}{2}\times\frac{4\times 3}{2}\times 2 = 7!.$$

Exercice 6. ●○○ Un jeu de cartes comporte 32 cartes de 4 couleurs (cœur, pique, carreau, trèfle), chaqe couleur comportant 8 cartes : sept, hui, neuf, dix, valet, dame, roi et as. Une main est un ensemble de 8 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains en tout ?

Choisir une main, c'est choisir 8 cartes parmi les 32. Il s'agit d'un tirage non ordonné, sans remise, d'où $\binom{32}{8}$ mains possibles.

2. Combien de mains contiennent au moins un cœur ?

Il faut faire attention à ne pas compter deux fois deux mains identiques. On peut par exemple dire que choisir une main avec un coeur, c'est choisir un nombre de coeurs, entre 1 et 8, k, puis choisir k coeurs parmi les 8 possibles, puis $8-k$ cartes parmi les 24 restantes, d'où

$$\sum_{k=1}^{8}\binom{8}{k}\binom{24}{8-k} = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\binom{24}{8-k} - \binom{24}{8} = \binom{32}{8} - \binom{24}{8},$$

par la formule de Vandermonde. On aurait pu avoir cette formule en disant que choisir une main avec au moins un coeur, c'est choisir une main qui ne contient pas 0 coeur. Or il y a $\binom{24}{8}$ mains sans coeur ! D"où le même résultat.

---

3. Combien de mains contiennent trois piques et une dame ? (on lèvera l'ambiguïté de l'énoncé en proposant deux solutions possibles)

Une ambiguïté dans l'énoncé : la dame peut-elle être la dame de pique ?

- Si **non**, choisir une telle configuration, c'est d'abord choisir trois piques, d'où $\binom{7}{3}$ possibilités (les piques sans la dame), puis choisir une dame parmi les 3 (pas de pique !), puis choisir 4 cartes parmi les 21 restantes, d'où $\binom{7}{3} \times 3 \times \binom{21}{4}$ possibilités.
- Si **oui**, choisir une telle configuration, c'est choisir une configuration comme ci-dessus, ou bien une configuration à 3 piques dont la dame de pique. C'est donc choisir 2 piques parmi les 7 qui restent, puis une configuration quelconque parmi les 21 restantes (les non-pique/non-dame). D'où $\binom{7}{2}\binom{24}{5}$ possibilités dans ce cas, d'où, au total, $\binom{7}{3}\times 3\times\binom{21}{4}+\binom{7}{2}\binom{21}{5}$ possibilités.

---

4. Combien de mains contiennent au moins un carré (i.e. 4 cartes de même hauteur) ?

Choisir une main avec un carré, c'est d'abord choisir une hauteur : on n'a pas de choix sur les cartes de cette hauteur. Pour le reste on a $\binom{28}{4}$ possibilités. D'où $8 \times \binom{28}{4}$ possibilités, auxquelles il faut retrancher les configurations à 2 carrés, que l'on a comptées en double : choisir une configuration à 2 carrés, c'est choisir 2 hauteurs parmi les 8. D'où au final $8 \times \binom{28}{4} - \binom{8}{2}$ possibilités.

Exercice 7. ●◐○ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire pour qu'elle finisse par retomber k fois du même côté, pas nécessairement k fois successives.

1. Quel est le nombre minimal m et le nombre maximal M de lancers ?

Il faut au minimum k lancers et au maximum $2k-1$ lancers.

2. Soit $j \in [\![m, M]\!]$.

(i) Combien y a-t-il de résultats de l'épreuve en j lancers exactement ?

Calculons le nombre de tirages qui amènent à k « Face » en j lancers. On multipliera par 2 pour prendre en compte les « Pile » . Pour obtenir k face en exactement j lancers, il faut en avoir obtenu $k-1$ exactment dans les $j-1$ premiers, i.e. $\binom{j-1}{k-1}$ choix possibles pour les emplacements des Face. D'où $2\binom{j-1}{k-1}$ tirages possibles.

(ii) Combien y a-t-il de résultats de l'épreuve en j lancers au plus ?

En j lancers au plus, il y a donc $2\sum_{\ell=k}^{j}\binom{\ell-1}{k-1} = 2\sum_{\ell=0}^{j-k}\binom{\ell+k-1}{k-1}$.

Exercice 8. ●◐○

1. Combien peut-on faire de nombres à 5 chiffres avec les chiffres 1,2,3,4,5,6 ?

On peut en faire autant que de 5-uplets constitués d'éléments d'un ensemble de cardinal 6, i.e. 6^5 possibilités.

2. Quelle est la somme de ces nombres ?

On remarque que dès lors qu'on a un nombre à n 5 chiffres entre 1 et 6, $77777 - n$ est aussi un nombre à 5 chiffres entre 1 et 6, donc en regroupant convenablement les nombres précédemment trouvés, on obtient toujours 77777, d'où un résultat de $\frac{6^5}{2} \times 77777$.

Exercice 9. ●●○ Une urne contient deux catégories de boules : a boules blanches et b boules noires. Les boules de même couleur sont toutes identiques. On effectue une série de $a+b$ tirages successifs, sans remettre la boule tirée, de sorte que l'urne est vidée à la fin des $a+b$ tirages.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Choisir un tirage, c'est choisir les emplacements dans lesquels il y a une boule noire (ou une boule blanche). D'où $\binom{a+b}{a}$ tirages.

2. Combien de ces séries font tirer la dernière boule blanche en k-ième position ? On notera s_k ce nombre.

Choisir une série qui fait tirer la dernière boule blanche en k-ième position, c'est simplement choisir la position des $a-1$ premières boules blanches, entre les positions 1 et $k-1$, d'où $\binom{k-1}{a-1}$ choix (ce nombre est nul si $a > k$).

3. Que vaut $\sum_{k=1}^{a+b} s_k$? En déduire une formule combinatoire.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des tirages, $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des tirages qui font tirer la dernière boule blanche en k-ième position. Alors $\mathcal{T}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{T}_k$, donc

$$|\mathcal{T}| = \sum_{k=0}^{a+b} |\mathcal{T}_k|,$$

i.e.

$$\binom{a+b}{a} = \sum_{k=1}^{a+b} s_k = \sum_{k=1}^{a+b} \binom{k-1}{a-1}.$$

Exercice 10 (Approximation diophantienne). ●●◐ Si y est un réel, on appelle partie fractionnaire de y la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Soit x un réel.

1. Démontrer que : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant q \leqslant N,\ \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{qN}$.
   On appliquera le principe des tiroirs à $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$.

On considère les N intervalles $\left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N} \right[$ (fermé si $k = N-1$). Les $N+1$ points $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$ appartiennent à ces intervalles, donc, d'après le principe des tiroirs, il existe deux de ces points dans un de ces intervalles, i.e. il existe k et ℓ tels que $|\{kx\} - \{\ell x\}| \leqslant \dfrac{1}{N}$. Alors

$$|(k-\ell)x - (\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)| \leqslant \frac{1}{N},$$

i.e.

$$\left| x - \frac{(\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)}{(k-\ell)} \right| \leqslant \frac{1}{N(k-\ell)},$$

en supposant $k \geqslant \ell$. En posant $q = k - \ell$, et $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor$, comme $q \leqslant N$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

d'où le résultat !

---

2. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

Si x est rationnel, c'est évident : si $x = \dfrac{a}{b}$, prendre $\dfrac{an}{bn}$ pour tout n.

Sinon, si x est irrationnel, on a construit, dans le théorème précédent, une suite (p_N, q_N) telle que pour tout N,

$$\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leqslant \frac{1}{Nq_N}.$$

En particulier $\frac{p_N}{q_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Mais q_N est une suite d'entiers. Si elle ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une sous-suite bornée $(q_{\varphi(N)})$ (le redémontrer), de laquelle on peut extraire une sous-suite convergente $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$. Mais une suite d'entiers convergente est stationnaire, donc $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$ est constante à partir d'un certain rang.

Donc $(p_{\varphi\circ\psi(N)})$ est à son tour bornée, donc, possède une sous-suite convergente $(p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)})$, donc constante àpcr. Donc $\frac{p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}{q_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}$ est constante àpcr et converge vers x, absurde.

Donc $q_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une infinité de $q_N \in [\![1, n]\!]$ vérifiant

$$\left|x - \frac{p_N}{q_N}\right| \leqslant \frac{1}{Nq_N} \leqslant \frac{1}{q_N^2}.$$

Exercice 11. ●●◐ Soit E un ensemble de cardinal n.

Il y a un point de vue qui permet de trivialiser l'exercice : c'est celui des tables ! Une loi de composition interne se décrit entièrement par une table de composition, avec une double entrée : si $a_1, \ldots, a_n$ sont les éléments de E, le produit $a_i \star a_j$ se lit avec le coefficient (i, j) de la table

1. (i) Combien peut-on définir de lois de composition internes sur E ?

Choisir une loi de composition interne, c'est choisir un tableau rempli avec un élément de E dans chaque case, d'où n^{n^2} choix possibles.

(ii) Combien sont commutatives ?

Choisir une loi de composition interne, c'est choisir un tableau rempli avec un élément de E dans chaque case, tel que la case (i, j) et la case (j, i) soient égales, i.e. c'est choisir les éléments du triangle supérieur, d'où $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ choix possibles.

(iii) Combien possèdent un élément neutre ?

Choisir une loi de composition interne avec un élément neutre, c'est choisir un élément a_{i_0} de E tel que pour tout i, $a_{i_0}a_i = a_i a_{i_0} = a_i$. D'où la ligne et la colonne i_0 imposées, d'où $n^{(n-1)^2}$ choix possibles.

2. **(i)** Combien peut-on définir de relations binaires sur E ?

Encore une fois, utilisons les tables. Une relation binaire se décrit entièrement par une table de composition, avec une double entrée : si $a_1, \dots, a_n$ sont les éléments de E, on remplit la case (i, j) avec 0 si les éléments ne sont pas en relation, 1 si c'est le cas. On peut donc définir 2^{n^2} relations binaires.

(ii) Combien sont réflexives ?

Une relation réflexive est une relation pour laquelle pour tout x, $s\mathcal{R}x$. Elle se code en imposant la diagonale à 1. D'où 2^{n^2-n} possibilités.

(iii) Combien sont symétriques ?

Une relation symétrique revient à prendre une table symétrique, d'où $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ possibilités.

Exercice 12. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et P un polygone régulier à n côtés.

1. Combien P comporte-t-il de diagonales ?

Une diagonale correspond à la sélection d'un premier point (n possibilités) puis d'un deuxième parmi tous les points sauf le point choisi et ses deux voisins ($n-3$ possibilités). Mais on ne différencie pas la diagonale $[AB]$ de la diagonale $[BA]$, d'où $\dfrac{1}{2}n(n-3)$ diagonales.

2. Combien y a-t-il de triangles équilatéraux dans ce polygone ?

Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, un triangle dans le polygone est équilatéral ssi il y a autant de sommets du polygone entre chaque sommet. Il existe donc un triangle équilatéral dans le polygone ssi il a $n = 3p$ côtés. Dans ce cas, il y a p triangles équilatéraux.

3. ●●◐ Combien y a-t-il de triangles isocèles dans ce polygone ?

Choisir un triangle isocèle, c'est choisir un sommet (n possibilités) puis un deuxième sommet : le troisième est alors fixé. Ce deuxième sommet peut être choisi dans une moitié du polygone, i.e. $\dfrac{n-1}{2}$ possibilités (si n est impair) ou $\dfrac{n-2}{2}$ (si n est pair). Problème, on a compté 3 fois les triangles équilatéraux s'il y en a, d'où

$$n\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor (-\frac{2n}{3} \text{ si } n \text{ est multiple de } 3)$$

4. ●●● Désormais, P n'est plus régulier. On suppose que trois sommets du polygone ne sont jamais alignés, que deux diagonales ne sont jamais parallèles et que trois diagonales ne se coupent jamais au même point. En combien de points distincts des sommets les diagonales précédentes se coupent-elles ?

Nommons a_n le nombre de points d'intersection. Les hypothèses assurent juste que les points sont distincts 2 à 2. Lorsqu'on rajoute un point A_{n+1} à un polygone $A_1A_2 \dots A_n$ (entre A_n et A_1), on crée de nouveaux points d'intersection. Choisit un de ces nouveaux points d'intersection, c'est choisir un point A_j, parmi les non-voisins du nouveau point, puis choisir une diagonale de l'ancien polygone,avec deux points de part et d'autre de A_j (pour qu'il y ait intersection). C'est donc choisir trois indices $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$), d'où $\binom{n}{3}$ possibilités. Donc $a_{n+1} = a_n + \binom{n}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-3} k^3 + 3k^2 + 3k = \frac{1}{6} \left(\frac{(n-3)(n-2)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + 3 \frac{(n-3)(n-2)}{2} \\
&= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3).
\end{aligned}$$

Exercice 13 (Nombre de dérangements – ce n'est pas un exercice de probabilités, mais de dénombrement, avec una application en probabilités à la fin). ●●● Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle dérangement de E toute permutation de E sans point fixe. On note d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Soit $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations ayant $n-k$ points fixes. Choisir une permutation avec k points fixes, c'est choisir d'abord $n-k$ points fixes, i.e. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ possibilités, puis choisir une permutation sans point fixe sur les points restants, i.e. d_k possibilités. Donc $|S_{n,k}| = \binom{n}{k} d_k$, donc, comme S_n est la réunion disjointe de tous les $S_{n,k}$, on a $|S_n| = \sum_{k=0}^{n} |S_{n,k}|$, donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

---

2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$, soit g définie pour tout n par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Calculons $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f(j)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}f(j)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}f(j).\end{aligned}$$

Or,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}f(j)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{k-j}\\ &=_{\ell=k-j} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{\ell=0}^{n-j}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{\ell}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)(1-1)^{n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\delta_{nj}\\ &= \binom{n}{n}f(n) = f(n),\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

3. En déduire une formule pour d_n.

On en déduit, par la formule d'inversion, que

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} =_{\ell=n-k} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}.$$

4. Quelle est la limite de la proportion $\frac{d_n}{n!}$ des dérangements de E parmi les permutations de E quand n tend vers $+\infty$?

La proportion de dérangements est alors $\frac{d_n}{n!}$, i.e. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}$, elle converge donc vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

5. N'ayant pas envie de corriger le prochain DS, M Laillet décide que chaque élève devra corriger une copie qu'il aura tirée au sort. On met alors les noms de tous les élèves dans un chapeau (virtuel) et chacun tire au sort un nom. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un élève tire son nom.

Le tirage correspond au tirage aléatoire d'une permutation. Si un élève tire son nom c'est que la permutation admet un point fixe. Or la proportion de permutation sans points fixes tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc la probabilité d'avoir une permutation sans point fixe est approximativement $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

DEBUT △