DM15 pour lundi 28/04

Des vecteurs, des applications linéaires, des polynômes.

Minimum. Exercices 1 à 4. Problème 1 en entier. Problème 2, questions 1 à 4. Y passer entre 2h et 4h à la suite de tâches de familiarisation avec les définitions des objets et leurs propriétés.

La partie B du problème 2 est tout à fait abordable, la 3 un peu plus complexe.

Exercice 1. On définit $\mathrm{a} = (-1, 2, 1)$, $\mathrm{b} = (0, 1, -1)$, $\mathrm{u} = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a, b)$.

2. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

3. Trouver trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\forall (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(a, b), \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

4. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}$.

Exercice 2. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$. *On fera attention au fait que la somme n'est pas supposée directe : il faut donc chercher une décomposition !*

3. La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?

Exercice 3. Soit p un projecteur de E. On définit les sous-espaces

$$F_1 = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ p\},$$

$$F_2 = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ (\mathrm{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires de $\mathscr{L}(E)$. On procèdera par analyse-synthèse, et on fera très attention aux objets manipulés.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Montrer que si u et v sont deux symétries, alors $u \circ v$ est une symétrie si, et seulement si u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$, deux symétries qui **commutent**.

2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u \circ v - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(u - v)$ et que $\operatorname{Ker}(u \circ v + \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(u + v)$.

3. **(a)** Montrer que pour tout λ dans $\mathbb{K}$, u stabilise $\operatorname{Ker}(v - \lambda\mathrm{id})$. On admettra que réciproquement, pour tout λ, v stabilise $\operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$.

(b) Montrer que si pour un certain λ, $\operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$, alors $\lambda = \pm 1$.

4. Montrer que $u(\operatorname{Ker}(v - \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(v - \mathrm{id})$ et $u(\operatorname{Ker}(v + \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(v + \mathrm{id})$ et que $v(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $v(\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})$.

On suppose maintenant que u et v sont deux symétries de E qui **anticommutent**, i.e. $u \circ v = -v \circ u$.

5. Montrer que $u(\operatorname{Ker}(v - \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(v + \mathrm{id})$ et $u(\operatorname{Ker}(v + \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(v - \mathrm{id})$ et que $v(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})$ et $v(\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})) = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 5 ($\star\star$). Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, dont tous les sous-espaces admettent des supplémentaires. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \varphi$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker}(u)$.

Problème 1. Une application linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n et m deux entiers naturels. On considère $(x_0, \dots, x_m)$ $m+1$ réels deux à deux distincts.

On considère l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{m+1} \\ \qquad P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_m)) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{m+1})$.

2. On suppose que $n \leqslant m$. Démontrer que φ est injective.

3. On suppose que $n > m$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{AP, P \in \mathbb{R}_{n-m-1}[X]\}$, où A est un polynôme à préciser.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

On suppose désormais que $n = m$.

4. Démontrer que φ est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

Problème 2. Sur les projecteurs

Les parties A et C sont assez théoriques, la partie B est très pratique. De nombreuses questions sont des questions de cours ou des exercices faits en classe.

Partie I. Généralités

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E, tels que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit $r = p + q - q \circ p$.

1. Démontrer que pour tous u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(u)$.

2. Calculer $p \circ r$, $q \circ r$, et démontrer que r est un projecteur.

3. Démontrer que $\operatorname{Ker}(r) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.

4. Démontrer que $\operatorname{Im}(r) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

Partie II. Un exemple fonctionnel

Ici, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On note ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
On note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\psi)$.

5. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. On admet que G, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ aussi.

6. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

7. On note p la projection sur G parallèlement à F. Déterminer, si $\varphi \in E$, l'expression de $p(\varphi)$.

8. Démontrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

9. On note q la projection sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$. Déterminer, si $\varphi \in E$, l'expression de $q(\varphi)$.

10. Vérifier que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donner, si $\varphi \in E$, l'expression de $r(\varphi)$, où $r = p + q - q \circ p$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Partie III. Un autre cas dans lequel r est un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. On note A l'ensemble des projecteurs de E.

11. A est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

12. Démontrer que si p et q sont deux éléments de A qui commutent, alors $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.

On définit sur A la relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall (p, q) \in A^2,\ p \preccurlyeq q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p.$$

13. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur A.

14. Démontrer que si p et q sont deux projecteurs qui commutent, $p + q - q \circ p = \sup\{p, q\}$ (la notion de $\sup$ étant à comprendre au sens de la relation d'ordre $\preccurlyeq$).

15. Déterminer, si p et q sont deux projecteurs qui commutent, $\inf\{p, q\}$.

***

DEBUT △

walter.ngambou@ac-versailles.fr