FIN ↘

CHAPITRE 17
ESPACE VECTORIEL, APPLICATIONS LINÉAIRES

Table des matières

Dernière(s) mise(s) à jour :

Polynômes tous non nuls à degrés distincts : une démonstration de la propriété 9 rendant davantage compte de la pertinence de chaque supposition.

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure de K-espace vectoriel

On a rencontré, avec les matrices et les polynômes, des objets que l'on pouvait additionner et soustraire (structure de groupe additif), mais que l'on pouvait aussi multiplier par un réel ou un complexe ! Cette idée de multiplication par un réel s'est aussi vue lorsqu'on a fait les équations différentielles, les intégrales, les dérivées, etc... Il est temps de mettre un nom à cette structure !

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une *loi de composition externe*, i.e. d'une application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x \end{cases}$ telles que

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. La loi externe est doublement distributive :
   - sur la loi $+$ de E : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

- sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$: $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$,

$$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

3. pour tout x de E, $1.x = x$

4. pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

`Exemple 1.1` *Espaces fondamentaux !.*

1. Déjà $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

`Remarque 1.2.`

1. Le but de cette définition est de prolonger la géométrie du plan et de l'espace : on sait depuis la seconde que $3.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 3.\overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{CD}$.

2. On notera souvent λx au lieu de $\lambda.x$.

Comment passe-t-on facilement de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}^n$? Grâce à la notion d'espace-vectoriel produit.

Définition 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-ev. On munit l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev en posant :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \overset{\text{def.}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def.}}{=} (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$$

quelles que soient les listes $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E^2$, et quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel produit.

Définition 3.

On considère un ensemble Ω et un $\mathbb{K}$-ev $(E, +, .)$.

1. On munit $E^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, E)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev en posant,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

et

$$\lambda.f : x \mapsto \lambda f(x).$$

quelles que soient les fonctions $f, g \in E^\Omega$ et quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.4 *Espaces de références !.*

1. Si Ω est un intervalle de $\mathbb{N}$ de longueur n ou un ensemble à n éléments, alors on peut assimiler $\mathbb{K}^\Omega$ à $\mathbb{K}^n$.
2. Si $\Omega = [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, alors $\mathbb{K}^\Omega$ est $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qu'on peut assimiler à $\mathbb{K}^{np}$.
3. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel réel (sur $\mathbb{R}$), tandis que l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel complexe (sur $\mathbb{C}$)..
4. L'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}^I$ est un espace vectoriel réel, et semblablement avec les complexes au lieu des réels.
5. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev comme sous-espace vectoriel (voir plus bas) de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
6. $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-ev comme sur-corps de $\mathbb{K}$, à l'instar de ce qu'est $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.

Par commodité, on écrit souvent les listes de scalaires verticalement sans séparateur, ce qui revient à assimiler $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'addition entre les vecteurs listes et leurs multiplication par les scalaires s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

On a des règles de calcul évidentes qui se déduisent de la définition

Propriété 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,

1. $\lambda.0_E = 0_E$.
2. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
3. $(-1).x = -x$.
4. $\lambda.x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

►***Démonstration.***

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. ALors $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$, donc, en soustrayant $\lambda.0_E$, $0_E = \lambda.0_E$.
2. Soit $x \in E$, $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x$, donc $0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathbb{K}}.x$, donc $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
3. Soit $x \in E$, alors $x + (-1_{\mathbb{K}}).x = 1_{\mathbb{K}}.x + (-1_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, donc $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$.
4. Si $\lambda.x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors λ est inversible pour la loi $\times$ de $\mathbb{K}$, donc

$$\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E,$$

donc $x = 0_E$, d'où le résultat !

QED◄

Une des notions fondamentales de l'algèbre linéaire est la notion de combinaison linéaire.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Définition 4.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n)$ n éléments de E. On dit que x est combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe n éléments de $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Remarque 1.6.

1. 0_E est CL de n'importe quelle famille de vecteurs.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, quelq sont les vecteurs CL de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Ce sont tous les vecteurs u de $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: il s'agit de la première bissectrice.

   ATTENTION ! On représente les vecteurs par des **points** !
4. Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il CL de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

   Il faut résoudre un système linéaire.
5. **ATTENTION !** Plusieurs combinaisons linéaires différentes peuvent être égales au même vecteur : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ **N'IMPLIQUE PAS** que $\lambda_k = \mu_k$. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de :
   - $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, par la définition même des polynômes,

- $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ par la formule de Taylor,
- toute base d'interpolation de Lagrange.

7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sh et ch sont CL de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

Exo 1.1

On considère les vecteurs $u_1 = (2, -3, 4)$, $u_2 = (1, -2, 2)$, $v_1 = (2, 1, -1)$,
$v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)\}$.

1. On considère le vecteur $u = (1, 1, 2)$. Déterminer deux réels a et b tel que $u = a\, u_1 + b\, u_2$.

2. Soit le vecteur $v = (0, -1, 1)$. v est-il combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?

3. Soit le vecteur $w = (4, 7, -9)$. Exprimer w comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exo 1.2

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les fonctions suivantes sont-elles combinaisons linéaires de sin et cos ?

- $x \mapsto \sin(x+1)$,
- $x \mapsto \sin(2x)$.

Remarque 1.7.

Prenons $\mathbb{K}[X]$. On peut vouloir dire que tout polynôme est combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots$... Mais que veut-on dire exactement par là ? Par exemple $1 + X + X^2 + \dots$ (somme infinie) n'est pas un polynôme ! Question : peut-on parler de combinaison linéaire d'une famile infinie de vecteurs ? OUi, en définissant la notion de famille presque nulle.

Définition 5.

On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexé par I (ensemble éventuellement infini) est presque nulle si tous les éléments de la famille sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux, i.e.

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists (i_1, \dots, i_n) \in \mathrm{I}^n,\ \forall i \in \mathrm{I},\ i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \Rightarrow \lambda_i = 0.$$

Définition 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de E, $x \in E$, I un ensemble (éventuellement infini) et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que x est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

(en particulier, la somme ci-dessus est finie !)

Remarque 1.8.

Il faut toujours pouvoir exploiter concrètement cette notion dans des cas concrets : l'utilisation de familles presques nulles est là pour simplifier les démonstrations théoriques.

- si x est CL de $(x_1, \ldots, x_n)$, pas besoin de parler de famille presque nulle, on revient à la première définition,
- si x est CL de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut l'exprimer de deux manières :
  - $\exists(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulle àpcr telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k x_k$,
  - $\exists N \in \mathbb{N},\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i$.
- si x est CL de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on peut être + concret quand même :

$$\exists N \in \mathbb{N}, (i_1, \ldots, i_N) \in \mathrm{I}^N,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^N,\ x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k}.$$

Exemple 1.9.

Ainsi, tout élément de $\mathbb{K}[X]$ est CL des $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, ou des $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Il y a un exemple dont nous n'avons pas parlé... Il s'agit de $\mathbb{K}_n[X]$. Et c'est parce que plutôt de le voir comme un espace vectoriel à part entière, on va le voir comme un sous-espace vectoriel ! (les sous-structures, c'est + sûr !)

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (on abrège en sev) si

1. F est stable par $+$ et .

2. F est un $\mathbb{K}$-ev.

Comme d'habitude, c'est la caractérisation suivante qui va être utile :

Propriété 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. F est un s.e.v. de E ssi

1. F est non vide.

2. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu y \in E$.

Le deuxième point est remplaçable par $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F$.

Propriété 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un s.e.v. de E. Alors F est stable par combinaison linéaire quelconque, i.e.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F.$$

`Exemple 1.10` *Des exemples encore fondamentaux*.

1. 0_E et E sont des s.e.v. de E. Attention, l'ensemble vide n'est pas un s.e.v. !

2. $\mathbb{R}$ est un s.e.v. du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas un s.e.v. du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$ (attention au corps de départ).

3. Les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sont $\mathbb{R}^2$ lui-même, les droites passant par $(0; 0)$ et $\{(0; 0)\}$.

4. Les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ sont $\mathbb{R}^3$ lui-même, les plans et les droites passant par $(0; 0)$, et $\{(0; 0)\}$.

5. L'ensemble des fonctions à régularité donnée est un s.e.v. de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. L'ensemble des solutions d'une équadiff homogène est un s.e.v. de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7. L'ensemble des fonctions paires, ainsi que l'ensemble des fonctions impaires, sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

8. L'ensemble des suites solutions d'une récurrence linéaire homogène est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

9. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

10. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures, inférieures, symétriques, antisymétriques, est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En revanche $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un s.e.v. (il ne contient déjà pas 0) !

11. $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$.

Exo 1.3

Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle est un s.e.v. de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Comment voit-on une droite de l'espace ? Comme une *intersection* de plans.

Propriété 4.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. si F et G sont deux s.e.v. de E, $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

2. si I est un ensemble et $(F_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de s.e.v. de E, $\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} F_i$ est un s.e.v. de E.

3. si F et G sont deux s.e.v. de E, $F \cup G$ est un s.e.v. de E, alors soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

►***Démonstration.***

1. $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$, i.e. $F \cap G \neq \emptyset$.

Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $(x, y) \in F^2$ donc, comme F est un sev, $\lambda x + y \in F$,
- de même, comme $(x, y) \in G^2$, $\lambda x + y \in G$.

Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.

2. • $\forall i \in \mathrm{I},\ 0_E \in F_i$, donc $0_E \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i$.

• soit $(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i \right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $i \in \mathrm{I}$. On sait que $(x, y) \in F_i^2$ donc $\lambda x + y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i$.

3. En deux temps.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $F \subset G$, $F \cup G = G$, s.e.v. de E.

Si $G \subset F$, $F \cup G = F$, s.e.v. de E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $F \cup G$ est un s.e.v. de E, supposons que $F \not\subset G$ et montrons que $G \subset F$.

Soit $y \in G$.

$x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc, comme $F \cup G$ est un s.e.v., $x + y \in F \cup G$:

— ou bien $x + y \in F$, alors $x + y - x \in F$, donc $y \in F$,

— ou bien $x + y \in G$, alors $x + y - y \in G$, donc $x \in G$, absurde !

Donc $y \in G$, donc $G \subset F$.

QED◀

`Remarque 1.11.`

Comme la réunion de deux s.e.v. n'est pas un sev, on peut se demander comment transformer une réunion de deux s.e.v. en un sev. La question est alors de savoir quel est le plus petit sous-espace vectoriel contenant une partie de E.

Définition 8 : *et prop.*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, A une partie de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est le sous-espace vectoriel défini par l'une des définitions équivalentes suivantes

1. (définition externe) $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A ($\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit s.e.v. contenant A)
2. (définition interne) $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

On définit de même le sous-espace vectoriel engendré par une famille de E.

►***Démonstration.***

Notons G l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, $\mathcal{F}$ l'ensemble des s.e.v. de E contenant A, et $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

$\boxed{G \subset H}$ Soit $F \in \mathcal{F}$. Alors F est un s.e.v. de E, il contient A donc il continent toute combinaison linéaire d'éléments de A. En somme, il contient G. Donc $G \subset F$.

Donc $G \subset H$.

$\boxed{H \subset G}$ On va en fait montrer que $G \in \mathcal{F}$. Ainsi, H sera inclus dans G.

— G est bien un s.e.v. de E :

  — $0_E = \sum_{a \in A} 0_{\mathbb{K}}.a \in G$,

  — Soit $(x, y) \in G^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

  On dispose de deux familles presque nulles $(\lambda_a)_{a \in A}$ et $(\mu_a)_{a \in A}$ telles que $x = \sum_{a \in A} \lambda_a.a$ et $y = \sum_{a \in A} \mu_a.a$.

  Or, $(\alpha.\lambda_a + \mu_a)_{a \in A}$ est presque nulle (nulle en-dehors des supports de $(\lambda_a)_{a \in A}$ et $(\mu_a)_{a \in A}$), donc

$$\alpha.x + y = \sum_{a \in A} (\alpha.\lambda_a + \mu_a).a$$

  est bien une combinaison linéaire d'éléments de A.

  Donc G est un sous-espace vectoriel de E.

— On montre que G contient A : si $x \in A$, $x = \sum_{a \in A} \lambda_a.a$ avec $\lambda_a = \delta_{ax}$, donc $x \in G$.

Donc G est un s.e.v. de E contenant A, donc $G \in \mathcal{F}$. Comme $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, $H \subset G$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité ! ***QED***◄

`Notation.`

1. Dans le cas où $A = (x_i)_{i \in I}$, on notera $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
2. Si A est un ensemble fini, i.e. $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, ou une famille finie, i.e. $A = (x_1, \dots, x_n)$, on aura tendance à noter $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$: on retrouve la définition vue en tout début d'année !

Exemple 1.12.

1. $\mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est le plan d'équation $z=0$.
2. $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
3. Attention à bien préciser le corps sur lequel on travaille ! Par exemple, $\mathrm{Vect}(1)=\mathbb{R}$ si on travaille sur un $\mathbb{R}$-ev, $\mathrm{Vect}(1)=\mathbb{C}$ si on travaille sur $\mathbb{C}$.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, $\mathrm{Vect}(\mathcal{P}\cup\mathcal{I})=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété 5 (Quelques notions sur les vect).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Une partie A de E vérifie $A=\mathrm{Vect}(A)$ ssi A est un s.e.v. de E.
2. Si $A\subset B\subset E$, alors $\mathrm{Vect}(A)\subset\mathrm{Vect}(B)$.
3. Si $x\in\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(A\cup\{x\})=\mathrm{Vect}(A)$.
4. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A\cup\{x\}$ avec un coefficient non nul devant x, alors $\mathrm{Vect}(A\cup\{x\})=\mathrm{Vect}(A\cup\{y\})$.

►***Démonstration.***

1. Si $\mathrm{Vect}(A)=A$, comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev, alors A est un sev.

   Si A est un sev, alors A est stable par CL, donc toutes les CL d'éléments de A sont dans A, donc $\mathrm{Vect}(A)\subset A$. Comme, par définition, $A\subset\mathrm{Vect}(A)$, on a l'égalité.
2. Si $A\subset B$, soit $x\in\mathrm{Vect}(A)$. Alors x est combinaison linéaire d'éléments de A, donc d'éléments de B, donc $x\in\mathrm{Vect}(B)$.
3. Si $x\in\mathrm{Vect}(A)$,
   - déjà, $A\subset A\cup\{x\}$, donc $\mathrm{Vect}(A)\subset\mathrm{Vect}(A\cup\{x\})$.
   - ensuite, $A\subset\mathrm{Vect}(A)$, $x\in\mathrm{Vect}(A)$, donc $A\cup\{x\}\subset\mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A\cup\{x\})\subset\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A))=\mathrm{Vect}(A)$.

4. Si $y \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\}$, par le point précédent, $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\} \cup \{y\})$.
De plus, $y = \sum_{a \in A} \lambda_a.a + \mu.x$ avec $\mu \neq 0$, donc $x = \frac{1}{\mu} y - \sum_{a \in A} \frac{\lambda_a}{\mu}.a$, donc $x \in \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\} \cup \{y\})$.
D'où $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$.

QED◀

`Remarque 1.13.`

1. La troisième proposition peut s'interpréter comme : si $x \in \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$.

2. La dernière proposition permet de **faire des opérations élémentaires entre éléments d'un $\mathbf{Vect}$** :

- $\mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1))$.
- Déterminons $\mathrm{Vect}(3, X+1, X^2-2X+5)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(3, X+1, X^2-2X+5) &= \mathrm{Vect}(1, X+1, X^2-2X+5) \\
&\quad \text{car } 1 \text{ est CL de } (3, X+1, X^2-2X+5) \text{ avec coeff } \neq 0 \text{ devant } 3 \\
&= \mathrm{Vect}(1, X+1-1, X^2-2X+5) \\
&= \mathrm{Vect}(1, X, X^2-2X+5) \\
&= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{K}_2[X].
\end{aligned}$$

Définition 9 : *Adaptation aux familles de vecteurs*.
La notion de réunion n'a pas vraiment de sens pour les familles de vecteurs : $(x,y) \cup (x,y)$ contient 2 ou 4 éléments ? Au lieu de cela, je vais utiliser un symbole « maison », la concaténation $\uplus$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \uplus (y_1, \ldots, y_p) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p).$$

L'idéal, pour décrire un sous-espace vectoriel, est de le décrire comme engendré par un certain nombre de vecteurs (par le plus petit possible notamment !) C'est pour cela que l'on va parler de familles de vecteurs.

1.3 Familles de vecteurs

On va définir trois notions essentielles : la notion de famille génératrice (déjà amorcée précédemment), celle de famille libre, et enfin celle de base.

Définition 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une partie A de E est dite génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(A)$.

Une famille $(x_i\ :\ i \in I)$ de E est dite génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Remarque 1.14.

1. A est génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de A.

2. Il faut pouvoir traduire cette définition dans les cas fini, indexé sur $\mathbb{N}$, et quelconque.

- cas fini. $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si

$$\forall y \in E,\ \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

- cas indexé sur $\mathbb{N}$. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de E si

$$\forall y \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ y = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_k.$$

- cas quelconque. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de E si

$$\forall y \in E,\ \exists(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}} \text{ presque nulle telle que } y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$$

ou

$$\forall y \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists(i_1, \dots, i_N) \in \mathrm{I}^N,\ \exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant N} \in \mathbb{K}^N,\ y = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k}.$$

Exemple 1.15.

1. E est toujours génératrice de E.

2. Dans $\mathbb{R}^2$,

- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$,
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est aussi génératrice de $\mathbb{R}^2$,
- $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

3. Exemples matriciels.

(a) une famille génératrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$,

(b) une famille génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}$,

(c) une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}+E_{ba})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$.

Remarque importante : dans cette famille, on compte des éléments en double ! Mais ce n'est pas grave.

4. Exemples polynomiaux.

(a) La famille (X^k) est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

(b) L'ensemble des polynômes unitaires est une partie génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

En vue du chapitre qui va suivre, il faut comprendre le genre de manipulations que l'on peut faire sur les familles génératrices et les Vect, et adapter la proposition de la section précédente.

Propriété 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev,

1. Si $A\subset B\subset E$, et A est génératrice de E alors B est génératrice.

2. Si $x\in \mathrm{Vect}(A)$, et $A\cup\{x\}$ est génératrice, alors A est génératrice.

3. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A\cup\{x\}$ avec un coefficient non nul devant x, et $A\cup\{x\}$ est génératrice, alors $A\cup\{y\}$ est génératrice.

`Remarque 1.16.`

On adapte la proposition avec des familles, en remplaçant $\cup$ par $\uplus$

Exo 1.4

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Méthode 1.

Dans $\mathbb{R}^n$, pour savoir si une famille est génératrice, on résout un système linéaire avec second membre.

Méthode 2.

Une chose utile à laquelle penser pour les familles génératrices : si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille génératrice de E et $(y_j)_{j\in J}$ est une famille de E, pour montrer que $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, il suffit de montrer que chacun des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est combinaison linéaire des $(y_j)_{j\in J}$.

Remarque 1.17.

Avec une famille génératrice, on n'a pas nécessairement unicité de la décomposition. C'est pour cela que l'on introduit la notion de...

Définition 11 : *Famille libre*.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\{x_i, i\in\mathrm{I}\}$ une famille de vecteurs de E. $\{x_i, i\in\mathrm{I}\}$ est dite libre si pour toute famille presque nulle $\{\lambda_i, i\in\mathrm{I}\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i\in\mathrm{I},\ \lambda_i = 0)\,.$$

Remarque 1.18.

Il faut pouvoir encore traduire cette proposition dans différents cas :

1. Cas fini. $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ est libre si et seulement si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_k = 0$$

2. Cas indexé sur $\mathbb{N}$. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall(\lambda_0,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

3. Cas général. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre si et seulement si

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall(i_1,\dots,i_N) \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}},\ \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{K}^{N},\ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_{i_k} = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,N]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Exemple 1.19.

1. Une famille contenant 0 n'est jamais libre ; de même pour une famille contenant deux fois le même vecteur.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre ?
3. Étudier la liberté de $\{(2,1,-1),\ (2,-1,2),\ (3,0,1)\}$ Moralité : dans de nombreux cas, chercher la liberté revient à résoudre un système linéaire homogène.
4. Montrer que $\{x\mapsto \sin(x),\ x\mapsto\sin(2x),\ x\mapsto\sin(3x)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Définition 12.

1. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.
2. Une combinaison linéaire nulle à coefficient non tous nuls d'une famille non libre est appelée **relation de liaison** entre les éléments de cette famille
3. Deux vecteurs liés sont dits colinéaires. Trois vecteurs liés sont dits coplanaires.

Propriété 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E.

1. Si $\exists i_0 \in \mathrm{I},\ x_{i_0} = 0_E$, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est liée.
2. Si $\exists(i,j)\in\mathrm{I}^2,\ i\neq j$ et $x_i = x_j$, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est liée.
3. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$.

4. Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre et que $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, alors $(x_i)_{i\in\mathrm{I}} \uplus \{y\}$ est libre.

5. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre si et seulement si tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

►***Démonstration.***

1. Si on dispose de i_0 tel que $x_{i_0} = 0$, alors $1.x_{i_0} = 0_E$ est une relation de liaison.
2. Si on dispose de $(i, j) \in \mathrm{I}^2$ tels que $u \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $1.x_i - 1.x_j = 0_E$ est une relation de liaison.
3. En deux temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est liée, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ famille presque nulle, non identiquement nulle, telle que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0.$$

On dispose alors de $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Donc

$$x_{i_0} = \sum_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i,$$

donc x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si on dispose de i_0 tel que x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$, alors on dispose de $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$ presque nulle telle que

$$x_{i_0} = \sum_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}} \mu_i x_i.$$

Mais alors

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0,$$

en posant $\lambda_{i_0} = -1$ et, si $i \neq i_0$, $\lambda_i = \mu_i$, et la famille $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ n'est pas identiquement nulle. On a donc une relation de liaison, la famille est liée.

4. On suppose que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre et que $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i + \mu y = 0$.

- si $\mu \neq 0$, alors $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \frac{-\lambda_i}{\mu} x_i \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, absurde.
  Donc $\mu = 0$.
- Donc $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0$.
  Par liberté de la famille, il vient : $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0$.

Donc $(x_i)_{i\in\mathrm{I}} \uplus \{y\}$ est libre.

5. En deux temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ libre. Soit $y \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On suppose que l'on dispose de deux familles presque nulles, $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$, telles que

$$y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i x_i$$

Alors

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0,$$

donc, par liberté de la famille, $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i - \mu_i = 0$, i.e $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = \mu_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0_E$$

Or, $0_E = \sum_{i\in\mathrm{I}} 0_{\mathbb{K}} x_i$. Par unicité de la décomposition, pour tout i dans I, $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$. Donc la famille est libre.

QED◄

Remarque 1.20.

C'est la liberté d'une famille qui permet l'« identification » des coefficients dans une combinaison linéaire.

Un dernier exemple important :

Définition 13.

Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de poynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que les degrés des P_k sont échelonnés si $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$.

De même, si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$, on dit que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à degrés échelonnés si $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.

Propriété 8 (HP – utilisable librement en sup).

Toute famille de polynômes tous non nuls, à degrés échelonnés est libre.

►***Démonstration.*** *On ne fait que le cas fini.*

Soit $(P_0, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que $0 \leqslant \deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

Notons, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, d_k le degré de P_k et c_k son coefficient dominant.

- **Méthode 1.** On montre par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\mathcal{P}_k : \lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$.
  - **Initialisation.** Comme $\deg(P_n) = d_n$ et $d_n > \deg\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k\right)$, le monôme de degré d_n de $Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ est $\lambda_n c_n X^{d_n}$.Il est nul, c_n est non nul, donc $\lambda_n = 0$. D'où $\mathcal{P}_0$.
  - **Hérédité.** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors $\lambda_n = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$.

    Alors $R = \sum_{j=0}^{n-k-1} \lambda_k P_j = 0$.

    On sait que $deg(P_{n-k-1}) > \deg\left(\sum_{j=0}^{n-k-2} \lambda_j P_j\right)$ donc le monôme de degré d_{n-k-1} de R est $\lambda_{n-k-1} c_{n-k-1} X^{d_{n-k-1}}$.

    Comme $R = 0$, $\lambda_{n-k-1} c_{n-k-1} = 0$, donc $\lambda_{n-k-1} = 0$, d'où $\mathcal{P}_{k+1}$, l'hérédité.

D'où le résultat : $\lambda_n = \cdots = \lambda_0 = 0$.

Donc $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

- **Méthode 2.** On pose $A = \{k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$. Il faut montrer que $A = \emptyset$. Par l'absurde, on suppose que $A \neq \emptyset$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée par n, donc A admet un plus grand élément j. Ainsi, $\lambda_j \neq 0$ et $\lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
  Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i = 0$.
  Or, $\deg(P_j) > \deg\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i\right)$, même pour $j = 0$. Donc le monôme de degré d_j dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \lambda_i P_i$ est $\lambda_j c_j X^{d_j}$, donc, comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \lambda_i P_i = 0$, $\lambda_j c_j = 0$, donc $\lambda_j = 0$, absurde car $j \in A$!
  Donc $A = \emptyset$, donc $\lambda_n = \cdots = \lambda_0 = 0$. Donc $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

QED◂

Corollaire 9 (Généralisation).

Toute famille de polynômes tous non nuls à degrés deux à deux distincts est libre.

▸***Démonstration.***

Avec une famille quelconque, éventuellement non indexée par un intervalle d'entiers (*famille d'éléments éventuellement non rangés*).

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille non vide de polynômes tous non nuls et de degrés distincts. Montrons que cette famille est libre en vérifiant que chacune de ses sous-familles finie est libre.

Pour ce faire, soit J une partie non vide et finie de I.

Première rédaction.

On nomme n le nombre d'éléments de J, puis on nomme $Q_1, \dots, Q_n$ les éléments distincts de la famille $(P_j)_{j\in J}$ rangés par valuations croissantes, puis on applique la propriété précédente.

Deuxième rédaction (recouvrant la démonstration de la propriété précédente).

Soit $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ tel que $\sum_{j\in J} \lambda_j P_j = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Par l'absurde, supposons que $(\lambda_j)_{j\in J} \neq (0)_{j\in J}$. Nommons alors K l'ensemble des indices j tels que $\lambda_j \neq 0$, puis nommons k_0 l'élément de K tel que le degré de P_{k_0} est <u>maximal</u> dans $([-\infty, +\infty], \leqslant)$ (*CMCR : toute partie non vide et finie d'un ensemble totalement ordonné peut-être rangée de son plus petit élément à son plus grand élément*). Alors P_{k_0} est une combinaison linéaire des P_k pour $k \in K \setminus \{k_0\}$.

Supposons que $K \setminus \{k_0\} = \emptyset$. Alors $P_{k_0} = 0_{\mathbb{C}[X]}$; c'est absurde car les P_i sont tous non nuls.

Sinon, $\deg(P_{k_0}) \leqslant \max\left\{ \deg(P_k) : \ k \in K \setminus \{k_0\}\right\}$ car pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X], c \in \mathbb{C}$, $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, et $\deg(cP) \leqslant \deg(P)$. Prenons alors $k \in K \setminus \{k_0\}$ tel que $\deg(P_{k_0}) \leqslant \deg(P_k)$; or par choix de k_0, $\deg(P_k) \leqslant \deg(P_{k_0})$. Donc $k \neq k_0$ et $\deg(P_k) = \deg(P_{k_0})$; c'est absurde car les valuations des P_i sont distinctes.

Ainsi, $(\lambda_j)_{j\in J} = (0)_{j\in J}$. D'où la sous-famille non vide et finie $(P_j)_{j\in J}$ est libre, ce quelle que soit la partie non vide et finie de I. La sous-famille vide étant libre, l'objectif est atteint. ***QED***◀

`Remarque 1.21.`**1.** Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libres.

2. De même, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la famille des polynômes de Tchebycheff, est libre.

3. **ATTENTION !** La condition « être à degrés échelonnés » est une condition suffisante pour être libre, mais pas nécessaire. Ainsi, si $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, deux à deux distincts, si $(L_0, \dots, L_n)$ est la base d'interpolation de Lagrange associée, la famille est libre (exo !) mais les polynômes sont tous de même degré.

Exo 1.5

[Méthode similaire] On définit, pour tout α dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque 1.22.

Moralité : une famille $\mathcal{F} = \{x_i, i \in I\}$ est génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme au moins une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. Elle est libre si tout élément qui est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ s'écrit de manière unique comme CL des x_i. Il vient alors naturellement la notion de *base* d'un espace vectoriel.

Définition 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est une base de E si elle est libre et si c'est une famille génératrice de E.

Propriété 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E.

1. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice si et seulement si pour tout y de E, il existe **au moins** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.
2. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre si et seulement si pour tout y de E, il existe **au plus** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.
3. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base de E si et seulement si pour tout y de E, il existe **exactement** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.

Remarque 1.23.

1. Traduction pour un nombre fini de vecteurs : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\forall y \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
2. L'existence de bases dans un espace vectoriel quelconque n'est pas évidente (on la démontrera dnas un

cas particulier au chapitre suivant) : en général, on a besoin de l'axiome du choix.

Exemple 1.24.

1. **Exemples fondamentaux : les bases canoniques**

   - Dans $\mathbb{K}^n$, la base canonique est la base

   $$(e_1, \ldots, e_n), \text{ où } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

   avec tous les coefficients non nuls, sauf celui de la i-ème ligne.

   - Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ constituent la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   - Dans $\mathbb{K}[X]$, la base canonique est $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   - Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la base canonique est $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non colinéaires forment une base.

   Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs non coplanaires forment une base.

3. Autres bases de polynômes

   - $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, libre car à degrés échelonnés, génératrice par la formule de Taylor.
   - Dans $\mathbb{K}_n[X]$, si $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, la base d'interpolation associée $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base : on a démontré qu'elle était libre plus tôt, et elle est génératrice par la formule d'interpolation de Lagrange.

4. Bases de matrices :

   - Une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}$.
   - Une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant b\leqslant a\leqslant n}$.
   - Une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{aa})_{1\leqslant a\leqslant n}$
   - Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}+E_{ba})_{1\leqslant a<b\leqslant n} \uplus (E_{aa})_{1\leqslant a\leqslant n}$.
   - Une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}-E_{ba})_{1\leqslant a<b\leqslant b}$.

5. Attention au corps dans lequel on se place :

- une base de $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ est $(1, i)$: $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = x.1 + y.i$.
- une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$ est (1) : $\forall z \in \mathbb{C}, z = z.1$.

Propriété 11 (Équivalence de listes de vecteurs).

En assemblant deux listes de vecteurs si, et seulement si, elles ont le même cardinal et qu'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires, on obtient une relation d'équivalence sur les listes de vecteurs pour laquelle :

(1°) Deux listes équivalentes engendrent le même sous-espace ;

(2°) Si deux listes sont équivalentes, alors l'une est génératrice si, et seulement si, l'autre est génératrice ;

(3°) Si deux listes sont équivalentes, alors l'une est libre si, et seulement si, l'autre est libre.

1.4 Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Les bases permettent de comprendre assez simplement comment se structure un espace vectoriel. Mais avant de trouver une base, ou plutôt que de chercher une base, il peut être utile de séparer de manière plus simple l'espace.
Faire des dessins de somme et de supplémentaires.

Définition 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E. La somme de F et de G, notée $F + G$, est le sous-espace vectoriel suivant

$$F + G = \{f + g,\ f \in F, g \in G\}.$$

`Exemple 1.25.`

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites non confondues est égale à tout $\mathbb{R}^2$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, alors $F+G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, car toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Propriété 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E.

1. $F+G$ est un s.e.v. de E.

2. $F+G = \mathrm{Vect}(F\cup G)$.

3. Plus généralement, pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A\cup B)$.

Remarque 1.26.

On a : $\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B) \supset \mathrm{Vect}(A\cap B)$, mais en général on n'a pas égalité. En effet, $A = \{(1,0);(1,1)\}$ et $B = \{(0,1);(1,-1)\}$ sont deux parties génératrices de $\mathbb{R}^2$ qui ne se rencontrent en aucun point.

►***Démonstration.***

1. $0_E \in F$, $0_E\in G$ donc $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$.

Soit $(u,v)\in(F+G)^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors on dispose de $(f,g)\in F\times G$, de $(f',g')\in F\times G$ tels que $u = f+g$ et $v = f'+g'$. Donc

$$\lambda u + \mu v = \lambda f = \lambda g + \mu f' + \mu g' = \underbrace{(\lambda f + \mu f')}_{\in F} + \underbrace{(\lambda g + \mu g')}_{\in G} \in F+G.$$

Donc $F+G$ est un s.e.v. de E.

2. En deux temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u\in F+G$. ALors on dispose de $(f,g)\in F|timesG$ tels que $u = f+g$. $f\in F\cup G$, $g\in F\cup G$ donc $f+g\in\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $F\subset F+G$, $G\subset F+G$ donc $F\cup G\subset F+G$, donc $\mathrm{Vect}(F\cup G)\subset\mathrm{Vect}(F+G)$. Mais $F+G$ est un sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(F+G) = F+G$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

3. La même chose !

QED◀

Définition 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E. La somme entre F et G est dite directe si pour tout x de $F+G$ il existe un unique f de F et un unique g de G tels que $x = f + g$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Exemple 1.27.

1. La somme de deux plans dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas directe. Par exemple, si

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; x = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; y = 0 \right\},$$

alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \dots$$

2. La somme $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ n'est pas directe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est directe car on a montré que toute matrice s'écrivait **de manière unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Propriété 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E. F et G sont en somme directe si, et seulement si

$F \cap G = \{0\}$.

▶***Démonstration.***

En deux temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme est directe. Soit $x \in F \cap G$, montrons que $x = 0_E$.

$x \in F \cap G$ donc $x \in F \oplus G$, donc

$$x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$

donc, par unicité de la décomposition de $x = f + g$, on a $x = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. (l'autre inclusion est évidente)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F + G$, $(f, g) \in F \times G$, $(f', g') \in F \times G$, tels que $x = f + g = f' + g'$. Alors $f - f' = g' - g$. Mais $f - f' \in F$ et $g' - g \in G$, donc $f - f' \in F \cap G = \{0_E\}$, donc $f - f' = 0_E$, i.e. $f = f'$, et $g = g'$. D'où l'unicité de l'écriture de x comme un élément de F + un élément de G.

QED◀

Définition 17.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \oplus G = E$, i.e.

$$\forall x \in E,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ x = f + g.$$

`Exemple 1.28.`

1. Deux droites de $\mathbb{R}^2$ non confondues sont supplémentaires.

Si $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $H = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, F et G sont supplémentaires, mais F et H sont aussi supplémentaires, de même que G et H.

ATTENTION ! Il n'y a donc pas unicité d'un supplémentaire !

2. Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : $E \setminus F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel (ne contient pas 0_E).
3. Deux droites de $\mathbb{R}^3$ non confondues sont en somme directe, mais pas supplémentaires.
4. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, mais la somme n'est pas directe, donc les deux espaces ne sont pas supplémentaires.
5. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
6. Les fonctions paires et les fonctions impaires sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode 3.

Pour montrer que deux s.e.v. sont supplémentaires, deux méthodes possibles

1. ou bien on montre séparément que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

   Exercice. Si $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices supérieures de diagonale nulle, montrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. ou bien on raisonne par **analyse-synthèse** :

   - l'analyse démontre l'unicité d'une décomposition, donc le caractère direct de la somme,
   - la synthèse démontre l'existence, donc le fait que la somme vaut bien E.

   Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$, G l'ensemble des fonctions constantes. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Propriété 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. de E.

1. Si $(f_i : i \in I)$ est une famille génératrice de F et $(g_j : j \in J)$ est une famille génératrice de G, alors $(f_i : i \in I) \uplus (g_j : j \in J)$ est une famille génératrice de $F + G$.
2. Si F et G sont en somme directe, si $(f_i : i \in I)$ est une famille libre de F et $(g_j : j \in J)$ est une famille libre de G, alors $(f_i : i \in I) \uplus (g_j : j \in J)$ est une famille libre de $F \oplus G$.
3. Si $(f_i : i \in I)$ est une base de F et $(g_j : j \in J)$ est une base de G, alors F et G sont

supplémentaires **si et seulement si** $(f_i : i \in I) \uplus (g_j : j \in J)$ est une base de E.

►***Démonstration.***

1. Soit $x \in F + G$. Alors on dispose de $u \in F$, de $v \in G$, tels que $x = u + v$.

- $u \in F$ donc on dispose de $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ presque nulle telle que $u = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i$.
- $v \in G$ donc on dispose de $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulle telle que $v = \sum_{j\in J} \mu_j g_j$.

Ainsi, $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} \mu_j g_j$, combinaison linéaire d'éléments de $(f_i, i \in I) \uplus (g_j, j \in J)$.
Donc $(f_i, i \in I) \uplus (g_j, j \in J)$ est génératrice de E.

2. Soient $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulles telles que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E$$

Alors

$$\underbrace{\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{j\in J} \mu_j g_j}_{\in G}$$

Or, comme $F \cap G = \{0_E\}$, $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i = 0_E$ et $\sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E$.
Donc, par liberté de $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et de $(g_j)_{j\in J}$, on en déduit que

$$\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0 \text{ et } \forall j \in J,\ \mu_j = 0.$$

Donc la famille concaténée est libre.

3. En deux temps.

$\boxed{\Leftarrow}$ La réciproque vient des deux points précédents.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $(f_i, i \in I) \uplus (g_j, j \in J)$ est une base de E :

— si $x \in E$, par le caractère générateur de la famille, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et de $(\mu_j)_{j\in J}$

presque nulles telles que

$$x = \underbrace{\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i f_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j \in J} \mu_j g_j}_{\in G} \in F + G$$

Donc $E = F + G$.

— soit $x \in F \cap G$. Alors on dispose de $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et de $(\mu_j)_{j \in J}$ presque nulles telles que

$$x = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i f_i = \sum_{j \in J} \mu_j g_j.$$

Donc

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j \in J} (-\mu_j) g_j = 0_E.$$

Donc, par liberté de la famille $(f_i, i \in I) \uplus (g_j, j \in J)$, on en déduit que $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0$ et que $\forall j \in J,\ \mu_j = 0$. Ainsi, $x = 0_E$.

D'où $F \oplus G = E$.

QED◀

Comment étendre la définition à un nombre quelconque d'espaces vectoriels ?

Propriété 15 (Associativité de la somme).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G et H 3 sous-espaces vectoriels de E.

1. $F + (G + H) = (F + G) + H$

2. Si $G \cap H = \{0_E\}$, si $F \cap (G \oplus H) = \{0_E\}$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F \oplus G) \cap H = \{0_E\}$.

Définition 18.

Dans ce cas, on dit que F, G et H sont en somme directe et on note la somme directe

$$F \oplus G \oplus H$$

(sans parenthèse)

►***Démonstration.***

1. On écrit

$$\begin{aligned} F + (G+H) &= \{f + k,\ f \in F,\ k \in G + H\} \\ &= \{f + g + h,\ f \in G,\ g \in G,\ h \in H\} \\ &= \{\ell + h,\ \ell \in F + G,\ h \in H\} \\ &= (F+G) + H. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in G$ et $x \in G \subset G \oplus H$.

Donc $x \in F \cap (G \oplus H) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$.

Soit $x \in (F \oplus G) \cap H$. Alors on dispose de $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tels que $x = f + g$ et $x = h$.

Donc $f + g = h$, donc $f = -g + h$, donc $f \in (G \oplus H) \cap F = \{0_E\}$.

Donc $f = 0_E$, donc $g = h$, donc $g \in G \cap H = \{0_E\}$, donc $g = 0_E$.

Donc $x = 0_E$.

QED◄

Définition 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(F_1, \dots, F_n)$ n sous-espaces vectoriels de E.

1. On définit la somme $F_1 + \cdots + F_n$ parfois notée $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ par

$$F_1 + \cdots + F_n = \{f_1 + \cdots + f_n,\ (f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

Elle est aussi égale à

$$F_1 + \Big(F_1 + \big(F_3 + \dots\big)\Big).$$

2. On dit que la somme est directe si

- $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$,
- $(F_1 \oplus F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$,
- $\dots$,
- $(F_1 \oplus \dots \oplus F_{n-1}) \cap F_n = \{0_E\}$.

et on note cette somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ ou $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Propriété 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $F_1, \dots, F_n$ n s.e.v. de E. Les ASSE

1. La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

2. $\forall x \in F_1 + \dots + F_n$, $\exists!(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$.

3. Pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans $F_1 \times \dots \times F_n$,

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0.$$

►***Démonstration.***

On admet la preuve. ***QED***◄

`Exemple 1.29.`

1. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
2. **Attention !** Il n'y a plus l'équivalence « somme directe » $\Leftrightarrow$ « intersection nulle » . Ainsi, trois droites dans $\mathbb{R}^2$ ne sont pas en somme directe, mais leurs intersections (2 à 2) sont nulles.

Le but de cette théorie des espaces vectoriels est d'étudier les applications qui vont bien avec les espaces vectoriels : ce sont les applications linéaires.

2 Applications linéaires

L'avantage de la structure d'espace vectoriel c'est qu'on peut tout ramener à l'étude de quelques éléments (bases, espaces supplémentaires, etc.). On va voir quelles applications se comportent bien avec cette structure.

2.1 Généralités

Définition 20.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

1. Une *application linéaire* entre E et F est une application $f : E \to F$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

   On peut remplacer la proposition précédente par

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

   On nomme l'ensemble des applications linéaires de E dans F $\mathscr{L}(E, F)$.

2. Un *endomorphisme* est une application linéaire de E dans E. On note leur ensemble $\mathscr{L}(E)$.
3. Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
4. Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.
5. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Propriété 17.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.

2. $\forall (x_i)_{i\in \mathrm{I}} \in E^{\mathrm{I}}$, $\forall (\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ presque nulle,

$$f\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i f(x_i).$$

►***Démonstration.***

1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, donc $0_F = f(0_E)$.

2. La preuve se fait par récurrence sur le nombre de termes que l'on somme.

QED◄

`Exemple 2.1` *Plein d'exemples fondamentaux*.

1. $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est linéaire de E dans E, et bijective, donc $\mathrm{Id}_E \in GL(E)$.

2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda.\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto \lambda.x \end{array} \right. \text{ est linéaire.}$$

Soit en effet $(x, y) \in E^2$, $\mu \in \mathbb{K}$. ALors

$$\begin{aligned} \lambda.\mathrm{Id}_E(x + \mu y) &= \lambda.(x + \mu.y) \\ &= \lambda.x + \mu\lambda.y = \lambda.\mathrm{Id}_E(x) + \mu\lambda.\mathrm{Id}_E(y). \end{aligned}$$

Ces applications sont appelées homothéties.

3. Démontrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. (notre contre-exemple adoré) L'application

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{F}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

5. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + 1, x - 2y - 2, x + y)$ n'est pas une application linéaire !

6. La conjugaison est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev, comme du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$.

7. La dérivation est une application linéaire de $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}^0(\mathbb{R})$, ou de $\mathbb{K}_n$ dans $\mathbb{K}_{n-1}$, ou bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

8. L'application d'évaluation en un point est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$ ou de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

9. L'application définie par $\varphi : f \in \mathbb{C}^0([0, 1]) \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire.

`Remarque 2.2.`

Comment démontrer simplement que

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est linéaire ? On écrit **matriciellement** cette application :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La linéarité vient juste de la distributivité du produit matriciel.

Définition 21.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application

$$\left|\begin{array}{l}\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \qquad X \mapsto AX\end{array}\right.$$

est linéaire et est appelée application canoniquement associée à A.

Exo 2.6

Un exercice et une méthode importants.

Soit, n un entier naturel. Soit φ l'application définie par, pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = XP'(X) - 2P(X+1)$. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

—

Attention ! Il faut montrer ENDO (c'est-à-dire que l'application est de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$) et MORPHISME (c'est-à-dire montrer que l'application est linéaire)

Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\deg(\varphi(P)) \leqslant \max(\deg(XP'(X)), \deg(2P(X+1)) \leqslant \max(1+n-1, n) \leqslant n,$$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'(X) - 2(\lambda P + Q)(X+1) \\ &= \lambda XP'(X) + XQ'(X) - \lambda.2P(X+1) - 2Q(X+1) \text{ par linéarité de la dérivation et de l'évaluation.} \\ &= \lambda(XP' - 2P) + XQ' - 2Q \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q),\end{aligned}$$

d'où la linéarité de φ.

Donc φ est un endomorphisme.

Définition 22 : *Opération sur les applications linéaires.*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit $f+g$ par $\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

2. On définit $\lambda.f$ par $\forall x \in E,\ (\lambda.f)(x) = \lambda.(f(x))$.

On munit ainsi $\mathscr{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

►***Démonstration.***

Preuve admise. ***QED***◄

Propriété 18.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev, f dans $\mathscr{L}(E,F)$, g dans $\mathscr{L}(F,G)$.

1. $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

2. Si u est dans $\mathscr{L}(E,F)$ et v est dans $\mathscr{L}(F,G)$, $g \circ (f+u) = g \circ f + g \circ u$ et $(g+v) \circ f = g \circ f + v \circ f$.

►***Démonstration.***

1. Soit $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda.x+y) = g(f(\lambda.x+y)) &= g(\lambda f(x) + f(y)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g(f(x)) + g(f(y)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y), \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est linéaire.

2. Pour démontrer des égalités entre applications, on revient aux éléments ! Soit x dans E. Alors

$$g \circ (f+u)(x) = g(f(x)+u(x)) = g(f(x)) + g(u(x)) = g \circ f(x) + g \circ u(x),$$

donc $g \circ (f+u) = g \circ u + g \circ u$, et

$$(g+v) \circ f(x) = g(f(x)) + v(f(x)) = g \circ f(x) + v \circ f(x)$$

donc $(g+v) \circ f = g \circ g + v \circ f$.

QED◀

Propriété 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non intègte et non commutatif.

►***Démonstration.***

Pour la non-intégrité, on sort notre contre-exemple fétiche :

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Alors si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$f \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Pour la non-commutativité, si

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \end{array} \right. ,$$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \text{ et } f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},$$

si $y \neq 0$ ou $y \neq x$. ***QED***◀

Définition 23.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec comme convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Mieux que ça, on lui donne une structure d'algèbre.

Définition 24.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A est une algèbre s'il est muni d'une lci $\times$ telle que $(A, +, \times)$ est un anneau, et tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y).$$

`Exemple 2.3.`

$(\mathscr{M}_n, +, ., \times)$ et $(\mathscr{L}(E), +, ., \times)$ sont deux $\mathbb{K}$-algèbres.

On a ainsi toutes les règles de calcul dans un anneau qui sont vraies, en particulier :

Propriété 20.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, f et g dans $\mathscr{L}(E)$ $n \in \mathbb{N}$. **SI** $f \circ g = g \circ f$**,**

- (binôme de Newton) $(f + g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$.

- (identité de Bernoulli) $f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k}\right)$.

►*Démonstration.*

La preuve est admise (déjà faite beaucoup de fois) !! ***QED◄***

Propriété 21.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. pour tout isomorphisme f de E dans F, f^{-1} est linéaire.

2. $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

►*Démonstration.*

1. Soit f un isomorphisme de E dans F. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient x et y dans F, et λ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de a et b dans E tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+\lambda y) &= f^{-1}(f(a)+\lambda f(b)) \\ &= f^{-1}(f(a+\lambda b)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= a + \lambda b \\ &= f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est linéaire.

2. Comme $GL(E)$ est une partie de $S(E)$ (ensemble des bijections de E) stable par $\circ$ (car la composée de deux bijectiones linéaires est une bijection linéaire) et par inverse, on en déduit que $GL(E)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$, donc un groupe.

QED◄

`Remarque 2.4.`

On a toujours $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

2.2 Noyau et image

Propriété 22.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. L'image d'un s.e.v. de E par f est un s.e.v. de F.
2. L'image réciproque d'un s.e.v. de F par f est un s.e.v. de E.

`Remarque 2.5.`

Revoyez les notions d'image directe et réciproque si jamais ce n'est pas clair !

►***Démonstration.***

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

   Déjà, $f(0_E) \in f(A)$ donc $0_F \in f(A)$ donc $f(A) \neq \emptyset$.

   Ensuite, soit $(y, y') \in f(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on dispoe de x et x' dans A tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors

   $$\lambda y + y' = \lambda f(x) + f(x') = f(\lambda x + x').$$

   Or, A est un sous-espace vectoriel donc $\lambda x + x' \in A$, donc $\lambda y + y' \in f(A)$, donc (A) est un sous-espace vectoriel de F.

2. Soit B un sous-espace vectoriel de F. Démontrons que $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. (**attention,** $f^{-1}(B)$ est l'image réciproque de B par f, il n'est pas question de bijectivité ici). On rappelle qu

   $$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

   Déjà, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in B$ donc $0_E \in f^{-1}(B)$.

Ensuite, soit $(x, x') \in f^{-1}(B)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$. On calcule

$f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$ par linéarité de f,

mais $f(x) \in B$, $f(x') \in B$ et comme f est linéaire, $\lambda f(x) + f(x') \in B$, donc $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

QED◀

Exemple 2.6.

1. Si on écrit $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ 2M+3M^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\}$, alors $A = \varphi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$ où $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto 2M + 3M^T \end{array} \right.$.

   $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, par linéarité de la transposition.

   $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc A est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. $B = \{(X^2+1)P' + P(X-1), P \in \mathbb{K}_3[X]\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}_3[X]$ car $B = f(\mathbb{K}_3[X])$ où $f : P \mapsto (X^2+1)P' + P(X-1)$, et $\mathbb{K}_3[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

3.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} z \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $C = \psi^{-1}(\{0\})$, où ψ est la forme linéaire

$$\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} z \mapsto x + y - z \end{array} \right.$$

Définition 25.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Le noyau de f, noté $\ker(f)$, est $f^{-1}(\{0\})$. Ainsi, $\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) \in \{0\}\}$, c'est-à-dire

(et je vous demande d'apprendre la définition qui suit) :

$$\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

2. L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est $f(E)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Avant de regarder des exemples, il faut se demander l'utilité de ces deux espaces.

Propriété 23.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

►***Démonstration.***

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective. Soit alors x dans $\ker(f)$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_F$, donc $\ker(f) = \{0_E\}$. (remarque : en réalité on a seulement montré que $\ker(f) \subset \{0_E\}$ mais l'autre est évident)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\ker(f) = \{0_E\}$ et démontrons que f est injective. **Soit** $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$.

Alors $f(x) - f(x') = 0_F$,

donc $f(x - x') = 0_F$,

donc $x - x' \in \ker(f) = \{0_E\}$, donc $x - x' = 0_E$ donc $x = x'$. Donc f est injective.

2. Raisonnons par équivalences :

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F.$$

QED◄

Exemple 2.7.

Donnons quelques exemples.

1. Si $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$

Détermination du noyau. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow P' = 0 \text{ (polynôme nul)} \\ &\Leftarrow P \text{ est constant} \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$. En particulier φ n'est pas injective.

Détermination de l'image. Démontrons que φ est surjective. Comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[X]$ de manière évidente, on montre l'inclusion réciproque.

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Écrivons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Posons $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k X^{k+1}}{k+1}$, alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q' = P$, i.e. $P = \varphi(Q)$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[X]$.

2. Si $n \in \mathbb{N}$, si $\varphi_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$, alors $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (exo : le démontrer).

3. Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

- Déterminons $\ker(f)$: pour cela, on résout un système linéaire **homogène**. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -3y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0,$$

donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, donc f est injective.

- Détermination de l'image de f. Ici, on résout un système linéaire **non homogène.** Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a+b=x \\ 2a-b=y \\ a+3b=z \end{cases}$$

Déterminer cette image, c'est déterminer les conditions de compatibilité pour que ce système linéaire ait une solution. Or, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} a+b=x \\ 2a-b=y \\ a+3b=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=x \\ -3b=y-2z \\ 2b=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=x \\ -3b=y-2x \\ 0=-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z. \end{cases}$$

Ce système a une solution ssi $-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z=0$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est le plan d'équation $-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z=0$.

4. Si ψ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on remarque (faites-le !) que

$$\ker(\psi) = \mathrm{Im}(\psi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, y=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

5. Toute équation différentielle linéaire homogène revient à déterminer le noyau d'une application linéaire ! Ainsi, si on considère $f'-xf=0$, l'application D qui à $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe $D(f) : x \mapsto f'-xf$ est linéaire, et résoudre l'équation revient à déterminer $\ker(D)$.

Exo 2.7

Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ où $\varphi : P(X) \mapsto P(X+1)-P(X)$.

Propriété 24.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Alors f réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire que l'application

$$g : \left| \begin{array}{l} S \to \mathrm{Im}(f) \\ \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.8.

On résume cette proposition en « toute application réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image. »

►***Démonstration.***

La linéarité de g est évidente par la linéarité de f.

Montrons la bijectivité de g :

- Montrons que g est injective : soit x dans $\ker(g)$. Alors $g(x) = 0_F$ donc $f(x) = 0_F$ donc $x \in \ker(f)$. Mais comme $x \in S$, $x \in S|cap\ker(f) = \{0_E\}$ par supplémentarité. Donc $x = 0_E$ donc g est injective.
- Montrons que g est surjective : soit y dans $\mathrm{Im}(f)$. Alors on dispose de x dans E tel que $f(x) = y$. Mais $E = \ker(f) \oplus S$ donc on dispose de z dans $\ker(f)$ et s dans S tels que $x = z + s$. Mais alors

  $$y = f(x) = f(z) + f(s) = f(s) \text{ car } z \in \ker(f) \text{ donc } f(z) = 0.$$

  Or, $s \in S$ donc s est un antécédent de y par g.

D'où la surjectivité et la bijectivité ! ***QED***◄

Propriété 25.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $a \in F$. Soit (E) l'équation $u(x) = a$ d'inconnnue $x \in E$, $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions. Alors

- Si $a \notin \mathrm{Im}(u)$, $\mathscr{S} = \emptyset$.

- Si $a \in \mathrm{Im}(u)$, soit x_0 un antécédent de a par u. Alors

$$\mathscr{S} = \{x_0 + z,\ z \in \ker(u)\}.$$

Remarque 2.9.

On dit que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine dirigé par $\ker(u)$.

►***Démonstration.***

- Si $a \notin \mathrm{Im}(u)$, le résultat est clair !
- Si $a \in \mathrm{Im}(u)$, alors on dispose de x_0 un antécédent de a par u. Soit x dans E. Alors

$$f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

  Donc

$$x \in \mathscr{S} \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists z \in \ker(f),\ x = x_0 + z.$$

D'où le résultat ! ***QED***◄

Exemple 2.10.

C'est ce raisonnement que l'on applique lorsqu'on résout des équations différentielles linéaires avec second membre : on cherche une solution particulière puis on rajoute l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Ainsi, d'après l'exemple 5., toute équation différentielle linéaire peut se mettre sous la forme

$$D(f) = g,$$

où D est une application linéaire et g une fonction.

Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\{f_0 + f,\ f \in \ker(D)\},$$

où f_0 est une solution de l'équation avec second membre. Or, $\ker(D)$ est exactement les solutions de l'équation homogène !

Propriété 26 (HP).

Soient E, F et G trois espaces vectoriesl, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et g dans $\mathscr{L}(F, G)$. Alors $g \circ f = 0$ ssi $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Remarque 2.11.

Attention ! Ce n'est pas une propriété officiellement au programme, il faut la redémontrer.

►***Démonstration.***

Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} g \circ f = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_G \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \ker(g), \\ &\Leftrightarrow \forall x \in f(E),\ y \in \ker(g) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g). \end{aligned}$$

QED◄

Exo 2.8

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. A-t-on $\ker(f^2) = \ker(f)$? Si non, a quelle condition a-t-on égalité ? Même question pour l'image.

2.3 Applications linéaires et familles

Une question naturelle peut être alors de savoir comment les propriétés des applications linéaires peuvent se traduire avec les notions de familles libres, génératrices, et de bases.

Propriété 27.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i.$$

►***Démonstration.***

Comme $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une base de E, on sait que

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i.$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une telle application linéaire f. Soit alors x dans E et $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ l'unique famille presque nulle telle que $x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Alors, par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i y_i,$$

d'où l'unicité de f.

Synthèse. Définissons f par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i y_i \text{ où } (\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \text{ l'unique famille presque nulle telle que } x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i.$$

f est bien définie, mais il faut démontrer qu'elle est linéaire. Soit $(x, y) \in E^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ l'unique famille de coefficients dans $\mathbb{K}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i$, et $(\mu_i)_{i\in \mathrm{I}}$ l'unique famille de coefficients dans $\mathbb{K}$ presque nulle telle que $y = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mu_i e_i$. Alors

$$\alpha x + y = \sum_{i\in \mathrm{I}} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i,$$

donc les coefficients de $\alpha x + y$ dans la décomposition sur la base (e_i) sont les $(\alpha\lambda_i + \mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i\in\mathrm{I}} (\alpha\lambda_i + \mu_i) y_i \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i y_i + \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i y_i \\ &= \alpha f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donc f est linéaire. D'où l'existence ! ***QED***◄

`Remarque 2.12.`

Autrement dit **une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base.**

Mieux : une application linéaire est déterminée par sa restriction sur des sous-espaces supplémentaires.

> **Propriété 28.**
> Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \ldots, E_n$ tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$, et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $u_k \in \mathscr{L}(E_k, F)$. Alors il existe une unique application linéaire u dans $\mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $u_{|E_k} = u_k$.

►***Démonstration.***

La preuve est admise, le raisonnement est très similaire à la preuve précédente. ***QED***◄

`Exemple 2.13.`

Ces propositions peuvent servir à définir simplement des applications linéaires :

1. On définit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(X^k) = \frac{1}{2k+1} X^{k+1}.$$

Alors si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $u(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2k+1} X^{k+1}$.

2. deuxième exemple, comme on sait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, on peut définir l'application linéaire $\tau : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(K)$ par :

$$\forall S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}),\ \tau(S) = S \text{ et } \forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}),\ \tau(A) = -A.$$

Alors si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, comme on dispose d'un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = S + A$, $\tau(M) = S - A$.
(remarque : on a (re)défini ainsi la transposition !)

Propriété 29.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, $f \in \mathscr{L}(E, F)$

1. si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et si f est injective alors $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.

2. si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors si f est injective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.

3. si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, f est surjective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.

4. si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, f est bijective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

►***Démonstration.***

1. supposons $(e_i)_{i\in I}$ est libre et f injective. Soit $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille presque nulle telle que

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = 0.$$

Alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = 0$.
Donc, par injectivité de f, $\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i = 0$.
Donc, par liberté des $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$, pour tout i dans I, $\lambda_i = 0$.
Donc $(f(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est libre.

2. supposons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E.
Si f est injective alors par le point précédent $(f(e_i))_{i\in \mathrm{I}}$ est libre.

Si $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre, montrons que f est injective. Soit x dans $\ker(f)$. On dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Alors $f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = 0$, donc $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = 0$. Donc, par liberté de $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ pour tout i dans I, $\lambda_i = 0$.

Donc $x = 0$, donc f est injective.

3. supposons que $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de E.

Si $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de F, montrons que f est surjective. Soit y dans F. Alors on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i)$. Donc, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = y$. Donc $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$ est un antécédent de y par f.

Si f est surjective, démontrons que $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de F. Soit y dans F. Par surjectivité de f, on dispose de $x \in \mathbb{F}$ tel que $f(x) = y$. Par caractère générateur de $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Mais alors

$$y = f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i),$$

donc y est combinaison linéaire des $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$. D'où le caractère générateur.

4. Le dernier point se démontre en combinant les deux précédents !

QED◀

2.4 Projections et symétries

On va terminer ce chapitre par l'étude de quelques endomorphismes particuliers, à commencer par les projections.

Définition 26.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. supplémentaires de E. Pour tout x de E, il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. Alors p et q sont linéaires. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G et que q est la projection sur G parallèlement à F.

►***Démonstration.***

Démontrons que les applications sont linéaires.

Soit $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$x = p(x) + q(x),\ y = p(y) + q(y),$$

donc

$$\lambda x + y = \underbrace{\lambda p(x) + p(y)}_{\in F} + \underbrace{\lambda q(x) + q(y)}_{\in G}$$

Mais

$$\lambda x + y = \underbrace{p(\lambda x + y)}_{\in G} + \underbrace{q(\lambda x + y)}_{\in G}.$$

Par le caractère direct de la somme $F \oplus G$, $p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y)$, et $q(\lambda x + y) = \lambda q(x) + q(y)$, donc p et q sont linéaires. ***QED***◄

`Exemple 2.14.`

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, si $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on cherche $f \in F$ et $g \in G$ tels que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f + g$, i.e. on cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \end{cases},\ \text{d'unique solution } \lambda = \frac{x+y}{2},\ \mu = \frac{x-y}{2}.$$

Ainsi, si p est le projecteur sur F parallèlement à G,

$$p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, toujours, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, détemrinons φ le projecteur sur F parallèlement à G. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ATTENTION ! Si on change **un** des deux espaces supplémentaires, l'expression du projecteur change complètement.

3. $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \dfrac{M+M^T}{2} + \dfrac{M-M^T}{2}$. Ainsi, si p est le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $p(M) = \dfrac{M+M^T}{2}$.

Méthode 4.

Pour déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, dans beaucoup de cas,

- on démontre par analyse-synthèse que $F \oplus G = E$,
- à la fin de l'analyse, on a réussi à écrire $x \in E$ sous la forme $x = f + g$. Le f trouvé est $p(x)$.

Propriété 30.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux s.e.v. supplémentaires de E, p la projection sur F

parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F.

1. $p + q = \mathrm{Id}_E$,
2. $\ker(q) = \mathrm{Im}(p) = G$,
3. $\mathrm{Im}(p) = \ker(q) = F$,
4. En particulier,

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}) = \{x \in E,\ p(x) = x\}}$$

et

$$\boxed{\mathrm{Im}(q) = \ker(q - \mathrm{Id}) = \{x \in E,\ q(x) = x\}}$$

(et pareil pour $\mathrm{Im}(q)$)

5. $p \circ p = p$,
6. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

►***Démonstration.***

1. Par définition, $\forall x \in E,\ x = p(x) + q(x)$,
2.
   - $\boxed{\ker(p) \subset \mathrm{Im}(q)}$ Soit $x \in \ker(p)$. Alors $x = p(x) + q(x) = q(x)$, donc $x \in \mathrm{Im}(q)$.
   - $\boxed{\mathrm{Im}(q) \subset G}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(q)$. On dispose de $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Mais par définition $q(x) \in G$.
   - $\boxed{G \subset \ker(p)}$ Soit $x \in G$. Alors $x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$. Par définition, $p(x) = 0$.

   D'où le résultat.
3. Idem qu'au point précédent.
4. Soit $x \in E$. Alors $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $p(p(x)) = p(x)$.
5. $\mathrm{Im}(q) = \ker(p)$ donc $\mathrm{Im}(q) \subset \ker(p)$, donc $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même pour $q \circ p$.

***QED*◀**

Définition 27.

Un projecteur de E est un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

Propriété 31.

Une projection est un projecteur.

▶***Démonstration.***

Déjà démontré ! ***QED*◀**

Propriété 32.

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-ev E.

1. $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires.

2. p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

▶***Démonstration.***

Là, une analyse-synthèse est très utile ! Soit $x \in E$.

- **Analyse.** On suppose $x = y + z$, avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$.

  Alors $p(x) = p(y + z) = p(y) + p(z) = p(z)$.

  Or, $z \in \mathrm{Im}(p)$, donc on dispose de $v \in E$ tel que $p(v) = z$. Donc $p(z) = p \circ p(v) = p(v) = z$, donc $\boxed{p(x) = z}$.

  Donc $y = x - z = \boxed{x - p(x)}$.

- **Synthèse.** Posons $y = x - p(x)$ et $z = p(z)$. Alors

  — $p(y) = p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$, donc $y \in \ker(p)$.

  — $z = p(x)$ donc $z \in \mathrm{Im}(p)$.

  — $y + z = x - p(x) + p(x) = x$.

D'où la supplémentarité de $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et, par la même occasion, le fait que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ ($z = p(x)$). ***QED*◀**

Remarque 2.15.

1. Comme les projecteurs sont des projections, toutes les propriétés des projections sont utilisables pour des projecteurs.
2. Quels sont les projecteurs inversibels ?

Lorsqu'on a deux s.e.v. supplémentaire, on peut faire un autre type de transformation : ce sont les symétries. Comme pour les projecteurs on donne deux définitions : une géométrique et une en termes d'endomorphismes, et on va ensuite voir qu'elles coïncident.

Définition 28.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s.e.v. supplémentaires. Pour tout x de E, il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. L'application $s : x \mapsto p(x) - q(x)$ est linéaire et est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Propriété 33.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G supplémentaires, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, p la projection sur F parallèlement à G, $q = \mathrm{Id}_E - p$. Alors

1. $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$.
2. $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
3. $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ s(x) = x\}$,
4. $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ s(x) = -x\}$,
5. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

►*Démonstration.*

1. Évident,

2. $-s = -(p-q) = q-p$.

3. Soit $x \in E$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow s(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - q(x) = p(x) + q(x) \\ &\Leftrightarrow 2q(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(q) \\ &\Leftrightarrow x \in F. \end{aligned}$$

4. On fait pareil.

5. $s \circ s = (p-q)\circ(p-q) = p\circ p - p\circ q - q\circ p + q\circ q = p + 0_{\mathscr{L}(E)} + 0_{\mathscr{L}(E)} + q = \mathrm{Id}_E$.

***QED*◀**

`Exemple 2.16.`

1. Soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On sait que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$$

Ain si,

$$s(M) = \frac{M+M^T}{2} - \frac{M-M^T}{2} = M^T.$$

Ainsi, s est la transposition.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, exprimer la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Définition 29.

Une involution de E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Propriété 34.

Une symétrie est une involution.

►***Démonstration.***

Déjà démontrée ! ***QED***◄

Propriété 35.

Soit s une involution. Alors $\ker(s - \mathrm{Id})$ et $\ker(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id})$.

►***Démonstration.***

Faisons encore une analyse-synthèse ! Soit $x \in E$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $(y, z) \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \times \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Alors

$$\begin{cases} x = y + z \\ s(z) = s(y) + s(z) = y - z \end{cases}$$

  Ainsi, $y = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $z = \dfrac{x - s(x)}{2}$. D'où l'unicité de la décomposition.

- **Synthèse.** Posons $y = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $z = \dfrac{x - s(x)}{2}$. Alors
  - déjà, $s(y) = \dfrac{s(x) + s(s(x))}{2} = \dfrac{s(x) + x}{2} = y$, donc $y \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
  - ensuite, $s(z) = \dfrac{s(x) - s(s(x))}{2} = \dfrac{s(x) - x}{2} = -z$, donc $z \in \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.
  - enfin, $y + z = x$.

  D'où l'existence et la supplémentarité.

On en déduit alors que si $x \in E$, le symétrique de x par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ est

$$\frac{x + s(x)}{2} - \frac{x - s(x)}{2} = s(x),$$

d'où le second résultat ! ***QED◀***

Remarque 2.17.

On a déjà fait cette preuve deux fois :

- pour décomposer toute fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En effet,

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto (x \mapsto f(-x)) \end{array} \right.$$

  est une involution linéaire !

- pour décomposer toute matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cette fois, c'est la transposition qui est une bonne involution linéaire.

2.5 Formes linéaires et hyperplans

Rappel. Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ ou E^* l'ensemble des formes linéaires.

Exemple 2.18.

1. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x + y - 2z \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On remarque que son noyau est un plan.

2. $P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

3. La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 36.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un base de E.

Si $x \in E$, alors on dispose d'une unique famille presque nulle $(\varphi_i(x))_{i\in\mathrm{I}}$, telle que

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \varphi_i(x).e_i.$$

Alors, pour tout i dans I, $\varphi_i \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 30.

On appelle la famille $(\varphi_i)_{i\in \mathrm{I}}$ la famille des formes linéaires coordonnées associée à la base $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

On note parfois $\forall i \in \mathrm{I},\ \varphi_i = e_i^*$.

Remarque 2.19 ***Culturelle***.

$(e_i^*)_{i\in \mathrm{I}}$ forme une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, mais c'est hors-programme (le fait qu'il s'agisse d'une base vient juste du fait que toute application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base).

►***Démonstration.***

On prouve la linéarité pour tout i dans I.

Soit $i_0 \in \mathrm{I}$.

Notons $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{\substack{i\in \mathrm{I}\\ i\neq i_0}}$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{i_0})$. Alors comme

$$(e_i)_{\substack{i\in \mathrm{I}\\ i\neq i_0}} \uplus (e_{i_0})$$

est une base de E, $F \oplus G = E$.

Comme $|forall x \in E$,

$$x \in \sum_{\substack{i\in \mathrm{I}\\ i\neq i_0}} \varphi_i(x).e_i + \varphi_{i_0}(x).e_{i_0},$$

on en déduit que la projection sur G parallèlement à F est

$$x \mapsto \varphi_{i_0}(x).e_{i_0}.$$

Cette application est linéaire. Donc

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi_{i_0}(\lambda x + y).e_{i_0} = \lambda \varphi_{i_0}(x).e_{i_0} + \varphi_{i_0}(y).e_{i_0},$$

donc

$$\varphi_{i_0}(\lambda x + y).e_{i_0} = \left(\lambda\varphi_{i_0}(x) + \varphi_{i_0}(y)\right).e_{i_0},$$

donc, comme $e_{i_0} \neq 0_E$,

$$\varphi_{i_0}(\lambda x + y) = \lambda\varphi_{i_0}(x) + \varphi_{i_0}(y)$$

QED◀

`Exemple 2.20.`

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, alors

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x.e_1 + y.e_2$$

et si (φ_1, φ_2) est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x \text{ et } \varphi_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = y.$$

2. **Attention !** Si on change un des vecteurs, on change l'ensemble des formes linéaires coordonnées !
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, alors

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(x - \frac{y}{2}\right)e_1 + \frac{y}{2}e_2,$$

donc, si (φ_1, φ_2) est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x - \frac{y}{2} \text{ et } \varphi_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \frac{y}{2}.$$

3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = x_i.$$

4. Dans $\mathbb{K}[X]$, si $\alpha \in \mathbb{K}$, $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \psi_k(P) = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

5. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, si $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, si $(L_0, \dots, L_n)$ est la base de Lagrange associée, si $(\rho_0, \dots, \rho_n)$ est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \rho_k(P) = P(x_k).$$

Définition 31.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemple 2.21.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 0 \right\},$$

alors D est un hyperplan, c'est le noyau de $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - 2y$. De manière générale, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, si

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ 3x + y - 2z = 0 \right\},$$

alors P est un hyperplan, c'est le noyau de $\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x + y - 2z$. De manière générale, dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans.

3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle est un hyperprlan de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Propriété 37.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, H un hyperplan de E, a un vecteur non nul de E.

Si $a \notin H$, alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.

►***Démonstration.***

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $H = \ker(\varphi)$.

Alors $\varphi(a) \neq 0$ car $a \notin H$.

Soit $x \in E$.

- **Analyse.** On suppose que $x = h + \lambda.a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\varphi(a) = \lambda\varphi(a),$$

  donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda.a$.

- **Synthèse.** Posons $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda.a$. Alors
  - $\lambda.a \in \mathrm{Vect}(a)$,
  - $\varphi(h) = \varphi(x - \lambda.a) = \varphi(x) - \lambda\varphi(a) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, donc $h \in H$,
  - $h + \lambda.a = x$.

  D'où l'existence et la supplémentarité désirée.

QED◂

Propriété 38 (Réciproque de la précédente).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, D une droite de E et H un supplémentaire de D. Alors H est un hyperplan.

▸***Démonstration.***

Notons $D = \mathrm{Vect}(a)$, $a \neq 0$.

Soit p la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à H.

Alors, pour tout x dans E, $p(x) \in \mathrm{Vect}(a)$ donc on dispose de $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ tel que $x = \varphi(x).a$. Montrons que $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, que $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$ et que $H = \ker(\varphi)$.

- Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. p est linéaire, donc $p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y)$. Ainsi,

$$\varphi(\lambda.x + y).a = \lambda\varphi(x).a + \varphi(y).a,$$

  donc $(a \neq 0)$ $\varphi(\lambda.x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.
- $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$ car $\varphi(a) = 1$
- On remarque que

$$H = \{x \in E,\ p(x) = 0_E\} = \{x \in E,\ \varphi(x).a = 0_E\} = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}\} = \ker(\varphi).$$

D'où le résultat désiré. ***QED◂***

Les propositions précédentes permettent de retrouver les résultats de géométrie de lycée. Une autre propriété importante était la suivante au lycée : les droites $x - 2y = 0$ et $2x - 4y = 0$ décrivent le même ensemble.

Propriété 39.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

►***Démonstration.***

En deux temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\ker(\varphi) = \ker(\psi) = H$, soit $a \notin H$. Alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. Or, **une application linéaire est uniquement déterminée par sa restriction à des s.e.v. supplémentaires.** Donc φ et ψ sont déterminées uniquement par leur image de a (elles sont nulles sur H).

Notons $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. Alors :

— $\forall x \in H,\ \psi(x) = \lambda\varphi(x)$,

— soit $x \in \mathrm{Vect}(a)$. On dispose de $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu a$. Alors $\psi(x) = \mu\psi(a) = \mu\lambda\varphi(a) = \lambda\varphi(x)$.

Donc $\psi = \lambda\varphi$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si l'on dispose de λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$, alors

$$\ker(\varphi) = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0_E\} \underbrace{=}_{\text{car } \lambda\neq 0} \{x \in E,\ \lambda\varphi(x) = 0\} = \{x \in E,\ \psi(x) = 0\} = \ker(\psi).$$

QED◄

2.6 Commutation et stabilisation

Définition 32.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un s.e.v. de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u stabilise F, ou que F est stable par u, si, et seulement si, $u(F) \subset F$.

Propriété 40.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

1. Les endomorphismes de E qui commutent avec u constituent un s.e.v. de $(\mathscr{L}(E), +, .)$ et un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \times)$; i.e. une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \times)$, lequel possède

toutes les évaluations des polynômes en u.

2. Les noyaux et les images des endomorphismes de E qui commutent avec u sont des s.e.v. stables par u : quel que soit $v \in \mathscr{L}(E)$, si $u \circ v = v \circ u$, alors u stabilise $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$.

►***Démonstration.***

1. Nommons $\mathcal{C}(u) \overset{\text{def.}}{=} \{v \in \mathscr{L}(E) \mid \ u \circ v = v \circ u\}$.
   - L'application $\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E),\ v \mapsto u \circ v - v \circ u$ est linéaire, donc son noyau, égal à $\mathcal{C}(u)$, est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$.
   - L'unité de l'anneau $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{C}(u)$ et pour tous $v, w \in \mathcal{C}(u)$, $u \circ v \circ w = v \circ u \circ w = v \circ w \circ u$, donc $u \circ (v \circ w) = (v \circ w) \circ u$, puis $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$.
2. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que $u \circ v = v \circ u$.
   - Soit $x \in \ker(v)$. Montrons que $u(x) \in \ker(v)$:

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v \circ u(x) \\ &= u \circ v(x) \text{ par commutativité} \\ &= u(v(x)) \\ &= u(0_E) \text{ car } x \in \ker(v) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

   donc $u(x) \in \ker(v)$, donc u stabilise $\ker(v)$.
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Montrons que $u(x) \in \mathrm{Im}(v)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(v)$, on écrit $y = v(x)$, où $x \in E$. Donc

$$\begin{aligned} u(y) &= u(v(x)) \\ &= v(u(x)) \text{ car } u \circ v = v \circ u, \end{aligned}$$

   donc $u(y) \in \mathrm{Im}(v)$, donc u stabilise $\mathrm{Im}(v)$.

QED◄

Propriété 41 (Jolie propriété HP, pour bien finir le chapitre).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Les seuls endomorphismes qui stabilisent toutes les droites sont les homothéties.
2. Si on suppose que tout s.e.v. de E admet un supplémentaire, alors les seuls $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathscr{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$ sont les homothéties.

►***Démonstration.***

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Déjà, « stabiliser toutes les droites » signifie que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$$

Si u est une homothétie, alors

$$\exists \lambda \in E,\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda.x,$$

donc u stabilise bien toutes les droites.

Réciproquement, si u stabilise toutes les droites, réécrivons la propriété en

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda_x.x$$

Notre but est de montrer que λ_x ne dépend pas de x !

Soit $x \in E$, non nul, fixé. On veut montrer que $\forall y \in E,\ \lambda_y = \lambda_x$. Soit $y \in E \setminus \{0_E\}$.

- si $y = \mu.x$, alors

$$u(y) = \begin{cases} \lambda_y.y = \lambda_y\mu.x \text{ par hypothèse.} \\ u(\mu.x) = \mu\lambda_x.x \text{ car } y = \mu x \end{cases}$$

Par égalité de ces deux expressions et comme $x \neq 0_E$, $\lambda_y = \lambda_x$.

- si y n'est pas colinéaire à x, alors

$$u(x+y) = \begin{cases} u(x)+u(y) = \lambda_x.x+\lambda_y.y \text{ par linéarité} \\ \\ \lambda_{x+y}(x+y) \text{ par hypothèse} \end{cases}$$

  Mais la famille (x, y) est libre et

$$\lambda_x.x+\lambda_y.y = \lambda_{x+y}.x+\lambda_{x+y}.y,$$

  donc $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc, au final, $\forall y \in E \setminus \{0_E\},\ \lambda_y = \lambda_x$. L'égalité est toujours vraie pour $y = 0$, donc on peut conclure que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall y \in E,\ u(y) = \lambda y,$$

i.e. u est une homothétie !

2. Comme

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathscr{L}(E),\ \lambda \mathrm{Id}_E \circ v = v \circ \lambda \mathrm{Id}_E,$$

les homothéties sont bien solutions du problème.

Soit maintenant $u \in \mathscr{L}(E)$, telle que $\forall v \in \mathscr{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.

Montrons que u stabilise toutes les droites.

Soit D une droite de E, soit F un supplémentaire de D dans E et p la projection sur D parallèlement à F.

Alors $D = \mathrm{Im}(p)$. Or, par hypothèse, $u \circ p = p \circ u$ donc u stabilise $\mathrm{Im}(p) = D$.

Donc u stabilise toutes les droites donc, par le point précédent, u est une homothétie.

QED◀

DEBUT ↖