FIN ▽

CHAPITRE 15

MATRICES 1 : MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Table des matières

[1]

---

1. Remerciements à Nicolas LAILLET

Dernière(s) mise(s) à jour :

En lien avec le lemme fondamental de la notion de dimension d'un e.v. : une démonstration de la propriété 21.

Cadre de travail.

Dans tout le chapitre, on désigne par

- ▷ $\mathbb{K}$ un des deux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- ▷ n, p, q, et r des entiers naturels tous non nuls.

1 Opérations sur les matrices

1.1 Définitions

Définition 1 : *Matrice, taille/format, coefficient, ligne, colonne, diagonale.*

1. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$; c'est-à-dire tout élément de l'ensemble $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
2. On parle de matrice de taille ou de format (n, p).
3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la composante d'indice (i, j) de A est appelée coefficient d'indice (i, j) de A, et est notée
$$M_{i,j} \text{ ou } (M)_{i,j} \text{ ou } [M]_{i,j}.$$
4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la matrice
$$M_{i,\cdot} \overset{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} M_{i,1} & M_{i,2} & \cdots & M_{i,p} \end{bmatrix}$$
est appelée ligne d'indice i de M ou i-ème ligne de M.

5. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la matrice

$$M_{\cdot j} \overset{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} M_{1,j} \\ M_{2,j} \\ \vdots \\ M_{n,j} \end{bmatrix}$$

est appelée <u>colonne</u> d'indice j de M ou j-ème colonne de M.

6. Dans le cas où $n = p$, la n-liste

$$(M_{1,1}\ ,\ M_{2,2}\ ,\ \dots\ ,\ M_{n,n})$$

est appelée <u>diagonale</u> de M.

`Représentation.`

On représente visuellement une matrice sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,j} & \cdots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,j} & \cdots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i,1} & M_{i,2} & \cdots & M_{i,j} & \cdots & M_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \cdots & M_{n,j} & \cdots & M_{n,p} \end{bmatrix}$$

`Notation.`

1. On peut définir une matrice M en posant $M = \big(m_{i,j}\ :\ (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\big)$ ou $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

2. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K}^{n\times p}$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3. Dans le cas où $n = p$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on parle de matrices carrées d'ordre n.

`Remarque 1.1.`

Lorsqu'on aura à parler de matrices extraites, ou de sous-matrices, on pourra aussi indexer une matrice par un produit cartésien de parties non vides des entiers naturels. Ici, les indices $1, 2, 3$ etc sont à regarder comme les ordinaux $1^{er}, 2^{e}, 3^{e}$ etc.

`Exemple 1.2.`

1. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Si $B = \begin{bmatrix} 1 & e^{\frac{i\pi}{3}} \\ -i & 2+3i \end{bmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Si on définit $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ c_{ij} = i + j,$$

alors $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Exo 1.1

Représenter la matrice $D = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 5}$ définie par, pour tout (i,j) dans $[\![1,5]\!]^2$, $d_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$.

Définition 2 : *Vecteur ligne, vecteur colonne*.

Les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) lignes ; ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) colonnes.

`Remarque 1.3.`

Des conventions aident à mieux manipuler les matrices

- ▷ La notation en tableau plutôt qu'en np-uplet.
- ▷ L'utilisation de coefficients ayant la même lettre que la matrice : on écrira $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, etc.
- ▷ La confusion de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

1.2 Addition, multiplication par un scalaire

Définition 3 : *Matrice somme*.

On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice somme de A et B, qu'on note $A+B$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} (A)_{i,j} + (B)_{i,j}.$$

`Représentation.`

Si $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np}\end{bmatrix}$$

Définition 4 : *Produit par un scalaire.*

On considère une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$. On appelle matrice produit de A par λ, qu'on note $\lambda.A$ ou $A.\lambda$ ou λA ou $A\lambda$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\quad (\lambda.A)_{i,j}\overset{\text{def.}}{=}\lambda(A)_{i,j}=(A)_{i,j}\lambda\overset{\text{def.}}{=}(A.\lambda)_{i,j}\ .$$

`Représentation.`

Si $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$,

$$\lambda.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np}\end{bmatrix}$$

Définition 5 : *Matrice nulle.*

La matrice nulle de taille (n,p) est la matrice $0_{n,p}\overset{\text{def.}}{=}(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$

Propriété 1 (Structure d'espace vectoriel).

Le triplet $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{K},+,\times)$:

1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe **commutatif** qui admet pour élément neutre $0_{n,p}$;

2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathbb{K}\to\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (M,\lambda)\mapsto M.\lambda$ est une LCE externe sur $\mathcal{M}_{n,p}$ telle que :

a. la LCE . est compatible avec $\times$:

i. $\forall M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad M=M.1_{\mathbb{K}}$.

ii. $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda_1 \in \mathbb{K},\ \forall \lambda_2 \in \mathbb{K}, \quad (M.\lambda_1).\lambda_2 = M.(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

b. la LCE . est doublement distributive :

iii. $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda_1 \in \mathbb{K},\ \forall \lambda_2 \in \mathbb{K}, \quad M.\lambda_1 + M.\lambda_2 = M.(\lambda_1 + \lambda_2)$.

iv. $\forall M_1 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall M_2 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad M_1.\lambda + M_2.\lambda = (M_1 + M_2).\lambda$.

Définition 6 : *Symbole de Kronecker*.

On considère $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On définit $\delta_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} 1_{\{i=j\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Remarque 1.4.

On a noté 1_P la <u>valeur numérique</u> d'une proposition P : 1 si P est vraie, 0 si P est fausse. On rappelle que $1_{\neg P} = 1 - 1_P$ et $1_{P \wedge Q} = 1_P 1_Q$.

Exemple 1.5.

$\delta_{2024,2025} = \cdots\ , \quad \delta_{2025,2024} = \cdots, \quad \delta_{2025,2025} = \cdots.$

Définition 7 : *matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.

On considère $a \in [\![1,n]\!]$ et $b \in [\![1,p]\!]$. On appelle matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (a,b), qu'on note $E_{a,b}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui est égal à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} 1_{\{(i,j)=(a,b)\}} = \delta_{i,a}\delta_{b,j}.$$

Remarque 1.6.

Il faut avoir précisé n et p pour parler de $E_{a,b}$.

Exo 1.2

Représenter visuellement les matrices élémentaires pour :

$n = 1$ et $p = 1$, $\quad n = 1$ et $p = 2$, $\quad n = 1$ et $p = 3$,

$n = 2$ et $p = 1$, $\quad n = 2$ et $p = 2$, $\quad n = 2$ et $p = 3$,

$n = 3$ et $p = 1$, $\quad n = 3$ et $p = 2$, $\quad n = 3$ et $p = 3$.

Propriété 2 (Décomposition canonique).

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (M)_{i,j} E_{i,j}$$

Et pour toute famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} E_{i,j} = M \implies \forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ \lambda_{k,\ell} = (M)_{k,\ell}$$

`Remarque 1.7.`

C'est que toute matrice se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires de la base canonique de même taille. Cette décomposition est dite <u>canonique</u> et on parle de <u>base canonique</u> de décomposition.

`Commentaire.`

Dans la suite, les matrices élémentaires seront appelées <u>matrices élémentaires de la base canonique</u> ou simplement <u>matrices de la base canonique</u>.

Exo 1.3

Décomposer canoniquement la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

puis la matrice $(1_{\{i=j\}} \ : \ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$

1.3 Produit matriciel

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 8 : *Produit d'un couple de matrices.*

On considère A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle matrice produit A par B, qu'on note $A \times B$ ou AB, la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A\times B)_{i,k} \overset{\text{def.}}{=} A_{i,1}B_{1,k} + A_{i,2}B_{2,k} + \cdots + A_{i,j}B_{j,k} + \cdots + A_{i,p-1}B_{p-1,k} + A_{i,p}B_{p,k} = \sum_{j=1}^{p} A_{i,j}B_{j,k}.$$

Représentation.

Visuellement, on écrit

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\sum_{j=1}^p A_{1,j}B_{j,1} & \sum_{j=1}^p A_{1,j}B_{j,2} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{1,j}B_{j,k} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{1,j}B_{j,q} \\ \hline
\sum_{j=1}^p A_{2,j}B_{j,1} & \sum_{j=1}^p A_{2,j}B_{j,2} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{2,j}B_{j,k} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{2,j}B_{j,q} \\ \hline
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline
\sum_{j=1}^p A_{i,j}B_{j,1} & \sum_{j=1}^p A_{i,j}B_{j,2} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{i,j}B_{j,k} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{i,j}B_{j,q} \\ \hline
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline
\sum_{j=1}^p A_{n,j}B_{j,1} & \sum_{j=1}^p A_{n,j}B_{j,2} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{n,j}B_{j,k} & \cdots & \sum_{j=1}^p A_{n,j}B_{j,q}
\end{array}\right]$$

Exo 1.4

Soient une matrice ligne L une matrice colonne C à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Calculer CL.

2. Calculer LC si L et C sont de même taille.

Remarque 1.8.

Le coefficient d'indice (i,k) de AB est égal au produit de la ligne d'indice i de A par la colonne d'indice j de B :

$$(AB)_{i,k} = A_{i,\cdot}.B_{\cdot,k}$$

Ce qui donne l'écriture

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,\cdot}.B_{\cdot,1} & A_{1,\cdot}.B_{\cdot,2} & \cdots & A_{1,\cdot}.B_{\cdot,k} & \cdots & A_{1,\cdot}.B_{\cdot,q} \\ A_{2,\cdot}.B_{\cdot,1} & A_{2,\cdot}.B_{\cdot,2} & \cdots & A_{2,\cdot}.B_{\cdot,k} & \cdots & A_{2,\cdot}.B_{\cdot,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,\cdot}.B_{\cdot,1} & A_{i,\cdot}.B_{\cdot,2} & \cdots & A_{i,\cdot}.B_{\cdot,k} & \cdots & A_{i,\cdot}.B_{\cdot,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,\cdot}.B_{\cdot,1} & A_{n,\cdot}.B_{\cdot,2} & \cdots & A_{n,\cdot}.B_{\cdot,k} & \cdots & A_{n,\cdot}.B_{\cdot,q} \end{bmatrix}$$

On a aussi la relation suivante, en multipliant chaque colonne de gauche par la ligne de droite de même rang :

$$AB = A_{\cdot,1}B_{1,\cdot} + A_{\cdot,2}B_{2,\cdot} + \cdots + A_{\cdot,p}B_{p,\cdot}$$

Définition 9 : *Matrice identité.*

On appelle matrice identité d'ordre n, qu'on note I_n la matrice de carrée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathrm{I}_n)_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} \delta_{i,j} = 1_{\{i=j\}} \,.$$

.

Représentation.

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

.

Exo 1.5

1. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} \delta_{k,j} x_j$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{i,k}$.

2. Soit $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j}\delta_{j,k}$

Remarque 1.9.

A priori on ne peut pas commuter un produit de matrices : les formats ne sont même pas compatibles !

Et même lorsque les formats sont les mêmes ! Contre-exemple avec $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exo 1.6

[Deux applications importantes du produit matriciel]

1. Soit $x, y, z \in \mathbb{K}$. Le système d'égalité suivant

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = -3 \end{cases}$$

peut s'écrire matriciellement $AX = b$ où ...

2. Suites récurrentes linéaires. Soit u une suite complexe telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = AU_n \quad \text{où} \quad A = \cdots$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = A^n U_0$$

Propriété 3 (Multiplication).

1. (associativité) Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et C de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$.
2. (distributivité) Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C et D de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(C + D) = AC + AD$ et $(A + B)C = AC + BC$
3. (comportement avec les scalaires) Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et pour tous scalaires λ de $\mathbb{K}$ et μ de $\mathbb{K}$, $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
4. (élément neutre) $I_n A = A$ et $AI_p = A$.

►***Démonstration.***

Déjà, chaque produit est bien défini : $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, donc $(AB)C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. De même, $BC \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc $A(BC) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} [AB]_{ik}[C]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} [A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i\ell}\sum_{k=1}^{q} [B]_{\ell k}[C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i\ell}[BC]_{\ell j} = [A(BC)]_{ij},\end{aligned}$$

d'où l'égalité des coefficients, donc des matrices. ***QED*** ◀

1.3.2 Produit et matrices élémentaires de la base canonique

Propriété 4 (Produit de matrices élémentaires de la base canonique).

On note, pour cette proposition $E_{a,b}^{(n,p)}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (a, b).

Alors

$$E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = \delta_{bc} E_{a,d}^{(n,q)}.$$

►***Démonstration.***

On écrit $E_{a,b}^{(n,p)} = (\delta_{ia}\delta_{bj})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $E_{c,d}^{(p,q)} = (\delta_{ic}\delta_{dj})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, d'où, si $E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ia}\delta_{kb}\delta_{kc}\delta_{jd} \\ &= \delta_{ia}\delta_{jd}\sum_{k=1}^{n} \delta_{kb}\delta_{kc} = \delta_{ia}\delta_{jd}\delta_{bc}\end{aligned}$$

Donc

$$(m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \delta_{bc}(\delta_{ia}\delta_{jd})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}},$$

i.e.

$$E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = \delta_{bc} E_{a,d}^{(n,q)}.$$

QED ◀

Exo 1.7

[VECTEURS LIGNES/COLONNES ÉLÉMENTAIRES] Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on pose

$$\vec{e}_i^{(n)} \overset{\text{déf.}}{=} E_{i,1}^{(n,1)} = (\delta_{ki} \ : \ 1 \leqslant k \leqslant n) \quad \text{et} \quad \hat{e}_j^{(p)} \overset{\text{déf.}}{=} E_{1,j}^{(1,p)} = (\delta_{j\ell} \ : \ 1 \leqslant \ell \leqslant p).$$

Calculer $\vec{e}_i^{(n)} \hat{e}_j^{(p)}$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Calculer $\hat{e}_i^{(n)} \vec{e}_{i'}^{(n)}$ pour $(i, i') \in [\![1, n]\!]^2$.

Propriété 5 (Multiplication par une matrice élémentaire).

Soit une matrice A de taille (p, q).

1. Multiplier par la droite la matrice A par $E_{i,j}^{(q,r)}$ revient à ajouter à colonne j de $0_{p,r}$ la colonne i de A.
2. Multiplier par la gauche par une matrice par $E_{i,j}^{(n,p)}$ revient à ajouter à ligne i de $0_{n,q}$ la ligne j de A.

`Exemple 1.10.`

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \times E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Toutes les colonnes sont nulles, sauf éventuellement la j-ème colonne.

Propriété 6 (Égalité de deux matrices et produit).

Soient deux matrices A, B de taille $\mathbb{K}^{n\times p}$. Ainsi, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \hat{X} \in \mathbb{K}^{1\times n}, \ \forall \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}, \quad \hat{X} A \vec{X} = \hat{X} B \vec{X}.$
2. $\forall \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}, \quad A\vec{X} = B\vec{X}.$
3. $\forall \hat{X} \in \mathbb{K}^{1\times n}, \quad \hat{X} A = \hat{X} B.$
4. $A = B.$

Remarque 1.11.

Pour toute ligne $\hat{X} \in \mathbb{K}^{1\times n}$ et pour toute colonne $\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}$,

- ▷ $\hat{X}A$ est une ligne, combinaison linéaire des lignes de A,
- ▷ $A\vec{X}$ est une colonne, combinaison linéaire des colonnes de A,
- ▷ $\hat{X}A\vec{X}$ est un élément de $\mathbb{K}^{1\times 1}$ (confondu avec un scalaire du corps $\mathbb{K}$), combinaison linéaire des coefficients de A.

1.3.3 Produit par blocs

Propriété 7 (Lignes et colonnes d'un produit).

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1. Si $A_{1,\cdot}, A_{2,\cdot}, \dots, A_{n,\cdot}$ désignent les lignes de A, alors

$$A \times B = \begin{bmatrix} A_{1,\cdot} \\ \vdots \\ A_{n,\cdot} \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} A_{1,\cdot} \times B \\ A_{2,\cdot} \times B \\ \vdots \\ A_{n,\cdot} \times B \end{bmatrix}$$

2. Si $B_{\cdot,1}, B_{\cdot,2} \dots, B_{\cdot,q}$ les colonnes de B, alors

$$A \times B = A \times \begin{bmatrix} B_{\cdot,1} & B_{\cdot,2} & \cdots & B_{\cdot,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_{\cdot,1} & AB_{\cdot,2} & \cdots & AB_{\cdot,q} \end{bmatrix}.$$

Commentaire.

Plus généralement, on a les propriétés ci-après, qu'il faut savoir mettre en oeuvre, en faisant un produit de deux matrices 3×3 *par exemple !*

Propriété 8 (Produit par blocs, coupe à gauche horizontale).

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,p}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2,p}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}.$$

Propriété 9 (Produit par blocs, coupe à droite verticale).

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

où $B_1 \in \mathcal{M}_{p,q_1}(\mathbb{K})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{p,q_2}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}.$$

Propriété 10 (Produit par blocs, coupe verticale – horizontale).

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_1' \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1' \end{bmatrix},$$

où $A_1' \in \mathcal{M}_{n,p_1}(\mathbb{K})$, $A_1' \in \mathcal{M}_{n,p_1'}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{p_1,q}(\mathbb{K})$, $B_1' \in \mathcal{M}_{p_1',q}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_1'B_1' \end{bmatrix}.$$

Propriété 11 (Produit par blocs, coupe horizontale – verticale).

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,p}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2,p}(\mathbb{K})$; et où $B_1 \in \mathcal{M}_{p,q_1}(\mathbb{K})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{p,q_2}(\mathbb{K})$,

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$

Propriété 12 (Produit par blocs, découpe).

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_1' \\ A_2 & A_2' \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_1' & B_2' \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $A_1' \in \mathcal{M}_{n_1,p_1'}(\mathbb{K})$ et $A_2' \in \mathcal{M}_{n_2,p_1'}(\mathbb{K})$; et où

$B_1 \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $B_1' \in \mathcal{M}_{p_1',q_1}(\mathbb{K})$, et $B_2' \in \mathcal{M}_{p_1',q_2}(\mathbb{K})$; alors

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_1'B_1' & A_1B_2 + A_1'B_2' \\ A_2B_1 + A_2'B_1' & A_2B_2 + A_2'B_2' \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.12.

$$\begin{bmatrix} A_1B_1 + A_1'B_1' & A_1B_2 + A_1'B_2' \\ A_2B_1 + A_2'B_1' & A_2B_2 + A_2'B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1'B_1' & A_1'B_2' \\ A_2'B_1' & A_2'B_2' \end{bmatrix}.$$

Exo 1.8

Soient $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{K}^{p\times p}$.

Calculer

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0_{p,n} & \mathrm{I}_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & \mathrm{I}_p \end{bmatrix}.$$

Et factoriser

$$\begin{bmatrix} A & 0_{n,p} \\ C & D \end{bmatrix}.$$

1.4 Transposition

Définition 10 : *Matrice transposée*.

On considère A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, qu'on note A^T ou ${}^tA$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad (A^T)_{k,\ell} \overset{\text{def.}}{=} A_{\ell,k}.$$

Exemple 1.13.

Si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, alors $X^T \times X' = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = xx' + yy' + zz'$. On reconnaît alors le « produit scalaire des deux vecteurs X et X' ».

Exo 1.9

Soient $A \in \mathbb{K}^{3\times 2}$ et $B \in \mathbb{K}^{2\times 3}$. Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$.

1. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$, alors $A^T = \cdots$

2. Si $B = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$, alors $B^T = \cdots$

Exo 1.10

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma \overset{\text{def.}}{=} (1_{\{i=\sigma(j)\}} \ : \ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Exprimer P_σ^T.

Propriété 13 (Composition, combinaison linéaire et produit).

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(\lambda A + \mu A')^T = \lambda A^T + \mu A'^T$.

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$.

►***Démonstration.***

3. Calculons le coefficient (i, j) de chaque matrice. Déjà les formats coïncident : $(AB)^T$ et $B^T A^T$ sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
[(AB)^T]_{i,j} &= [AB]_{j,i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} [A]_{j,k}[B]_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} [A^T]_{k,j}[B^T]_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} [B^T]_{i,k}[A^T]_{k,j} \\
&= [B^T A^T]_{i,j},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux matrices.

QED ◀

1.5 Opérations élémentaires

Définition 11 : *Opération élémentaire sur les lignes.*

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'une matrice à n lignes l'une des opérations décrites symboliquement par :

1. $L_{i'} \leftrightarrow L_i$, pour $(i', i) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i' \neq i$; opérations appelées échanges ou permutations (élémentaires sur les lignes).
2. $L_{i'} \leftarrow L_{i'} + \lambda L_i$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i', i) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i' \neq i$; opérations appelées transvections (élémentaires sur les lignes).
3. $L_i \leftarrow \mu L_i$, pour $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $i \in [\![1, n]\!]$; opérations appelées dilatations (élémentaires sur les lignes).

Définition 12 : *Opération élémentaire sur les colonnes.*

On appelle opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice à p colonnes l'une des opérations décrites symboliquement par :

1. $C_{j'} \leftrightarrow C_j$, pour $(j, j') \in [\![1, p]\!]^2$, avec $j \neq j$; opérations appelées échanges ou permutations (élémentaires sur les colonnes).
2. $C_{j'} \leftarrow C_{j'} + C_j\lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(j, j') \in [\![1, p]\!]^2$, avec $j \neq j'$; opérations appelées transvections (élémentaires sur les colonnes).
3. $C_j \leftarrow C_j\mu$, pour $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $j \in [\![1, p]\!]$; opérations appelées dilatations (élémentaires sur les colonnes).

Définition 13 : *Matrice d'opération élémentaire.*

On appelle matrice d'opération élémentaire d'ordre q l'une des matrices :

1. $P_{k,\ell} = \mathrm{I}_q - E_{k,k} - E_{\ell,\ell} + E_{k,\ell} + E_{\ell,k}$, pour $(k, \ell) \in [\![1, q]\!]^2$, avec $k \neq \ell$; appelées matrices

de permutation (d'ordre q).

2. $T_{k,\ell}(\lambda) = I_q + \lambda\, E_{k,\ell}$, pour $(k,\ell) \in [\![1,q]\!]^2$, avec $k \neq \ell$, et $\lambda \in \mathbb{K}$; appelées matrices de transvection (d'ordre q).

3. $D_k(\mu) = I_q + (-1+\mu)E_{k,k}$, pour $k \in [\![1,q]\!]$, $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; appelées matrices de dilatation (d'ordre q).

Représentation.

On a donc

$$P_{k\ell} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

puis

$$T_{k,\ell}(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{\lambda \text{ à la position } (k,\ell) \text{ avec } k>\ell \text{ ici}}$$

puis

$$D_k(\mu) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{le } \mu \text{ est à la position } (k,k)}$$

Exo 1.11

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Écrire les matrices $T_{1,2}(5)$, $D_3(-2)$ et $P_{1,3}$ et effectuer rapidement les produits

a) $T_{1,2}(5)A$ **b)** $D_3(-2)A$ **c)** $P_{1,3}A$ **d)** $AT_{1,2}(5)$ **e)** $AD_3(-2)$ **f)** $AP_{1,3}$

Commentaire.

Les deux propriétés suivantes disent qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes (resp. sur les colonnes) est comme multiplier par la gauche (resp. par la droite) par une certaine matrice carrée. Laquelle ? La matrice obtenue en effectuant l'opération sur la matrice identité du bon ordre.

Propriété 14 (Opération élémentaire sur les lignes et produit).

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $(i', i) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i' \neq i$; $\lambda \in \mathbb{K}$; et $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Si $P_{i',i}$, $T_{i',i}(\lambda)$ et $D_i(\mu)$ sont respectivement trois matrices de permutation, de transvection et de dilatation **d'ordre n** comme définie ci-haut, alors

1. La matrice $P_{i',i} \times A$ est obtenue à partir de A en effectuant $L_{i'} \leftrightarrow L_i$.

2. La matrice $T_{i',i}(\lambda) \times A$ est obtenue à partir de A en effectuant $L_{i'} \leftarrow L_{i'} + \lambda L_i$.

3. La matrice $D_i(\mu) \times A$ est obtenue à partir de A en effectuant $L_i \leftarrow \mu L_i$.

Propriété 15 (Opération élémentaire sur les colonnes et produit).

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $(j, j') \in [\![1, p]\!]^2$ avec $j \neq j'$; $\lambda \in \mathbb{K}$; et $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Si $P_{j,j'}$, $T_{j,j'}(\lambda)$ et $D_j(\mu)$ sont respectivement trois matrices de permutation, de transvection et de dilatation **d'ordre p** comme définie ci-haut, alors

1. La matrice $A \times P_{j,j'}$ est obtenue à partir de A en effectuant $C_{j'} \leftrightarrow C_i$.

2. La matrice $A \times T_{j,j'}(\lambda)$ est obtenue à partir de A en effectuant $C_{j'} \leftarrow C_{j'} + C_j\lambda$.

3. La matrice $A \times D_j(\mu)$ est obtenue à partir de A en effectuant $C_j \leftarrow C_j\mu$.

Propriété 16 (Enchaînement d'opérations élémentaires de même type).

On a les relations suivantes :

1. $P_{k,\ell} \times P_{\ell,k} = \mathrm{I}_q$ et $P_{\ell,k} = P_{k,\ell}$..

2. $T_{k,\ell}(0) = \mathrm{I}_q$ et $T_{k,\ell}(\lambda) \times T_{k,\ell}(\lambda') = T_{k,\ell}(\lambda + \lambda')$

3. $D_k(1) = \mathrm{I}_q$ et $D_k(\mu) \times D_k(\mu') = D_k(\mu\mu')$

2 Systèmes linéaires

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

`Remarque 2.1.`

On rappelle qu'un système de n équations linéaires à p inconnues s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

Ce système d'égalités entre scalaires peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

`Commentaire.`

Cela motive la définition suivante.

Définition 14 : *Système linéaire matriciel*.

Un <u>système linéaire matriciel</u> à n équations et p inconnues est la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'un vecteur-colonne $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Une **solution** du système est un vecteur-colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = b$.

Le vecteur-colonne b est le **second membre** du système. Si $b = 0$, on dit que le système est homogène.

Exo 2.12

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 4 \\ 3x - 8y = 2 \\ 2t = -1 \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $AX = b$.

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$, $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$. On considère le système linéaire $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^{p \times 1}$.

Définition 15 : *Système linéaire compatible*.

On dit que le système linéaire $AX = b$ est compatible si, et seulement si,le vecteur colonne b est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Propriété 17 (Système complet et système homogène).

Si le système linéaire $AX = b$ est compatible alors l'ensemble de ses solutions est

$$\{X_0 + X_h \ : \ X_h \in \mathbb{K}^{p \times 1}, \ AX_h = 0\}.$$

où $X_0 \in \mathbb{K}^{p \times 1}$ en est une solution particulière : $AX_0 = b$.

« Les solutions du système complet »

=

« UNE solution particulière » + « les solutions du système homogène »

Remarque 2.2.

Interprétation géométrique des équations de droites, de plans, et des recherches d'intersection.

2.3 Opérations élémentaires et méthode du pivot

Définition 16 : *Groupe linéaire d'ordre n sur un corps*.

Les éléments inversibles (pour $\times$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelées matrices inversibles. On appelle leur ensemble groupe linéaire d'ordre n sur le corps $\mathbb{K}$ et on le note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 18 (Matrices inversibles élémentaires).

Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles.

Remarque 2.3.

Si $n > 1$ alors les matrices élémentaires de la base canonique de $\mathbb{K}^{n\times n}$ ne sont pas inversibles.

Propriété 19 (Préservation des solutions).

Dans un système linéaire, faire des opérations élémentaires **sur les lignes** ne change pas l'ensemble de solutions.

►***Démonstration.***

Soit $AX = b$ un système linéaire d'inconnue X. Si on fait une série d'opérations élémentaires sur le système linéaire, cela signifie que l'on dispose de $B_1, \dots, B_p$ p matrices d'opérations élémentaires telles que le système soit transformé en $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b$. Or, ces matrices étant toutes inversibles, on a leur produit $B_p \dots B_1$ qui est inversible, donc $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b \Leftrightarrow AX = b$. ***QED*** ◄

Définition 17 : *Matrice échelonnée en lignes/colonnes*.

On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Soient $L_1, \dots, L_n$ les n lignes de A. On dit que A est échelonnée en lignes si, et seulement si,il existe $r \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

   (i) $\left(i \leqslant r \Rightarrow L_i \neq 0_{1,p}\right) \wedge \left(i > r \Rightarrow L_i = 0_{1,p}\right)$,

   (ii) $i < r \implies \text{val}(L_i) < \text{val}(L_{i+1})$,

   où $\text{val}(L_i)$ est l'indice du premier coefficient non nul de L_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. Soient $C_1, \dots, C_p$ les p colonnes de A. On dit que A est échelonnée en colonnes si, et seulement si,il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

   (i) $\left(j \leqslant r \Rightarrow C_j \neq 0_{n,1}\right) \wedge \left(j > r \Rightarrow C_j = 0_{n,1}\right)$.

   (ii) $j < r \implies \text{val}(C_j) < \text{val}(C_{j+1})$.

   où $\text{val}(C_j)$ est l'indice du premier coefficient non nul de C_j, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Définition 18 : *Système linéaire échelonné en lignes/en colonnes.*

On dit qu'un système linéaire est échelonné en lignes (resp. en colonnes) si, et seulement si,sa matrice est échelonnée en lignes (resp. en colonnes).

On dit absolument qu'un système linéaire est échelonné pour dire qu'il est échelonné en lignes.

Méthode 1 [Méthode du pivot, Gauss].

Voici une procédure pour échelonner en lignes (resp. en colonnes) une matrice donnée suivant la méthode du pivot de Gauss :

TANT QUE la table matrice est non vide, REPETER :

- ▷ SI la première colonne (resp. la première ligne) est nulle, considérer la sous-matrice obtenue en supprimant la première colonne (resp. la première ligne) ;
- ▷ SINON,
  - par un échange et/ou des transvections sur les lignes (resp. sur les colonnes), transformer la matrice en une matrice dont les coefficients de la première colonne (resp. la première ligne) sont nuls à l'exception du premier ;
  - considérer la sous-matrice obtenue en supprimant et la première colonne et la première ligne.
- ▷ FIN SI.

FIN TANT QUE.

Cela donne une méthode pour résoudre un système linéaire : on échelonne sa matrice à l'aide du pivot de Gauss, et on répercute les opérations sur le second membre.

`Remarque 2.4.`

Échelonner une matrice en lignes (resp. en colonnes) revient à échelonner sa transposée en colonnes (resp. en lignes).

Propriété 20 (Échelonnement par opérations élémentaires).

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes), on peut transformer A en une matrice échelonnée en lignes (resp. en colonnes) :

Il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$), produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que BA (resp. AB) est échelonnée en lignes (resp. en colonnes).

`Commentaire.`

C'est le résultat central de ce chapitre.

►***Démonstration.*** *Non exigible.*

On démontre ce résultat par récurrence. Plus précisément, on montre que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, il existe B_k, produit de matrices d'opérations élémentaires, tel que B_kA est une matrice dont les k premières colonnes forment une matrice échelonnée.

Initialisation. On considère la première colonne de A. Ou bien elle est nulle et alors $B_1 = \mathrm{I}_n$ convient (la première colonne de A constitue une matrice échelonnée). Sinon, alors A possède une ligne i_0 telle que $a_{i_0,1} \neq 0$. On multiplie alors A par P_{1,i_0}. On obtient donc une matrice dont le premier coefficient est non nul. Ensuite, on multiplie la matrice $P_{1,i_0}A$ par $D_1\left(\frac{1}{a_{i_0,1}}\right)$. Ceci permet de transformer la matrice en une matrice dont le premier coefficient est égal à 1. On note $D_1\left(\frac{1}{a_{i_0,1}}\right)P_{1,i_0}A = A'$, de coefficients (a'_{ij}). On effectue alors sur A', pour tout i dans $[\![2, n]\!]$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - a'_{i1}L_1$. Cela permet de transformer la première colonne de A en $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

En posant B_1 comme le produit de toutes les matrices de transvection correspondantes, de $D_1\left(\frac{1}{a_{i_0,1}}\right)$ et de P_{1,i_0}, on a donc le résultat.

Hérédité. On suppose que l'on dispose, pour un certain k dans $[\![1, n-1]\!]$, de B_k produit de matrices d'opérations élémentaires tel que les k premières colonnes de B_kA constituent une matrice échelonnée. Notons $M = B_k A$, $M = (m_{ij})$.

On considère alors la colonne $k+1$:

▷ ou bien tous les coefficients $m_{k+1,k+1}, m_{k+2,k+1}, \dots, m_{n,k+1}$ sont nuls, et alors la matrice $B_k A$ est déjà échelonnée.

▷ ou bien ça n'est pas le cas. On prend alors k_0 tel que $k_0 \geqslant k+1$ et $m_{k_0,k+1} \neq 0$, et on effectue les opérations suivantes

- $L_{k+1} \leftrightarrow L_{k_0}$,
- $L_{k_0} \leftarrow L_{k_0} / m_{k_0,k+1}$,

i.e. on multiplie $B_k A$ par $D_{k+1}\left(\dfrac{1}{a_{k_0,k+1}}\right) P_{k+1,k_0}$, afin d'obtenir une matrice M' de coefficients $(m'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, dont le coefficient $(k+1, k+1)$ est égal à 1. On effectue enfin les opérations suivantes : pour tout i dans $[\![k+2, n]\!]$, on fait $L_i \leftarrow L_i - m'_{i,k+1} L_{k+1}$. Cela permet de supprimer tous les coefficients de la colonne $k+1$, et d'avoir une matrice dont les $k+1$ premières colonnes forment une matrice échelonnée.

En posant B_{k+1} le produit de toutes ces matrices de transvection, de $D_{k+1}\left(\dfrac{1}{a_{k_0,k+1}}\right)$, de P_{k+1,k_0} et de B_k, on a le résultat !

Conclusion. D'où l'hérédité et le résultat, en particulier au rang n : on dispose d'une matrice B_n, **inversible**, telle que $B_n A$ est échelonnée. ***QED*** ◀

Corollaire 21 (Matrice non carrée).

Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

1. Si $p > n$ alors on peut trouver un vecteur colonne $\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}$ tel que

$$A\vec{X} = \vec{0}_n \quad \text{ET} \quad \vec{X} \neq \vec{0}_p \,.$$

C'est que l'équation $A\vec{X} = \vec{0}_n$, d'inconnue $\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}$, admet au moins une solution non nulle.

2. Si $n > p$ alors on peut trouver un vecteur ligne $\hat{Y} \in \mathbb{K}^{1\times n}$ tel que

$$\hat{Y} \neq \hat{0}_n \quad \text{ET} \quad \hat{Y}A = \hat{0}_p \,.$$

C'est que l'équation $\hat{Y}A = \hat{0}_p$, d'inconnue $\hat{Y} \in \mathbb{K}^{1\times n}$, admet au moins une solution non nulle.

`Remarque 2.5.`

Dit autrement, dans toute matrice,

1. S'il y a plus de colonnes que de lignes alors au moins une des colonnes de la matrice est une combinaison linéaire des autres.
2. S'il y a plus de lignes que de colonnes alors au moins une des lignes de la matrice est une combinaison linéaire des autres.

►***Démonstration.***

Cela se déduit sans détour de la propriété d'échelonnement par opérations élémentaires. Si on échelonne en colonnes, alors la dernière colonne de la multiplicatrice B convient, si on échelonne en lignes, alors la dernière ligne de B convient. La démonstration précédente n'étant pas exigible, démontrons ce corollaire.

1. On peut montrer par récurrence sur n, en suivant la méthode du pivot de Gauss pour échelonner en colonnes, que

   $\mathcal{P}_n$: Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$, l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, admet au moins un solution autre que le vecteur nul.

   (1°) Supposons que $n = 1$.

   Que soit donné $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$. Ecrivons $A = \begin{pmatrix} a & a' \end{pmatrix}$. Si $a = 0$ alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, sinon $X = \begin{pmatrix} a' \\ -a \end{pmatrix}$ convient. Donc $\mathcal{P}_n$.

   (2°) Supposons que $n > 1$ et que $\mathcal{P}_{n'}$ est vraie pour tout entier naturel $n' < n$.

   Que soit donné $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$. Deux cas se présentent.

   Cas 1 : Les coefficients de la première ligne de A sont nuls sauf éventuellement son premier coefficient.

   Écrivons alors

   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ \cdot & A' \end{bmatrix} \qquad \text{où } a \in \mathbb{C} \text{ et } A' \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{C}).$$

Comme $\mathcal{P}_{n-1}$, choisissons $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$A' \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Alors } X = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ convient.}$$

<u>Cas 2</u> : La première ligne de A admet un coefficient autre que le premier qui est nul. Choisissons alors $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ tel que $A_{1,j} \neq 0$.

$*$ Nommons B la matrice obtenue en transformant A par l'échange de la colonne d'indice 1 avec la colonne d'indice j ; ce qui revient à multiplier A à droite par la matrice d'échange $P_{1,j} = \mathrm{I}_{n+1} - E_{1,1} - E_{j,j} + E_{1,j} + E_{j,1}$. Alors $B_{1,1} = A_{1,j}$; donc $B_{1,1} \neq 0$.

$*$ Nommons à présent C la matrice obtenue en transformant B par les transvections successives : $C_2 \leftarrow C_2 - \dfrac{B_{1,2}}{B_{1,1}} C_1 ; \ldots ; C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \dfrac{B_{1,n+1}}{B_{1,1}} C_1$; ce qui revient à multiplier B à droite par la matrice inversible $\left(\mathrm{I}_{n+1} - \dfrac{B_{1,2}}{B_{1,1}} E_{1,2}\right) \cdots \left(\mathrm{I}_{n+1} - \dfrac{B_{1,n+1}}{B_{1,1}} E_{1,n+1}\right)$. Alors les coefficients de la première ligne de C sont nuls sauf éventuellement son premier coefficient.

$*$ Donc, d'après le cas 1, choisissons un vecteur non nul X_1 tel que $CX_1 = 0$. Or, C étant obtenue à partir de A par opérations élémentaires sur les colonnes, choisissons $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ tels que $AP = C$. Alors, comme $X_1 \neq 0$ et que $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $PX_1 \neq 0$. Donc $X = PX_1$ convient.

<u>Somme des cas :</u> En tout cas, on trouve au moins un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = 0$. Donc $\mathcal{P}_n$.

(3°) En vertu de la propriété du plus petit élément de $(\mathbb{N}, \leqslant)$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. On applique ce qui précède à la transposée.

QED ◀

Exo 2.13

Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times p}$. Donner une condition nécessaire portant sur la taille de A pour que la fonction $\mathbb{K}^{p\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$, $\vec{X} \mapsto A\vec{X}$ soit injective/surjective/bijective.

Corollaire 22 (Système linéaire non carré).

Soit un système linéaire de taille (n, p).

1. Si $p > n$ alors le système admet plus d'une solution.
2. Si $n > p$ alors on peut changer le second membre en sorte que le système soit incompatible.

Propriété 23 (Forme d'une matrice carrée échelonnée).

Soit T une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si T est échelonnée en lignes, alors T est triangulaire supérieure.
2. Si T est échelonnée en colonnes, alors T est triangulaire inférieure.

►***Démonstration.***

Par récurrence, on montre que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_k$: les $k-1$ premiers termes de la ligne L_k sont nuls. ***QED*** ◄

`Commentaire.`

Les notions ci-après seront notamment utiles pour décrire simplement la transformation d'une matrice par un enchaînement d'opérations élémentaires.

Définition 19 : *Équivalence en lignes/en colonnes.*

On considère deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est équivalente en lignes à M', et on note $M \underset{\mathrm{L}}{\sim} M'$ pour dire qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M' = Q \times M$.
2. On dit que M est équivalente en colonnes à M', et on note $M \underset{\mathrm{C}}{\sim} M'$ pour dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $M \times P = M'$.

Propriété 24 (Deux relations d'équivalence).

Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'équivalence en lignes et l'équivalence en colonnes sont deux relations d'équivalence.

Définition 20 : *Équivalence*.

On considère deux matrices M et M' de $\mathbb{K}^{n\times p}$. On dit que M est équivalente à M', et on note $M \sim M'$ pour dire qu'il existe $(Q, P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $M \times P = Q \times M'$.

3 Matrices carrées

3.1 Formes particulières de matrices carrées

Cadre de travail.

Dans cette section on désigne par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exo 3.14

En termes de cardinalité et d'opérations, quelles sont les qualités de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \mathrm{I}_n \end{array} ?$$

Définition 21 : *Matrice scalaire*.

On dit que M est scalaire si, et seulement si,il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $M = \lambda \mathrm{I}_n$.

Exo 3.15

Montrer que les PSSE :

(i) La matrice M est scalaire.

(ii) La matrice M commute avec toute matrice de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(iii) Pour tout $\vec{X} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, $MX \in \mathbb{K}.\vec{X}$.

(iv) La matrice M^T est scalaire.

Définition 22 : *Matrice diagonale*.

On dit que M est diagonale si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow (M)_{i,j} = 0$$

.

`Notation.`

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

`Notation.`

Pour tous $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$, la matrice diagonale de diagonale $(d_1 \ , \ d_2 \ , \ \ldots \ , \ d_n)$ est notée

$$\mathrm{Diag}(d_1 \ , \ d_2 \ , \ \ldots \ , \ d_n).$$

`Représentation.`

Pour tous $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$, on écrit

$$\begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

.

Propriété 25 (Caractérisation des matrices diagonales).

On a l'équivalence :

$$M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \iff \forall k \in [\![1,n]\!], \quad M\vec{e}_k \in \mathbb{K}\vec{e}_k.$$

On a noté, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\vec{e}_k$ la matrice élémentaire de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ d'indice $(k,1)$.

Exo 3.16

Écrire la décomposition canonique de toute matrice diagonale.

Exo 3.17

Par la donnée de combien de coefficients une matrice diagonale est-elle déterminée ?

Exo 3.18

Soit D une matrice diagonale à coefficient diagonaux deux à deux distincts. Décrire les matrices qui commute avec D.

Définition 23 : *Matrice triangulaire*.

On dit que M est

1. triangulaire supérieure si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow (M)_{i,j} = 0.$$

2. triangulaire inférieure si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j > i \Rightarrow (M)_{i,j} = 0.$$

`Notation.`

On note respectivement $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

`Exemple 3.1.`

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure et la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Propriété 26 (Caractérisation des matrices triangulaires).

On a les deux équivalences :

$$M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall k \in [\![1,n]\!], \quad M\vec{e}_k \in \left(\mathbb{K}\vec{e}_k + \cdots + \mathbb{K}\vec{e}_1\right).$$

$$M \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \iff \forall k \in [\![1,n]\!], \quad M\vec{e}_k \in \left(\mathbb{K}\vec{e}_k + \cdots + \mathbb{K}\vec{e}_n\right).$$

On a noté, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\vec{e}_k$ la matrice élémentaire de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ d'indice $(k, 1)$.

Exo 3.19

Exprimer de telles caractérisations avec les matrices élémentaires de $\mathbb{K}^{1\times n}$, transposées des matrices élémentaires de $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Exo 3.20

Ecrire la décomposition canonique de toute matrice triangulaire.

Exo 3.21

Par la donnée de combien de coefficients une matrice triangulaire est-elle déterminée ?

Remarque 3.2.

La transposition réalise une bijection de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Définition 24 : *Matrice symétrique, antisymétrique.*

On dit que M est

1. symétrique si, et seulement si,$M^T = M$:

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad M_{j,i} = M_{i,j}.$$

2. antisymétrique si, et seulement si,$A^T = -A$:

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad M_{j,i} = -M_{i,j}.$$

Notation.

On note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3.3.

Toute matrice diagonale est symétrique.

Remarque 3.4.

Toute matrice antisymétrique a nécessairement ses coefficients diagonaux nuls.

Exo 3.22

Ecrire la décomposition canonique de toute matrice symétrique (resp. antisymétrique).

Exo 3.23

Par la donnée de combien de coefficients une matrice symétrique (resp. antisymétrique) est-elle déterminée ?

Propriété 27 (Partie symétrique et partie antisymétrique).

il existe un unique couple (S, A) dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.

►***Démonstration.***

On va raisonner par analyse-synthèse.

CN. Soit (S, A) dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$. Alors

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^T = S^T + A^T = S - A \end{cases}$$

Ainsi, en sommant et en soustrayant les deux lignes, $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. D'où l'unicité.

CS. Posons $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. Alors

▷ $S^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$,

▷ $A^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$,

▷ $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$,

d'où l'existence ! ***QED*** ◄

Exo 3.24

Effectuer la décomposition « symétrique + antisymétrique » de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2 Structure d'anneau non commutatif

Propriété 28.

L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau **non commutatif**, de neutre pour $+$ 0_n et de neutre pour $\times$ I_n. On notera alors $A^k = \mathrm{I}_n \times \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.5.

Attention ! $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède des diviseurs de 0 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Définition 25 : *Matrice nilpotente*.

On dit que M est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0_n$.

Exo 3.25

Parmi les matrices élémentaires de la base canonique, lesquelles sont nilpotentes ?

Exo 3.26

Montrer que toute matrice triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.

Comme dans tout anneau, on a les formules ci-après.

Propriété 29 (Différence de puissances d'un même ordre, formule de Bernoulli).

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$A^k - B^k = (A - B) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} B^\ell \right).$$

Exo 3.27

Montrer que si on ajoute à I_n ou si on soustrait de I_n une matrice nilpotente alors on obtient encore un matrice inversible.

Propriété 30 (Puissance d'une somme, formule du binôme de Newton).

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^{k-\ell} B^{\ell}.$$

Remarque 3.6.

Remarque importante : la distributivité de $\times$ permet de factoriser une somme de matrices. Ainsi,

$$A^2 + A \times B + 2A = A \times (A + B + 2\mathrm{I}_n)$$

Attention ! On ne peut pas faire n'importe quoi ! Ainsi,

$$AB + BA$$

n'est pas factorisable par A.

Exo 3.28

Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est une matrice nilpotente.

Exo 3.29

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$J_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*, \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 31 (Sous-anneaux).

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, si $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})^2$ ou $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2$, alors les coefficients diagonaux de AB sont obtenus en faisant le produit des coefficients diagonaux de A et de B.

▶***Démonstration.***

On ne fait la démonstration que pour $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Notons $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $AB = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

▷ si $i > j$, alors

- $\forall k \in [\![1, i-1]\!]$, $k < i$, donc $a_{ik} = 0$, donc $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} = 0$,
- $\forall k \in [\![i, n]\!]$, $k > j$ donc $b_{kj} = 0$, donc $\sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$.

Donc $c_{ij} = 0$.

▷ si $i = j$, alors

- $\forall k \in [\![1, i-1]\!]$, $k < i$, donc $a_{ik} = 0$, donc $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} = 0$,
- $\forall k \in [\![i+1, n]\!]$, $k > i$ donc $b_{kj} = 0$, donc $\sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{ki} = 0$.

Donc $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

D'où le résultat désiré ! ***QED*** ◀

3.3 Matrices carrées inversibles : groupe linéaire

Exo 3.30

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma \overset{\text{def.}}{=} (1_{\{i=\sigma(j)\}} \ : \ 1 \leqslant i,j \leqslant n)$. Montrer que la fonction $\mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ induit un homomorphisme de groupes.

Propriété 32 (Inverse d'une matrice d'ordre 2).

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Propriété 33 (Comportement de l'inversion).

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$. Alors

(i) $\mathrm{I}_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

(ii) A^{-1} est inversible d'inverse A : $A = (A^{-1})^{-1}$.

(iii) AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$

(iv) Pour tout entier naturel k, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

(v) A^T est inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.

Exo 3.31

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer $A^3 + A$, en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Propriété 34 (Inversion par résolution de système.).

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall \vec{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! \vec{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A\vec{X} = \vec{B}\right).$$

Méthode 2.

Soit A une matrice carrée. On peut décider de l'inversibilité de A et calculer son inverse le cas échéant en résolvant le système $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ et de paramètre $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Exo 3.32

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(Q, P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

1. Lier les trois ensembles

- ▷ $\mathrm{Lin}(M)^0 \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1} \mid M\vec{X} = \vec{0}_{n,1}\}$,
- ▷ $\mathrm{Lin}(QM)^0 \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1} \mid (QM)\vec{X} = \vec{0}_{n,1}\}$,

▷ $\mathrm{Lin}(MP)^0 \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1} \mid (MP)\vec{X} = \vec{0}_{n,1}\}$.

2. Lier les trois ensembles

▷ $\mathrm{Col}(M) \overset{\text{def.}}{=} \{M\vec{X} \ : \ \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}\} = \{\vec{Y} \in \mathbb{K}^{n\times 1} \mid \exists \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1} \ / \ \vec{Y} = M\vec{X}\}$,

▷ $\mathrm{Col}(QM) \overset{\text{def.}}{=} \{(QM)\vec{X} \ : \ \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}\} = \{\vec{Y}' \in \mathbb{K}^{n\times 1} \mid \exists \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1} \ / \ \vec{Y}' = (QM)\vec{X}\}$,

▷ $\mathrm{Col}(MP) \overset{\text{def.}}{=} \{(MP)\vec{X}' \ : \ \vec{X} \in \mathbb{K}^{p\times 1}\} = \{\vec{Y} \in \mathbb{K}^{n\times 1} \mid \exists \vec{X}' \in \mathbb{K}^{p\times 1} \ / \ \vec{Y} = (MP)\vec{X}'\}$.

`Commentaire.`

Étant donnés les résultats des sections précédentes, on est en droit de se demander si les opérations élémentaires ne nous permettraient pas d'obtenir l'inverse d'une matrice. La réponse est oui !

Propriété 35 (Inversibilité et équivalence en lignes/en colonnes).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.

2. A est équivalente en lignes à I_n.

3. A est équivalente en colonnes à I_n.

Propriété 36 (Inversibilité et opérations élémentaires).

La multiplication par une matrice inversible préserve l'inversibilité. Par suite, les opérations élémentaires préservent l'inversibilité de toute matrice.

Lemme 37 (Léminaire à la continuation de l'inversion par pivot total).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{bmatrix}$$

où $a \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Ainsi, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $a \in \mathbb{K}^*$ et $A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$.

►***Démonstration.***

Supposons que A est inversible.

(1) On peut montrer que le scalaire a est non nul en montrant que la première colonne de toute matrice inversible est non nulle.

(2) On peut montrer **séparément**, en écrivant des systèmes d'égalités entre scalaires, que la fonction ci-après est injective et qu'elle est surjective :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(n-1)\times 1} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{(n-1)\times 1} \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto & A' \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}.$$

QED ◄

`Commentaire.`

On peut aussi démontrer propriété ci-avant en utilisant des produits par blocs comme dans la démonstration de la propriété 42 de la page 41.

Propriété 38 (Inversion par opérations élémentaires).

Par des opérations élémentaires sur les lignes,

1. On peut transformer toute matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure de même ordre dont tous les coefficients diagonaux valent 1.
2. On peut transformer toute matrice inversible en la matrice identité de même ordre.

(Adaptation avec les colonnes en considérant la transposition.)

Méthode 3.

Soit A une matrice carrée. Une méthode pour déterminer l'inverse de A est de partir de la matrice A, à laquelle on accole la matrice identité, d'essayer de transformer A en la matrice identité à l'aide d'une méthode de pivot de Gauss, et de répercuter les opérations sur la matrice identité. La matrice obtenue à droite est alors l'inverse de A.

Explications : Si on transforme A en I_n par des opérations élémentaires, c'est que l'on a des matrices d'opérations élémentaires $B_1, \dots, B_q$ telles que $B_q B_{q-1} B_{q-2} \dots B_1 A = \mathrm{I}_n$. Donc $A^{-1} = B_q \dots B_1$. Mais su on a reporté les opérations sur I_n, cela signifie que la matrice obtenue à droite est $B_q \dots B_1 \mathrm{I}_n$, donc A^{-1}.

ATTENTION ! On ne fait que des opérations sur les lignes, OU que des opérations sur les colonnes. On ne mêle surtout pas les deux façons !

En exemple, visons à calculer la matrice carrée inverse, si elle existe, de la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

▷ *Invariant de boucle au cours du temps avec* $\left[\begin{array}{c} D_t \\ \hline P_t \end{array}\right]$:

$$\text{« } A \times P_t = D_t \ \text{ ET } \ P_t \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}). \text{ »}$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$$

$$\underset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \qquad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$$

▷ *Invariant de boucle au cours du temps avec* $\left[\begin{array}{c|c} G_t & Q_t \end{array}\right]$:

$$\text{« } G_t = Q_t \times A \ \text{ ET } \ Q_t \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}). \text{ »}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

Suivant les deux procédures, on trouve que :

$$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ ET } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

C'est bien ce qu'on trouve par la propriété d'inversion d'une matrice carrée d'ordre 2.

`Commentaire.`

Comme pour la décomposition des permutations d'un ensemble fini en produits de transpositions, on trouve ainsi le résultat suivant : On peut obtenir toute matrice inversible d'ordre n par transformation de la matrice I_n suivant un enchaînement d'opérations (inversibles) élémentaires. C'est que

Corollaire 39 (Génération du groupe linéaire).

Les produits de matrices d'opérations élémentaires d'un même ordre décrivent toutes les matrices inversibles de cet ordre.

`Commentaire.`

Voici à présent une façon de choisir une matrice parmi les matrices inversibles en choisissant directement ses coefficients.

Propriété 40 (Inversibilité par résolution de système.).

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad &\iff \quad \left(\exists! \vec{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A\vec{X} = \vec{0}_{n,1}\right) \\ &\iff \quad \left(\forall \vec{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A\vec{X} = \vec{0}_{n,1} \implies \vec{X} = \vec{0}_{n,1}\right) \end{aligned}$$

►***Démonstration.***

On traite d'abord le cas où la matrice est échelonnée en colonnes. Puis on traite le cas complémentaire en échelonnant en colonnes. ***QED*** ◄

Corollaire 41 (Inversibilité et dépendance linéaires des colonnes).

Toute matrice carrée est inversible si, et seulement si,aucune de ses colonnes n'est une combinaison linéaire des autres ; ce si, et seulement si,sa première colonne est non nulle et aucune de ses autres colonnes n'est une combinaison linéaire des colonnes qui la précèdent.

3.4 Inversibilité et matrices triangulaires

Propriété 42 (Caractérisation des inversibles parmi les triangulaires).

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Ainsi,

1. La matrice A est inversible si, et seulement si,ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

`Remarque 3.7.`

Le résultat est bien sûr tout aussi vrai pour les matrices triangulaires inférieures (il n'y a qu'à prendre la transposée) et pour les matrices diagonales (comme elles sont triangulaires supérieures et inférieures, c'est évident).

►***Démonstration.***

On démontre le résultat par récurrence sur n en appliquant le lemme 37 de la page 37. Voici une autre démonstration par les produits par blocs.

Initialisation. Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est une matrice de la forme (a) avec $a \in \mathbb{K}$, inversible ssi $a \neq 0$. Dans ce cas, $(a)^{-1} = (a^{-1})$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai pour un certain n dans $\mathbb{N}^*$. Soit A dans $\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$. On peut écrire A sous la forme $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{bmatrix}$ avec $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $d \in \mathbb{K}$.

1. si A **est inversible**, alors on peut écrire son inverse sous la forme $\begin{bmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{bmatrix}$ où $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $L' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $d \in \mathbb{K}$. On a alors

▷ $AA^{-1} = \mathrm{I}_{n+1}$, donc, par produit par blocs, comme $\begin{bmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{bmatrix}$,

- $dd' = 1$ donc $d' \neq 0$ et $d' = \dfrac{1}{d}$,
- $dL' = 0_{1,n}$ donc $L' = 0_{1,n}$,
- $BB' + CL' = \mathrm{I}_n$ donc $BB' = \mathrm{I}_n$

▷ $A^{-1}A = \mathrm{I}_{n+1}$, donc de Même, $B'B = \mathrm{I}_n$, donc B est triangulaire supérieure inversible, donc tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

Donc, comme $d \neq 0$, tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls.

2. si A **est à coefficients diagonaux non nuls,** alors par hypothèse de récurrence, B est inversible. On pose alors

$$M = \begin{bmatrix} B^{-1} & -\frac{1}{d}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{bmatrix},$$

et on vérifie aisément que $MA = AM = \mathrm{I}_{n+1}$. Le fait que les coefficients diagonaux de M soient les inverses de ceux de A est alors évident, car B^{-1} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux inverses de ceux de B, et le dernier coefficient de M est $\dfrac{1}{d}$ qui est bien l'inverse du dernier coefficient diagonal de A.

QED ◂

3.5 Trace d'une matrice carrée

Définition 26 : *Trace d'une matrice carrée.*

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, qu'on note $\mathrm{Tr}(A)$, l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$$

.

`Exemple 3.8.`

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \cdots$.

Propriété 43 (Trace d'une combinaison linéaire et d'un produit).

1. (linéarité) $\forall (A, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \,\mathrm{Tr}(A) + \mu \,\mathrm{Tr}(B)$,

2. (rapport au produit) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

►***Démonstration.***

2. On écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} [A]_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{p} [BA]_{kk} \\ &= \mathrm{Tr}(BA). \end{aligned}$$

QED ◄

Exo 3.33

1. Quelles sont les solutions de l'équation $XY - YX = \mathrm{I}_n$, d'inconnue $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$?

2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $AP = PB$, alors $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exo 3.34

Pour $A, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$, exprimer $\mathrm{Tr}(A^T B)$ en fonction des coefficients des deux matrices.

Propriété 44 (Sommes des carrées des coefficients).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \iff A = 0.$$

►***Démonstration.***

Pour le sens indirect, il suffit de l'écrire.

Pour le sens direct, notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A^T A) &= \sum_{i=1}^{p} [A^T A]_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} [A^T]_{ik} [A]_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.
\end{aligned}$$

Or, comme les (a_{ki}) sont réels, $a_{ki}^2 \geqslant 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, donc $\mathrm{Tr}(A^T A) = 0$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{ij} = 0$. ***QED*** ◄

4 Complément

Définition 27.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$ k vecteurs colonne. On définit l'ensemble $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \ldots, X_k$:

$$\mathrm{Vect}(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k \ : \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k\}.$$

Propriété 45 (Solutions d'un système homogène échelonné).

Soit $AX = 0$ un système linéaire homogène de n équations à p inconnues, échelonné en lignes avec k lignes non nulles. Alors il existe $X_1, \ldots, X_{p-k}$ $p-k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-k})$.

►***Démonstration.***

On échelonne aussi en colonnes : soit P inversible tel que AP soit échelonnée en colonnes. Alors les k dernières colonnes de P conviennent. ***QED*** ◄

Que se passe-t-il lorsque le système n'est pas homogène ?

Propriété 46 (Solutions d'un système échelonné).

Soit $AX = B$ un système linéaire de n équations à p inconnues, tel que le système homogène associé soit échelonné en lignes avec k lignes non nulles. Alors nécessairement $k \leqslant n$. De plus,

1. Si $k = n$, alors le système admet une unique solution.

2. Si $k < n$, alors les lignes dont les $n - k$ dernières lignes définissent des <u>conditions de compatibilité</u>.

▷ Si elles ne sont pas vérifiées, le système n'a pas de solution.

▷ Si elles sont vérifiées, il existe une solution particulière X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X_1, \ldots, X_{p-k}$ $p - k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $X_0 + \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-k})$.

Propriété 47.

Soit A une matrice triangulaire supérieure. Alors A est inversible si, et seulement si A est équivalente en lignes à I_n par des opérations élémentaires.

►***Démonstration.***

$\boxed{\Rightarrow}$ La preuve est assez simple : soient $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de A. Comme A est inversible, ses coefficients diagonaux sont non nuls. Effectuons sur A les opérations élémentaires suivantes : pour tout i dans $[\![1, n]\!]$,

▷ On effectue $L_i \leftarrow \dfrac{1}{a_{ii}} L_i$: on obtient des coefficients a'_{ij} et des lignes L'_i.

▷ On effectue pour tout j dans $[\![1, i-1]\!]$ $L'_j \leftarrow L'_j - a'_{ji} L'_i$.

Ainsi, à l'étape $i = 1$, on obtient une colonne avec un 1 en haut à gauche, puis, à l'étape $i = 2$, on obtient une colonne avec un 0 puis un 1, etc.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pour le sens réciproque, c'est encore plus simple : si A est équivalente en lignes à I_n, alors on dispose, par la proposition de $B_1, \dots, B_p$ p matrices inversibles telles que $B_p \dots B_1 A = I_n$. Comme $B_1, \dots, B_p$ sont inversibles, $B_p \dots B_1$ est aussi inversible, donc $A = B_1^{-1} \dots B_p^{-1}$ qui est inversible. ***QED*** ◄

Propriété 48.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. pour tout b dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet exactement une solution.
3. l'équation $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet comme seule solution la solution nulle.
4. pour tout b dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet au moins une solution.

►***Démonstration.***

▹ L'équivalence des deux premières assertions a déjà été vue.

▹ Ensuite, on montre $(1) \Leftrightarrow (3)$. Si A est inversible, alors A est équivalente en lignes à une matrice triangulaire T. Cette matrice triangulaire est donc aussi inversible car on dispose de B inversible telle que $BA = T$. Donc elle est équivalente en lignes à I_n. Donc A est équivalente en lignes à I_n.

Réciproquement, si A est équivalente en lignes à I_n, alors on dispose de B **inversible** telle que $BA = I_n$. Donc $A = B^{-1}$, inversible.

▹ Pour la suite on pose $X_0 =^T \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

▹ On continue en montrant $(1) - (2) - (3) \Leftrightarrow (4)$. Si A est équivalente en ligne à I_n, alors A est inversible, donc si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est tel que $AX = 0_{n,1}$, alors $X = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$. Donc le système admet une seule solution. De même, si A n'est pas équivalente en ligne à I_n, elle est équivalente à une matrice échelonnée dont la dernière ligne est nulle. On en déduit , si B est inversible telle que $BA = T$ avec T échelonnée de dernière ligne nulle, que tous les tX_0, avec $t \in \mathbb{K}$, sont solution de $TX = 0$. Donc ces vecteurs vérifient $BAX = 0$, donc, comme B est inversible, $AX = 0$.

▷ Enfin, on finit avec $(1) - (2) - (3) \Leftrightarrow (5)$. Si A est inversible, alors si $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A^{-1}b$ est solution du système $AX = b$. Si A n'est pas inversible, alors on dispose de B inversible telle que $BA = T$ triangulaire de dernière ligne nulle. Mais alors TX a toujours une dernière ligne nulle. Donc $TX = X_0$ n'a pas de solution. Donc $BAX = X_0$ n'a pas de solution, donc $AX = B^{-1}X_0$ n'a pas de solution.

QED ◀

`Remarque 4.1.`

On a la même propriété pour les matrices équivalentes en colonnes.

Finalement, ceci permet de prouver la

Propriété 49 (Inversibilité et applications linéaires cononiquement associées).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. $X \mapsto AX$ est injective.
3. $X \mapsto AX$ est surjective.

Et elles sont équivalentes aux suivantes :

1. A^T est inversible.
2. $X^T \mapsto X^T A$ est surjective.
3. $X^T \mapsto X^T A$ est injective.

`Remarque 4.2.`

C'est une propriété très forte ! Je vous rappelle qu'on a vu, dans le chapitre sur les applications, que l'on pouvait avoir $f \circ g = \mathrm{id}_E$ sans pour autant que f ou g soient bijectives.

Propriété 50 (Inversibilité et inversibilité à gauche/à droite).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les ASSE :

1. A est inversible.

2. A admet un inverse à gauche : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ B \times A = \mathrm{I}_n$.

3. A admet un inverse à droite : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times B = \mathrm{I}_n$.

►***Démonstration.***

Si A est inversible à gauche, alors on dispose de B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = \mathrm{I}_n$. Donc si X vérifie $AX = 0_{n,1}$, alors $BAX = 0_{n,1}$, donc $X = 0_{n,1}$. Donc l'équation $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution, donc A est inversible.

Si A est inversible à droite, alors on dispose de B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \mathrm{I}_n$. Donc si $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si $X = Bb$, alors $AX = ABb = \mathrm{I}_n b = b$, donc le système admet au moins une solution. Donc A est inversible. ***QED*** ◄

DEBUT △