FIN ▽

CHAPITRE 19

ESPACES DE DIMENSIONS FINIES

Table des matières

Dernière(s) mise(s) à jour :

Lemme fondamental : une démonstration matricielle de la propriété 3 et une démonstration vectorielle associée.

Sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels E considérés dans ce chapitre seront non réduits à 0.

1 Dimension finie

La notion de dimension est une notion intuitive : elle découle de la notion physique de « degrés de liberté » . Par exemple, la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est naturellement n^2, celle des matrices triangulaires est $n(n+1)/2$, celle des matrices symétriques est aussi $n(n+1)/2$, etc. Notre but est de formaliser cette notion afin que les raisonnements que l'on va faire sur la dimension soient fondés.

Définition 1.

Dans tout ce chapitre, lorsqu'on parle du **cardinal** d'une famille, on parle du **cardinal de l'ensemble sur lequel elle est indexée.**

`Exemple 1.1.`

Ainsi, si $\mathcal{F} = (x, x, y, y, z)$, $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 5$.

1.1 Existence de bases – notion de dimension

Définition 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

On abrège en « E est un $\mathbb{K}$-e.v.d.f. ».

`Exemple 1.2.`

1. Les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.
2. En revanche, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, supposons que cela soit le cas. Alors on disposerait d'une famille génératrice finie $(P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$.

   Alors, en posant $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$, on obtiendrait $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$, absurde !

Théroème 1 (de la base incomplète).

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, $\mathscr{L}$ une famille libre de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{G}$.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

►***Démonstration.*** *(*).*

Soit $A = \{\mathrm{Card}(\mathcal{C}) : \ \mathcal{C}$ famille de vecteurs telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et telle que $\mathcal{C}$ est libre.$\}$ Alors A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \in A$. De plus A est majorée par $\mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

Donc A admet un plus grand élément d.

On dispose donc de $\mathcal{F}$ famille de vecteurs libre de E de cardinal d telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice, i.e. montrons que $G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Si ce n'était pas le cas, on disposerait de $x_0 \in G$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Mais alors, comme $\mathcal{F}$ est libre, $\mathcal{F} \uplus \{x_0\}$ est libre. Ceci est absurde car $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal.

Donc $\mathcal{F}$ est génératrice, et est donc une base de E. ***QED*** ◄

Corollaire 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. E possède une base.
2. Toute famille libre peut être complétée en une base de E.
3. De toute famille génératrice on peut extraire une base de E.

►***Démonstration.***

1. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, $x \in \mathcal{G}$, $x \neq 0_E$. Alors $\{x\}$ est libre et $\{x\} \subset \mathcal{G}$. Donc, par le théorème de la base incomplète, on dispose de $\mathcal{B}$ base de E, telle que $\{x\} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
2. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E. La proposition 3 nous assurera que $\mathscr{L}$ est nécessairement finie. Alors si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E, $\mathscr{L} \uplus \mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E, telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{L} \uplus \mathcal{G}$. Donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathscr{L} \uplus \mathcal{G}$, i.e. une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{B}$.
3. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.
   - si $\mathcal{F}$ est finie, c'est immédiat par le même raisonnement qu'en 1..
   - sinon, on sait que E admet une famille génératrice finie $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme $\mathcal{F}$ est génératrice, pour tout k, e_k est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{F}$.
     Si on nomme $\mathcal{F}'$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{F}$ nécessaires pour obtenir $(e_1, \dots, e_n)$, alors $\mathcal{F}'$ est finie, et est génératrice de E (puisqu'elle engendre une famille génératrice !)
     On peut alors trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

QED ◄

Il faut maintenant montrer que la dimension est un « invariant », notamment qu'elle est le cardinal commun à toutes les bases. Pour ce faire, on a besoin d'une proposition technique.

Propriété 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}$. Si E admet une famille génératrice de

> cardinal n, alors toute famille de cardinal $n+1$ est liée.
>
> En particulier, toute famille infinie ou de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.
>
> Et, en particulier, toute famille libre de E a un cardinal inférieur ou égal à n.

Remarque 1.3.

- PROPOSITIONS ÉQUIVALENTES (PREMIÈRE SÉRIE) :
  1° toute matrice de $\mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{K})$ est équivalente en colonnes à une matrice dont la dernière colonne est nulle (ses colonnes sont linéairement dépendantes) ;
  2° toute application linéaire de $\mathbb{K}^{n+1}$ dans $\mathbb{K}^n$ est non injective ;
  3° tout système linéaire homogène à n équations et $n+1$ inconnues admet au moins deux solutions.
- PROPOSITIONS ÉQUIVALENTES (SECONDE SÉRIE) :
  1° toute matrice de $\mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{K})$ est équivalente en lignes à une matrice dont la dernière ligne est nulle (ses lignes sont linéairement dépendantes) ;
  2° toute application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ est non surjective ;
  3° tout système linéaire à $n+1$ équations et n inconnues est incompatible pour certaines valeurs du second membre.

►***Démonstration.***

Supposons que n est égal a 0.

Alors tout espace engendré par 0 (i.e. aucun) vecteur constitué de son seul vecteur nul, le quel forme une famille liée.

Dans la suite, nous supposons que n est strictement supérieur à 0.

Voie 1. Voie matricielle

Qu'on donne un espace vectoriel E engendré par n vecteurs (à l'instar de l'espace $\mathbb{K}^n$) nommés $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$. Qu'on donne $n+1$ vecteurs de E nommés $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n+1}$.

Prenons un entier j compris entre 1 et $n+1$; quel qu'il soit. Comme la famille $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ est génératrice de E, et que le vecteur $\boldsymbol{v}_j$ appartient à cet espace, choisissons des scalaires $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ tels que

$$\lambda_{1,j}\boldsymbol{g}_1 + \lambda_{2,j}\boldsymbol{g}_2 + \cdots + \lambda_{n,j}\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{v}_j.$$

Ainsi avons-nous une matrice

$$\Lambda = [\lambda_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ l\leqslant j\leqslant n+1}} \in M_{n,n+1}(\mathbb{K})$$

telle que

$$\begin{array}{l|l|c|l|l}
\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & & \boldsymbol{v}_n & \boldsymbol{v}_{n+1} \\
= \lambda_{1,1}\boldsymbol{g}_1 & = \lambda_{1,2}\boldsymbol{g}_1 & & = \lambda_{1,n}\boldsymbol{g}_1 & = \lambda_{1,n+1}\boldsymbol{g}_1 \\
+\lambda_{2,1}\boldsymbol{g}_2 & +\lambda_{2,2}\boldsymbol{g}_2 & \cdots & +\lambda_{2,n}\boldsymbol{g}_2 & +\lambda_{2,n+1}\boldsymbol{g}_2 \\
+\cdots & +\cdots & & +\cdots & +\cdots \\
+\lambda_{n,1}\boldsymbol{g}_n & +\lambda_{n,2}\boldsymbol{g}_n & & +\lambda_{n,n}\boldsymbol{g}_n & +\lambda_{n,n+1}\boldsymbol{g}_n
\end{array}$$

Or la matrice Λ possède n lignes et $n+1$ colonnes ; donc, en suivant la méthode du pivot, on pent la transformer, par un enchaînement d'opérations élémentaires sur les colonnes, en une matrice Λ' dont la dernière colonne est nulle.

Nommons $X \in M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ la dernière colonne d'une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que

$$\Lambda P = \Lambda'$$

Alors $\Lambda X = 0_{n,1}$ ET $X \neq 0_{n+1,1}$. On a alors

$$\begin{cases} \lambda_{1,1}x_1 + \cdots + \lambda_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n,1}x_1 + \cdots + \lambda_{n,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Donc $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1} = 0_E$ ET $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$.

D'où la famille $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n+1})$ est liée.

Voie 2. Voie vectorielle

Déclaration. Nommons $\mathcal{P}_n$ la proposition en question. Raisonnons par récurrence pour la montrer.

Initialisation. On a déjà montré plus que si n était égal à 0 alors $\mathcal{P}_n$ serait vraie.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_{n'}$ est vraie pour tout entier naturel $n' < n$ et que n est strictement supérieur à 0. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Reprenons les notations ci-avant.

Choisissons alors $(\mu_1, \boldsymbol{r}_1), \cdots, (\mu_{n+1}, \boldsymbol{r}_{n+1}) \in \mathbb{K} \times \mathrm{Vect}(\boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_{n+1})$ tels que

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 &= \mu_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \mu_2\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{v}_{n+1} &= \mu_{n+1}\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{r}_{n+1} \end{cases}.$$

Deux cas (plusieurs cas) se présentent. Discutons.

Cas 1. *Supposons que* $(\mu_2, \cdots, \mu_{n+1}) = (0, \ldots, 0)$.

Alors les vecteurs $(\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1})$ sont $n = (n-1)+1$ vecteurs d'un enpace engendrép ar $n-1 \geqslant 0$ vecteurs. Donc, d'après l'hypothèse forte de récurrence, la famille

$$(\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1})$$

est liée, comme sur-famille d'une famille liée.

Cas 2. *Supposons que* $(\mu_2, \cdots, \mu_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$.

Soit alors $j \in [\![2, n+1]\!]$ tel que

$$\mu_j \neq 0.$$

Quitte à placer le vecteur $\boldsymbol{v}_j$ en première position puis à renommer, supposons que

$$\mu_1 \neq 0.$$

Posons alors

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \mu_2 {\mu_1}^{-1} \boldsymbol{v}_1 \\ \quad \vdots \\ \boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{v}_{n+1} - \mu_{n+1} {\mu_1}^{-1} \boldsymbol{v}_1 \end{cases}$$

en sorte que la liste de vecteurs $(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n+1})$ est équivalente à la liste de vecteurs $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1})$ et que la nouvelle liste entre dans le cadre du eas 2.

D'où l'hérédité.

Conclusion. En somme, en vertu de la propriété du plus petit élément dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$, le lemme fondamental est démontré.

Voie 2bis. Voie vectorielle (seconde rédaction)

Démontrons par récurrence la proposition

$(\mathcal{P}_n)$ Si E est un $\mathbb{K}$-e.v.d.f. qui admet une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille de cardinal $n+1$ est liée.

- **Initialisation.** pour $n=0$, si E admet une famille génératrice vide, alors $E=\{0_E\}$.

  Si $\{x\}$ est une famille d'un élément de E, $x=0_E$. Mais alors $1.x=0_E$ donc la famille est liée.

- **Hérédité.** soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

  Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  On suppose que E admet une famille génératrice finie $(x_1,\dots,x_{n+1})$.

  Soit $\mathcal{F}=(y_1,\dots,y_{n+1},y_{n+2})\in E^{n+2}$. Démontrons que $\mathcal{F}$ est liée.

  — si $\mathcal{F}\subset\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, alors $\mathcal{F}$ est une famille de $n+2\geqslant n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, donc $\mathcal{F}$ est liée.

  — sinon, on dispose de $y\in\mathcal{F}$ tel que $y\notin\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de y_{n+2}.

  Mais comme $y_{n+2}\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n+1})$ (famille génératrice) et $y_{n+2}\notin\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, alors y_{n+2} **est combinaison linéaire de** $(x_1,\dots,x_{n+1})$ **avec un coefficient non nul devant** x_{n+1}**.**

  Donc, par une proposition du chapitre 18,

  $$E=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n+1})=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,y_{n+2}).$$

  Donc, pour tout i dans $[\![1,n+1]\!]$,

  $$y_i\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,y_{n+2}).$$

  Soit $i\in[\![1,n+1]\!]$. Notons λ_i le coefficient de y_{n+2} dans une décomposition de y_i sur

$(x_1, \dots, x_n, y_{n+2})$. Alors, notamment, $y_i - \lambda_i y_{n+2}$ est dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Donc

$$(y_1 - \lambda_1 y_{n+2}, y_2 - \lambda_2 y_{n+2}, \dots, y_{n+1} - \lambda_{n+1} y_{n+2})$$

est une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$,

donc, par l'hypothèse de récurrence, la famille

$$(y_1 - \lambda_1 y_{n+2}, y_2 - \lambda_2 y_{n+2}, \dots, y_{n+1} - \lambda_{n+1} y_{n+2})$$

est liée. Donc on dispose d'une famille non nulle $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$ telle que

$$\mu_1(y_1 - \lambda_1 y_{n+2} + \mu_2(y_2 - \lambda_2 y_{n+2}) + \dots + \mu_{n+1}(y_{n+1} - \lambda_{n+1} y_{n+2}) = 0_E,$$

donc

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_{n+1} y_{n+1} + \left(-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mu_i \right) y_{n+2} = 0_E.$$

Comme au moins un des $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$ est non nul, on a trouvé une relation de liaison entre $(y_1, \dots, y_{n+2})$, donc cette famille est liée.

D'où l'hérédité et le résultat !

QED ◄

Propriété 4.

Soit E un e.v.d.f. non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases ont même cardinal.

►***Démonstration.***

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, de cardinaux respectifs n et n'. Alors

- $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E, et $\mathcal{B}'$ est libre, donc $n' \leqslant n$.
- $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de E, et $\mathcal{B}$ est libre, donc $n \leqslant n'$.

Donc $n = n'$. ***QED*** ◀

Définition 3.

Soit E un e.v.d.f.. La dimension de E, notée $\dim(E)$, est le cardinal de toute base de E. Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

Remarque 1.4.

1. **Attention !** La dimension est relative au choix du corps de base. S'il y a ambiguïté, on écrira $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Par exemple, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ alors que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$,
2. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$,
3. $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$,
4. $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$,
5. $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Corollaire 5.

Soit E un ev de dimension n. Alors

1. Toute famille libre est de cardinal $\leqslant n$, et toute famille libre de cardinal n est une base.
2. Toute famille génératrice est de cardinal $\geqslant n$ et toute famille génératrice de cardinal n est une base.

►***Démonstration.***

1. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathcal{B}$ est génératrice de E donc $\text{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \text{Card}(\mathcal{B}) = n$.

   De plus, si $\text{Card}(\mathscr{L}) = n$, en appliquant le théorème de la base incomplète à $\mathscr{L}$, il existe $\mathcal{B}'$ base telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{B}'$. Par égalité des cardinaux, $\mathscr{L} = \mathcal{B}'$.
2. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, de cardinal p. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathcal{B}$ est libre donc son cardinal est inférieure à celui de toute famille génératrice finie, donc $n = \text{Card}(\mathcal{B}) \leqslant p$.

   De plus, si $\text{Card}(\mathcal{G}) = n$, comme $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, on dispose de $\mathcal{B}'$ base telle que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{G}$. Par égalité des cardinaux, $\mathcal{B}' = \mathcal{G}$ donc $\mathcal{G}$ est une base de E.

QED ◄

Méthode 1.

Pour déterminer une base d'un e.v.d.f. de dimension n, il suffit de déterminer une famille libre ou génératrice de cardinal n ! C'est un résultat très puissant et très utile.

Exemple 1.5.

1. **Attention !** Toutes les familles de E de cardinal $\leqslant n$ ne sont pas forcément libres, toutes celles de cardinal $\geqslant n$ ne sont pas forcément génératrices. Par exemple,

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$$

n'est pas libre dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrons que $\mathcal{F} = (1, X-1, 3X^2+X-1, 4X^3+2X-1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. La famille $\mathcal{F}$ est à degrés échelonnés donc est libre. Elle contient $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ vecteurs, donc elle est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. De manière générale, une famille de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. **Exercice.** Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$. Alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
   - la famille est libre car à degrés échelonnés.
   - on montre qu'elle est génératrice. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors on dispose de n tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Mais $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés, donc est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs, donc est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Donc $Q \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_n)$.
     Donc $Q \in \mathrm{Vect}(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
     D'où le caractère générateur.

   Donc $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

On a une conséquence immédiate mais fondamentale de l'existence de bases en dimension finie :

Définition 4.

On dit que deux sous-espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective.

Propriété 6.

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

►***Démonstration.***

$\Rightarrow$ Si l'on dispose de $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, bijective. Soit $n = \dim(E)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Alors $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base de F. Donc $\dim(F) = n$.

$\Leftarrow$ Si E et F sont de même dimension, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Définissons $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ par $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_i) = f_i$. (possible car une application linéaire est uniquement déterminer par l'image d'une base)

Alors $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base de F, donc φ est bijective.

QED ◄

Propriété 7.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

►***Démonstration.***

Faisons la preuve pour deux espaces vectoriels, le reste se fera par récurrence.

Soient E et F deux espaces vectoriels, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de F. Alors

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \text{si } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j,$$

alors

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j.(0, f_i),$$

Ainsi, $((e_i, 0))_{1\leqslant i\leqslant n} \uplus ((0, f_j))_{1\leqslant j\leqslant m}$ est génératrice de $E \times F$. On montre qu'elle est libre : soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j.(0, f_i) = 0_{E\times F}.$$

Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j\right) = 0_{E\times F},$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j = 0_F$, donc, par liberté de $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$.

D'où la liberté et le caractère générateur, donc $((e_i, 0))_{1\leqslant i\leqslant n} \uplus ((0, f_j))_{1\leqslant j\leqslant m}$ est une base de $E\times F$, d'où le résultat. ***QED*** ◄

1.2 Sous-espaces et dimension

Propriété 8.

Soit E un e.v.d.f., F un s.e.v. de E. Alors F est de df et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

►***Démonstration.***

Ce qui n'est pas évident, c'est de montrer que F est de dimension finie !

Soit $A = \{\mathrm{Card}(\mathscr{L}),\ \mathscr{L}$ famille libre de $F\}$.

A est une partie non vide (car la famille vide est libre) de $\mathbb{N}$, majorée car toute famille libre de F est une famille libre de E donc est de cardinal $\leqslant n$, donc A admet un plus grand élément p.

En particulier, il existe $\mathscr{L}$ famille libre de F de cardinal p.

Montrons que $\mathscr{L}$ est génératrice. Si ce n'était pas le cas, on disposerait de $x \in F$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$.

Donc $\mathscr{L} \uplus \{x\}$ serait libre, de cardinal $p+1$, absurde !

Donc $\mathscr{L}$ est génératrice de F, donc est une base de F.

Donc F est de dimension finie, de dimension $p \leqslant \dim(E)$ car $\mathscr{L}$ est une famille libre de E. ***QED*** ◄

Remarque 1.6.

1. En revanche, il faut avoir en tête qu'il existe des sous-espaces vectoriels de dimension finie inclus dans des espaces vectoriels de dimension infinie. Par exemple
   - **(a)** L'ensemble des solutions d'une équadiff homogène du second ordre
   - **(b)** $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Attention ! Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et F un sous-espace vectoriel de E, il n'y a aucune raison pour que l'on puisse trouver une base de F dans les vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.

   Prenons par exemple $\mathbb{R}^2$ avec sa base canonique, et $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. Alors aucun des vecteurs de la base canonique d'engendre F.

Propriété 9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E.

1. $\dim(F) = 0 \Leftrightarrow F = \{0_E\}$.
2. $\dim(F) = n \Leftrightarrow F = E$.

Méthode 2.

Le deuxième point donne une méthode pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

On montre que l'un est inclus dans l'autre puis qu'ils ont même dimension !

►***Démonstration.***

1. $\dim(F) = 0 \Leftrightarrow \emptyset$ est une base de $F \Leftrightarrow F = \{0_E\}$.

2. $\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ On suppose que $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$. On pose $n = \dim(F)$. SOit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. C'est une famille libre de F, donc une famille libre de E, contenant $n = \dim(E)$ vecteurs, donc c'en est une base ! Donc $E = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n) = F$.

QED ◀

Définition 5.

Soit E un espace vectoriel quelconque, $(u_1, \ldots, u_r)$ r vecteurs de E. Le rang de $(u_1, \ldots, u_r)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$.

`Exemple 1.7.`

1. Par exemple, si l'on veut déterminer $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. On remarque que, comme le dernier vecteur est combinaison linéaire des deux premiers,

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc sont libres, donc forment une base de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Donc le rang e ces trois vecteurs est égal à 2.

2. De manière générale, faire des oérations élémentaires sur $(x_1, \ldots, x_p)$ ne change pas $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$, et donc ne change pas le rang.

Méthode 3.

Lorsqu'on est dans $\mathbb{R}^n$, trois méthodes pratiques sont à connaître.

1. Déterminer le rang d'un système de vecteurs : on l'échelonne en colonnes (ou en lignes) et on compte le nombre de pivots.

2. Pour extraire une base d'une famille génératrice, on échelonne (sans permutation) et une fois le système échelonné, on repère les colonnes des pivots. Ces positions nous indiquent les vecteurs de la famille originale qui forment une base.

Exemple 1.8.

Déterminons $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\8\\6\end{pmatrix}\right)$. On échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2&2\\1&2&-1&0&8\\2&4&0&2&6\end{pmatrix}\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-2C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1\\C_4\leftarrow C_4-2C_1\\C_5\leftarrow C_5-2C_1}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&-2&-2&4\\2&0&-2&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_4\leftarrow C_4-C_3\\C_5\leftarrow C_5+2C_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&-2&0&0\\2&0&-2&0&0\end{pmatrix}$$

Donc le rang de la famille est de 2, et une base de

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\8\\6\end{pmatrix}\right)$$

est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$

La notion de rang permet de caractériser les familles libres, génératices, et les bases :

Propriété 10.

Soient n et p deux entiers naturels, E un $\mathbb{K}$-e.v.d.f. n, $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p$,

2. $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératice si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n$,

3. $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n = p$.

►***Démonstration.***

Notons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Alors $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \dim(F)$.

1.$\Rightarrow$ Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors c'est une base de F donc $\dim(F) = p$.

$\Leftarrow$ Si $\dim(F) = p$, comme $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille génératrice de F, contenant $p = \dim(F)$ vecteurs, alors c'en est une base, donc la famille est libre.

2. Comme $F \subset E$, $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de E ssi $F = E$, ssi $\dim(F) = \dim(E)$, ssi $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n$.

3. C'est la combinaison des deux premières propositions.

QED ◄

1.3 Somme d'espaces et dimension

Propriété 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de fimension finie, F un s.e.v. de E.

1. F admet un supplémentaire dans E.

2. pour tout sous-espace vectoriel S de E tel que $E = F \oplus S$, $\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$.

►***Démonstration.*** *(*).*

Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

1. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Complétons cette famille en une base de E : $(f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Notons $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Comme $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre elle forme une base de E.

On sait que $(f_1, \dots, f_p) \uplus (e_{p+1}, \dots, e_n)$ forme une base de E donc (propriété du chapitre précédent) $F \oplus G = E$. Donc F admet bien un supplémentaire.

2. Soit S un supplémentaire quelconque de E, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F, $(s_1, \dots, s_q)$ une base de S. Comme $F \oplus S = E$, $(f_1, \dots, f_p) \uplus (s_1, \dots, s_q)$ est une base de E. Donc $p + q = n$, donc $q = n - p$, c'est-à-dire que $\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$.

QED ◄

`Remarque 1.9.`

De manière générale, si F et G sont deux sous-espaces en somme directe,

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Propriété 12 (Formule de Grassmann).

Soient E un e.v.d.f., F et G deux s.e.v. de E. Alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

►***Démonstration.***

Soit S un supplémentaire de $F \cap G$ dans G

1. Montrons que $F \oplus S = F + G$.

- soit $x \in F \cap S$. Comme S est un sous-espace vectoriel de G, $x \in G$, et, comme $x \in F$, $x \in F \cap G$.

  Donc $x \in (F \cap G) \cap S = \{0\}$ par supplémentarité.

  Donc $F \cap G = \{0\}$.
- Ensuite, $F \oplus S \subset F + G$ car $F \subset G$.
- soit $x \in F + G$. On dispose de $f \in F$, $g \in G$ tel que $x = f + g$.

  Mais $G = S \oplus (F \cap G)$, donc on dispose de $s \in S$, $h \in F \cap G$, tels que $g = s + h$.

Donc $x = \underbrace{f+h}_{\in F} + \underbrace{s}_{\in S}$.
Donc $x \in F \oplus S$. D'où $F \oplus S = F + G$.

2. Donc

$$\dim(F+G) = \dim(F \oplus S) = \dim(F) + \dim(S),$$

mais $G = (F \cap G) \oplus S$, donc $\dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(S)$.

Donc $\dim(S) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Donc

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

QED ◀

`Exemple 1.10.`

Soient F et G deux s.e.v. de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul commun à F et à G.

Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

donc

$$\dim(F+G) = 6 - \dim(F \cap G), \text{ i.e. } \dim(F \cap G) = 6 - \dim(F+G).$$

Mais $F + G \subset \mathbb{R}^5$, donc $\dim(F+G) \leqslant 5$, donc

$$\dim(F \cap G) \geqslant 6 - 5 = 1,$$

donc $F \cap G$ est de dimension au moins 1, donc possède un vecteur non nul !

De cette formule on tire la proposition suivante, extrêmement utile :

Propriété 13.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux s.e.v. de E. Alors les ASSE :

(i) $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$ (i.e. $F \oplus G = E$)

(ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

(iii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

►***Démonstration.*** *(*).*

$\boxed{(1) \Rightarrow (2) \wedge (3)}$ Si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$, $F \oplus G = E$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ On suppose que $F + G = E$ et $\dim(F) + d\mathrm{Im}(G) = \dim(E)$.

Or, par la formule de Grassmann,

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

donc

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) = 0,$$

donc $F \cap G = \{0_E\}$, d'où (1).

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - 0 = \dim(E).$$

Mais alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, de même dimension que E, donc $F+G = E$, d'où (1).

QED ◄

`Remarque 1.11.`

1. **Attention !** Avoir simplement $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ ne donne aucune indication sur le fait que F et G sont supplémentaires. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si $F=G=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, alors $\dim(F)+\dim(G)=\dim(\mathbb{R}^2)$ mais on n'a pas $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.

2. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrons que $\mathscr{T}_n^+\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{K})=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   On peut chercher une décomposition explicite d'une matrice en une matrice triangulaire supérieure + une matrice antisymétrique, mais pas besoin !

   On remarque déjà que

   $$\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K}))+\dim(\mathscr{T}_n(\mathbb{K}))=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2=\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})),$$

   dond il ne nous reste qu'à vérifier que $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathscr{T}_n(\mathbb{K})=\{0\}$ OU $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})+\mathscr{T}_n(\mathbb{K})=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   On va choisir l'intersection (très souvent le plus simple). Soit $M=(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Alors

   - si $i=j$, comme $M\in\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, $m_{ij}=-m_{ji}=-m_{ij}$, donc $m_{ij}=0$,
   - si $i>j$, comme $M\in\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$, $m_{ij}=0$,
   - si $i<j$, $m_{ij}=-m_{ji}=0$ par le point précédent.

   Donc $M=0$ donc $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathscr{T}_n(\mathbb{K})=\{0\}$, d'où la supplémentarité.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Dimension de $L(E,F)$

Propriété 14.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathscr{L}(E,F))=\dim(E)\times\dim(F)$.

►***Démonstration.***

L'idée est que **une application linéaire** est **entièrement déterminée** par **l'image d'une base.**

Plus précisément : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On considère l'application linéaire

$$\chi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{L}(E, F) \to F^n \\ \qquad \varphi \mapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \end{array} \right.$$

Alors χ est un isomorphisme. En effet,

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in F^n,\ \exists! \varphi \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_i) = f_i.$$

Donc $\mathscr{L}(E, F)$ et F^n sont isomorphes, donc $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(F^n) = n \times \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

QED ◀

2.2 Théorème du rang

Définition 6.

Soient E et F deux e.v.d.f., $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Le rang de u, noté $\mathrm{rg}(u)$, est la dimension de l'image de u.

Propriété 15.

Soient E et F deux e.v.d.f., $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathfrak{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Remarque 2.1.

1. On a $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$ car $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de F.

2. La proposition précédente fonctionne tout aussi bien si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E.

Exemple 2.2.

(i) Si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$, alors on a déjà vu que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

(ii) Rang de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$?

Pour ce faire, on remarque que f est canoniquement associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, on remarque que si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les colonnes de la matrice M.

Comme il nous faut déterminer le rang de $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, il nous suffit de déterminer le rang des colonnes de M ! Faisons-le en échelonnant la matrice

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow_{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow_{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le rang de f est de 2.

(iii) Dans $\mathbb{K}_n[X]$, si $D : P \mapsto P'$, $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $\mathrm{rg}(D) = n - 1$.

On va ensuite énoncer une propriété qui, de la même manière que pour la formule de Grassmann, va nous alléger pas mal de démonstrations.

Théroème 16 (Théorème du rang).

Soient E et F deux e.v.d.f., $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

►***Démonstration.*** *(*).*

Soit S un supplémentaire de $\ker(u)$. Alors on sait que

$$v : \left| \begin{array}{l} S \to \mathrm{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. Or, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes sont de même dimension, donc $\dim(S) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u)$.

Or, $S \oplus \ker(u) = E$ donc $\dim(S) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$. Donc

$$\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E).$$

QED ◄

Propriété 17.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, **de même dimension**, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alos les ASSE :

(i) u est injective.

(ii) u est surjective.

(iii) u est bijective.

►***Démonstration.*** *(*).*

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ On suppose u injective, donc $\ker(u) = \{0_E\}$.

Par le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$.

Comme $\dim(\ker(u)) = 0$, $|rg(u) = \dim(E) = \dim(F)$ car E et F sont de même dimension.

Donc $\mathrm{Im}(u) \subset F$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(F)$, donc $\mathrm{Im}(u) = F$, donc u est surjective.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ On suppose que u est surjective. Donc $\mathrm{Im}(u) = F$. Il suffit de montrer qu'alors u est injective.

Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(F) = 0,$$

donc $\ker(u) = \{0_E\}$ donc u est injective.

Donc u est bijective.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Immédiat.

QED ◄

Exemple 2.3.

(i) **ATTENTION !** Si $u \in \mathscr{L}(E)$, le théorème du rang ne signifie pas que $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.

Il faudrait en plus avoir $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$ ou $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

Contre-exemple : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Soit $n \geqslant 0$, $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + P' \end{array} \right.$. Montrons que φ est un isomorphisme.

Trouver explicitement φ^{-1} n'est vraiment pas simple ! En revanche, on peut montrer que φ est injective et utiliser un théorème du rang !

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P + P' = 0$. Or, si $\deg(P) \geqslant 0$, alors $\deg(P') < \deg(P)$ donc $\deg(P + P') \geqslant 0$, donc $P + P' \neq 0$.

Donc $P = 0$, donc $\ker(\varphi) = \{0\}$, donc φ est inejctive.

φ est un endomorphisme injectif, donc est bijectif par le théorème du rang.

(iii) Soit $n \geqslant 0$, $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X). \end{array} \right.$ Déterminons $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.

- $\ker(\psi) = \mathbb{R}_0[X]$ (en effet, l'inclusion réciproque est évidente et, si $P \in \ker(\psi)$, alors $P(X+1) = P(X)$ donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P(n) - P(0) = 0$. Donc $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines, donc est nul. Donc P est constant).
- ensuite, on remarque que si $k \in \mathbb{N}^*$, $\deg(\psi(X^k)) = k - 1$. Donc $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

  Mais

  $$\dim(\ker(\psi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1,$$

  donc

  $$\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(\psi)) = n,$$

  donc $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et les deux espaces ont même dimension, donc $\mathrm{Im}(\psi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(iv) Soit $\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$. Que dire sur $\ker(\theta)$?

Par le théorème du rang,

$$\mathrm{Im}(\ker(\theta)) = 5 - \dim(\mathrm{Im}(\theta)) \geqslant 5 - 3 = 2,$$

car $\mathrm{Im}(\theta) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(\mathrm{Im}(\theta)) \leqslant 3$.

(v) Soit $\zeta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5)$. Peut-on avoir $\ker(\zeta) = \mathrm{Im}(\zeta)$?

Si c'était le cas, on aurait

$$\dim(\ker(\zeta)) + \dim(\mathrm{Im}(\zeta)) = 5, \text{ i.e. } 2\dim(\ker(\zeta)) = 5,$$

absurde !

Exo 2.1

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Démontrer que

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

On va démontrer les deux inégalités successivement.

- La plus simple est de démontrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

  En effet, soit $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x) = v(u(x))$. Donc $y \in \mathrm{Im}(v)$.

  Donc $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$, d'où $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

- Pour la seconde, il faut se rendre compte que comparer les images de u et de $v \circ u$ **n'a pas de sens** car ces deux applications sont à valeurs dans des ensembles différents ! En revanche, comparer les noyaux a tout à fait un sens !

  Soit $x \in \ker(u)$. Alors $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_F) = 0_G$.

  Donc $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$, donc

  $$\dim(\ker(u)) \leqslant \dim(\ker(v \circ u)),$$

  donc

  $$-\dim(\ker(u)) \geqslant -\dim(\ker(v \circ u)),$$

  donc

  $$\dim(E) - \dim(\ker(u)) \geqslant \dim(E) - \dim(\ker(v \circ u)),$$

  donc

  $$\mathrm{rg}(u) \geqslant \mathrm{rg}(v \circ u)$$

D'où la seconde inégalité et le résultat désiré !

2.3 Formes linéaires et hyperplans

Propriété 18.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H un sous-espace vectoriel de E.

Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

►***Démonstration.*** *(*).*

$\boxed{\Rightarrow}$ Si H est un hyperplan, on montre que $\dim(H) = n - 1$. 2 méthodes :

— On sait que $H = \ker(\varphi)$ où φ est une forme linéaire non nulle. Or, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$, $\dim(\mathbb{K}) = 1$, donc $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant 1$.

Mais $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant 1$. Donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$.

Par le théorème du rang, $\dim(H) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E) = n$, donc $\dim(H) = n - 1$.

— si H est un hyperplan de E et $a \notin H$, alors on sait que $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. $a \neq 0$, donc $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$, donc $\dim(H) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Vect}(a)) = n - 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\dim(H) = n - 1$, soit S un supplémentaire de H dans E. Alors $\dim(S) = n - (n - 1) = 1$.

Donc H est le supplémentaire de H dans E, donc H est un hyperplan.

QED ◄

`Exemple 2.4.`

1. Déterminer une base de

$$H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}.$$

Déjà, Tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc $H = \ker(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan, donc de dimension $n^2 - 1$.

Pour trouver une base de $\ker(\mathrm{Tr})$, il suffit d'en trouver une famille libre de cardinal $n^2 - 1$.

Déjà, tous les $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}$ sont dans H et forment une famille libre de $n^2 - n$ éléments.

De plus, si on ajoute $(E_{11} - E_{ii})_{2\leqslant i\leqslant n}$, alors

$$(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \uplus (E_{11} - E_{ii})_{2\leqslant i\leqslant n}$$

est une famille libre d'éléments de H, de cardinal $n^2 - 1$, donc c'en est une base !

2. Base de $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y - z = 0\}$?

On remarque que K est un hyperplan, donc est de dimension 2. Or, $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 3)$ sont dans K, ne sont pas colinéaires, donc forment une base de K.

On finit par une propriété qui généralise l'idée qu'un plan est décrit par une équation, une droite par deux équations, etc.

Propriété 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $p \in [\![1, n]\!]$.

1. si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont p formes linéaires sur E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)\right) \geqslant n - p.$$

2. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$, alors on dispose de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ p formes linéaires telles que $F = \bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)$.

►***Démonstration.***

1. On raisonne par récurrence sur p. On note $\mathcal{Q}_p$ la proposition que l'on démontre.

- **Initialisation.** Si φ_1 est une forme linéaire.
  - — ou bien φ_1 est nulle et $\ker(\varphi_1) = E$,
  - — ou bien $\dim(\ker(\varphi_1)) = n - 1 \geqslant n - 1$.
- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}_p$ est vraie. Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1})$ $p + 1$ formes linéaires. Alors

$$\bigcap_{k=1}^{p+1} \ker(\varphi_k) = \underbrace{\bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)}_{F} \cap \underbrace{\ker(\varphi_{p+1})}_{G}.$$

Par hypothèse de récurrence, $\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p}\ker(\varphi_k)\right) \geqslant n-p$. De plus, $\dim(\ker(\varphi_{p+1})) \geqslant n-1$. Or, par la formule de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G).$$

Or, $\dim(F+G) \leqslant n$.

Donc

$$\dim(F \cap G) \geqslant n-p+n-1-n \geqslant n-(p+1),$$

d'où l'hérédité, et le résultat !

2. Soit F un s.e.v. de E de dimension $n-p$, soit $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ une base de F (elle a bien $n-p$ éléments, vérifiez-le !), que l'on complète en $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ une base de E. Alors

$$F = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p = 0\} = \bigcap_{k=1}^{p}\ker(f_k^*),$$

où $(f_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est la famille des formes linéaires coordonnées associée à la base $(f_1, \dots, f_n)$. D'où le résultat souhaité !

QED ◀

Remarque 2.5.

1. Dans la première partie de la proposition précédente, on a en fait égalité si, et seulement si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. (c'est Hors-Programme)
2. (HP) De manière générale, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, appelée base duale de E.

   (démontrons-le. Comme $\dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})) = n$, il suffit de démontrer que la famille est libre.

   Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. En évaluant l'égalité précédente en e_j et comme $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, on obtient $\lambda_j = 0$.
Donc la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre, de cardinal $n = \dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{K}))$, c'en est donc une base !)

3. Dans $\mathbb{R}^n$, on peut ainsi dire qu'un s.e.v. décrit par p équations est de dimension au moins $n - p$, et que si les équations ne sont pas combinaisons linéaires les unes des autres, alors la dimension est exactement $n - p$.

DEBUT △