

ADS : nombre d'or et tournesols

Consignes générales

- temps minimal de préparation : 2h.
- vous devez lire l'article, le comprendre dans les grandes lignes, afin de **restituer** les idées importantes de l'article. Certains résultats peuvent être prouvés, ou, du moins, les idées des preuves doivent être données.
- votre présentation doit être faite **sur papier blanc, orientation paysage** (avec de feutres, en format paysage), ou bien en pdf (avec PowerPoint – ou version libre de PowerPoint, KeyNote ou Beamer).
- faire moins de 10 pages/slides, avec peu de texte dessus.
- l'oral durera 15 minutes : il s'agira de présenter ce que vous avez compris de l'article.

Consignes particulières

- c'est un sujet qui mélange modélisation et mathématiques : la partie modélisation est une des **plus importantes**
- il faut, bien sûr, développer certains aspects mathématiques, mais en les choisissant bien précisément
- il est inutile de présenter tous les calculs, on ne les suivra pas. En revanche, certains points de preuves sont à détailler si besoin.

Nombre d'or et tournesol

Xavier Caruso

Octobre 2005

Résumé

On observe que les graines d'un tournesol ont une répartition très particulière ; par exemple, deux graines consécutives sont espacées d'un angle polaire constant environ égal à $2\pi\varphi$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Dans cet article, on montre (dans une certaine limite) que cet observation est compatible avec une loi d'optimisation qui stipule que les graines du tournesol ont tendance à se positionner de façon à minimiser la place occupée par les interstices qui les séparent.

Mots-clés : fractions continues, constante de Markov, phyllotaxie

Table des matières

1	Notations et modélisation du problème	2
2	Préliminaires mathématiques	3
2.1	Rappel d'analyse élémentaire	3
2.2	Les fractions continues	4
2.3	Fractions continues et nombre d'or	5
3	Étude asymptotique de la répartition des graines	6
3.1	Étude pour une suite r_n particulière	6
3.2	Étude dans un cas plus général	9
3.3	Un mot sur les spirales	11
4	Quelques expériences numériques	12
4.1	Lorsque $\alpha = \varphi$	12
4.2	Lorsque $\alpha = \sqrt{2}$	15
4.3	Lorsque $\alpha = \sqrt{3}$	16
5	Conclusion	17

Il est bien connu que la répartition des graines de tournesol a quelque chose d'exceptionnel : elles semblent s'enrouler sur deux séries de spirales reliant le centre (appelé l'*apex*) aux extrémités de la fleur et orientées dans des directions transverses. Si on compte ces spirales, on constate que leurs nombres dans chacune des directions sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci définie ainsi :

$$F_0 = 0 \quad ; \quad F_1 = 1 \quad ; \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Le but de cette note est de donner des indications purement mathématiques pour expliquer cette répartition. Celles-ci sont fondées sur certaines hypothèses simples et que nous espérons naturelles. Les principales stipulent que les graines ont toutes la même taille, que deux graines successives (c'est-à-dire nées l'une après l'autre) sont espacées d'un angle polaire $2\pi\alpha$ constant et que la croissance de

la fleur tend à maximiser le nombre de graines disposées sur une surface d'aire fixée. Ces hypothèses ne sont certainement pas vraies au sens strict, mais des mesures effectuées par Auguste et Louis Bravais semblent les confirmer (au moins d'un point de vue asymptotique, dans la pratique très rapidement atteint). En outre, ces deux auteurs constatent que la constante α (définie à un entier près) a pour valeur $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire le nombre d'or.

Dans ce texte, nous nous proposons de présenter et peut-être de poursuivre sur certains points une étude due à H. Vogel (voir [6]) qui fournit un début de justification mathématique à l'expression de α . De celle-ci découle simplement, comme nous allons le voir, *via* la théorie des fractions continues, la première propriété concernant les spirales et la suite de Fibonacci.

La première section fixe les notations et définit mathématiquement le problème étudié. La seconde partie est consacrée à des rappels mathématiques de certaines notions qui vont être couramment utilisées par la suite.

Dans la troisième partie, on entreprend une étude asymptotique qui parvient à des résultats précis, toutefois un peu en dessous de nos premiers espoirs : en particulier, on ne parvient pas à justifier la valeur exacte de α , mais plutôt qu' α doit être parmi un ensemble restreint (mais hélas encore infini) de valeurs parmi lesquelles figure le nombre d'or... et encore nous obtenons ce résultat sous une hypothèse supplémentaire qu'il ne paraît pas facile d'éviter.

Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances sur le sujet pourra se reporter à [5] (livre beaucoup moins orienté vers les mathématiques), ainsi qu'à sa volumineuse bibliographie.

Je profite de ces quelques lignes pour exprimer mes amples remerciements à Yves Duval qui a relu de nombreuses fois ce texte en profondeur, et a émis de multiples propositions pour en améliorer la qualité.

1 Notations et modélisation du problème

Tout au long de cet article, on travaillera dans le plan complexe : on suppose que l'apex et les graines se répartissent dans ce plan, que l'apex est situé à l'origine et on désigne par $z_1, \dots, z_N$ les affixes des positions des N graines. On convient que les indices sont classés par ordre chronologique inversé : les graines proches de l'apex, qui sont plus « jeunes », sont numérotées avec les petits indices, alors que les plus « âgées » (qui par le fait ont eu le temps de migrer et donc de se rapprocher de la périphérie de la fleur) sont numérotées avec les grands indices.

L'hypothèse donnée dans l'introduction se traduit mathématiquement sous la forme :

$$z_n = r_n \exp(2i\pi n\alpha) \tag{1}$$

où (r_n) est une suite de réels que l'on supposera par la suite croissante. Notons à présent r le rayon d'une graine, supposé constant. Il est une condition immédiate sur la suite (z_n) qui traduit que deux graines ne peuvent pas s'interpénétrer, à savoir :

$$|z_n - z_m| \geq 2r \tag{2}$$

pour tous entiers $n \neq m$.

Notre but est de déterminer simultanément la valeur de α et « la plus petite¹ » suite (r_n) qui satisfait la condition (2). Évidemment, il n'est pas du tout clair (et sûrement faux) que cette plus petite suite existe effectivement. Nous verrons cependant que l'adoption d'un point de vue asymptotique permet de clarifier la situation.

¹Il s'agit bien de celle pour laquelle les graines sont le plus près possible de l'apex, et donc qui minimise l'espace total occupé par la fleur.

Signalons tout de suite que si l'on n'impose *aucune* condition sur la placement des graines, alors le problème d'optimisation de l'espace est entièrement résolu. La meilleure configuration revient à paver le plan par des triangles équilatéraux isométriques et à placer les graines aux sommets de ces triangles. Le rapport de l'aire totale sur l'aire occupée par les graines est alors (asymptotiquement) de $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Le lecteur pourra vérifier que pour la solution que nous allons développer en 3.1, ce rapport n'est que de $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$.

2 Préliminaires mathématiques

Les prérequis mathématiques sont de deux types : il s'agit d'une part d'analyse élémentaire (notations o , O , $\liminf$, $\limsup$ principalement), et d'autre part des fractions continues.

2.1 Rappel d'analyse élémentaire

On considère (u_n) une suite de réels. On rappelle qu'une *valeur d'adhérence* de (u_n) est par définition la limite d'une suite extraite convergente de (u_n) . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et elle en admet une unique si, et seulement si elle converge.

On appelle *limite inférieure* de (u_n) et on note $\liminf_n u_n$ (ou parfois seulement $\liminf u_n$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'indice) la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des valeurs d'adhérence (on peut montrer qu'elle est elle-même une valeur d'adhérence). De même, on appelle *limite supérieure* de (u_n) et on note $\limsup_n u_n$ (ou seulement $\limsup u_n$), la borne supérieure des valeurs d'adhérence. On a évidemment :

$$\liminf u_n \leq \limsup u_n$$

et l'égalité a lieu si, et seulement si la suite (u_n) converge : la limite est alors la valeur commune de $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$.

Concentrons-nous à présent sur les notations de Landau : o et O . Par définition² si (u_n) est une suite, le symbole $o(u_n)$ (resp. $O(u_n)$) désigne l'ensemble des suites de la forme $\varepsilon_n u_n$ où (ε_n) est une suite qui tend vers 0 (resp. une suite bornée). Lors des manipulations, il est d'usage d'utiliser des signes d'égalité au lieu de signes d'appartenance. Par exemple, on écrira plus couramment $u_n = o(1/n)$ que $u_n \in o(1/n)$ pour dire que u_n est négligeable devant $\frac{1}{n}$. De même :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(v_n)$$

signifie qu'il existe une suite (ε_n) bornée et une suite (ε'_n) tendant vers 0 telles que :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n^2} + \varepsilon'_n v_n.$$

Bien que cela se fasse moins couramment, on constate qu'il n'y a aucun problème à combiner l'utilisation des o , O avec celle des inégalités. Ainsi, par exemple, la formule :

$$u_n \leq \ell + o(1)$$

a un sens très clair. Elle signifie qu'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n \leq \ell + \varepsilon_n$. On pourra constater que cela est équivalent à l'inégalité $\limsup u_n \leq \ell$.

²En général, on ne demande que la condition soit satisfaite qu'à partir d'un certain rang. Toutefois, pour ce papier, la définition plus contraignante que l'on donne nous suffira.

2.2 Les fractions continues

On se contente de rappeler les résultats classiques de la théorie dans ce paragraphe. Pour de nombreux compléments, et en particulier les démonstrations des théorèmes, le lecteur pourra se reporter au premier chapitre de [1]. Pour une étude plus approfondie de la constante de Markov, il pourra également consulter [2].

La théorie des fractions continues permet de décomposer un irrationnel x sous la forme :

$$x = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_i + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

pour des entiers $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_i \geq 1$ pour $i \geq 1$. Nous avons supposé x irrationnel pour que l'écriture de la fraction soit infinie ; si ce n'est pas le cas, la suite des (n_i) prend fin au bout d'un certain rang.

L'existence de cette décomposition, si elle n'est pas si simple à établir, s'imagine facilement : la fraction restante après retrait du n_0 prend sa valeur dans l'intervalle $]0, 1[$, d'où on déduit que n_0 est nécessairement la partie entière de x . La connaissance de n_0 permet de calculer le nombre :

$$\frac{1}{x - n_0} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_i + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

et par suite de déterminer de même que précédemment l'entier n_1 . De proche en proche, on accède à la valeur de chacun des n_i . La suite des (n_i) ainsi obtenue est uniquement déterminée et s'appelle le *développement en fraction continue* de x .

La fraction obtenue en interrompant le développement à n_i , c'est-à-dire :

$$\frac{p_i}{q_i} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_i}}}}}$$

(où p_i et q_i sont premiers entre eux et $q_i > 0$) est appelée la *i-ième réduite* (ou parfois le *i-ième convergent*) de x . Le premier résultat de la théorie est la convergence de la suite de terme général $\frac{p_i}{q_i}$ vers x . Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1. Avec les notations précédentes, pour tout i :

$$\left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

On montre facilement que $q_i \geq F_i$ où la suite (F_i) est la suite de Fibonacci définie dans l'introduction de cette note. Ainsi le théorème assure non seulement que la suite des $\frac{p_i}{q_i}$ converge vers x , mais qu'elle converge très rapidement puisque que l'on sait que F_i croît de façon exponentielle (précisément en φ^i). Un deuxième fait remarquable lié à ce théorème est qu'il admet une réciproque partielle qui s'énonce ainsi :

Théorème 2. Soit x un nombre irrationnel. Si p et q sont des entiers vérifiant :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

alors la fraction $\frac{p}{q}$ figure parmi les réduites de x .

Il faut comprendre dans cette réciproque que les réduites successives de x fournissent des approximations rationnelles du réel x qui sont en un sens les meilleures possibles. Les réduites successives de π sont par exemple 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, etc. : on retrouve la valeur $\frac{22}{7}$ qui est connue depuis longtemps pour être très proche de π .

2.3 Fractions continues et nombre d'or

On rappelle que par définition le nombre d'or est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il est solution de l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$ et donc en particulier :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Cette dernière égalité permet de déterminer le développement en fraction continue de φ puisque comme $\varphi > 1$, elle montre que $n_0 = 1$ et que les n_i suivants s'obtiennent à nouveau en développant φ en fraction continue. Au final, on a :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

d'où on déduit que la i -ième réduite prend la forme $\frac{F_{i+1}}{F_i}$. En particulier $q_i = F_i$ et donc l'approximation donnée par le théorème 1 est la moins bonne à laquelle on puisse s'attendre. Cette propriété de « mauvaise approximation par les rationnels » va être cruciale pour la suite de l'exposé, et c'est elle que nous détaillons à présent.

Si x est un réel et $\frac{p_i}{q_i}$ sont ses réduites successives, on définit les a_i par :

$$\left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{a_i}{q_i^2} \quad \text{soit} \quad a_i = q_i |q_i x - p_i|.$$

Si x n'admet pas de i -ième réduite (ce qui peut arriver si x est rationnel), on définit simplement $a_i = 0$. On a évidemment $a_i \geq 0$ et par le théorème 1, on a aussi $a_i \leq 1$. Le réel $\mu = \liminf a_i$, appelé *constante de Markov* de x , caractérise en un sens la qualité de l'approximation de x par ses réduites successives (et donc plus généralement par les rationnels) : plus il est petit, meilleure est l'approximation. Voici un merveilleux théorème à son sujet :

Théorème 3. Avec les notations précédentes, on a toujours $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ et l'égalité ne se produit que si la suite (n_i) stationne en 1.

En outre, si $\mu < \frac{1}{\sqrt{5}}$, alors $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Un réel x pour lequel la suite des (n_i) stationne en 1 est dit *équivalent* à φ . Les nombres équivalents à φ sont exactement ceux de la forme $\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$ pour des entiers a, b, c et d vérifiant $|ad - bc| = 1$. Le théorème 3 donne un sens précis à la phrase : « le nombre d'or³ est celui qui est le moins bien approché par les rationnels ».

³Ou plus exactement, les nombres équivalents au nombre d'or.

3 Étude asymptotique de la répartition des graines

On reprend désormais les notations et la problématique expliquées en 1. On suppose cependant que la suite (z_n) n'est pas définie seulement pour $n \leq N$ mais pour tout entier n : le nombre de graines dans un tournesol étant important, l'infini apparaît comme une approximation réaliste de N .

Puisque l'on s'intéresse aux n grands, on remplace la condition (2) par :

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| \geq 2r. \quad (3)$$

Notez que cette condition n'est plus la conséquence du fait que toutes les graines ont une même taille, mais du fait que celles-ci croissent en s'éloignant de l'apex jusqu'à atteindre une certaine taille fixée (en l'occurrence un disque de rayon r). En un sens donc, cette nouvelle condition semble plus proche de la réalité que ne l'était l'équation (2).

3.1 Étude pour une suite r_n particulière

Pour ce paragraphe, nous faisons une hypothèse supplémentaire. Nous *tenterons* de l'éliminer par la suite (ou du moins la remplacerons par une hypothèse plus faible), mais traiter d'abord ce cas particulier simplifie l'exposition et la compréhension. Nous supposons donc à partir de maintenant que $r_n = c\sqrt{n}$ pour une certaine constante $c > 0$. Cette hypothèse peut paraître farfelue, mais il n'en est rien : elle est compatible avec le fait que le nombre de graines par unité de surface dans le tournesol est quasiment constant ; en effet, avec ce choix de r_n , le nombre de graines situées dans le disque de centre l'apex et de rayon R est proportionnel à R^2 et donc à la surface du disque.

Quelques réductions

Nous voulons à présent évaluer $\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m|$. Afin d'utiliser le plus rigoureusement possible les notations de Landau, nous aurons besoin de la propriété suivante dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur :

Propriété 4. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| = \inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$$

où la notation « $\inf_{(n_k), (m_k)}$ » signifie que l'on considère l'infimum sur tous les couples de suites d'entiers naturels (n_k) et (m_k) vérifiant l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad \lim n_k = +\infty \quad \text{et} \quad n_k \neq m_k \text{ pour tout } k.$$

On souhaite désormais étudier la quantité $\inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$, et pour cela il nous faut commencer par établir deux restrictions données par les lemmes suivants :

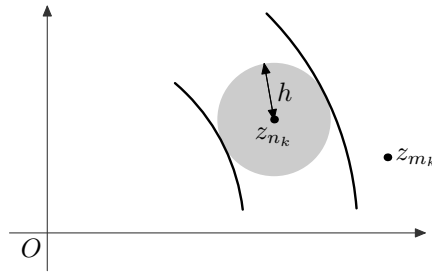
Lemme 5. *La quantité $\inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$ est la même que l'on prenne l'infimum sur toutes les suites vérifiant (H) ou seulement sur celles pour lesquelles on a en plus $m_k = n_k + O(\sqrt{n_k})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toutes suites (n_k) et (m_k) vérifiant (H), il existe (n'_k) et (m'_k) vérifiant (H), la condition du lemme et :

$$\liminf_k |z_{n'_k} - z_{m'_k}| \leq \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|.$$

Si $\liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}| = +\infty$, il n'y a rien à faire. Sinon, on considère $h > \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$.

Définissons $d_k = m_k - n_k$. Si $|c\sqrt{m_k} - c\sqrt{n_k}| \geq h$, ce qui se produit dès que $|d_k| \geq 2\frac{h}{c}\sqrt{n_k} + \frac{h^2}{c^2}$, alors le point d'abscisse z_{m_k} est à l'extérieur de la partie limitée par les deux cercles esquissés en gras sur la figure suivante :



Il est donc en particulier à l'extérieur de la région grisée, ce qui assure $|z_{n_k} - z_{m_k}| \geq h$. En vertu de ceci, les suites (n'_k) et (m'_k) obtenues en extrayant les termes des suites (n_k) et (m_k) pour lesquels $|d_k| < 2\frac{h}{c}\sqrt{n_k} + \frac{h^2}{c^2}$ sont infinies et répondent à la question. $\square$

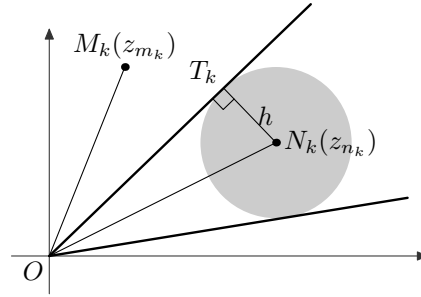
Lemme 6. *La quantité $\inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$ est la même que l'on prenne l'infimum sur toutes les suites vérifiant (H) ou seulement sur celles pour lesquelles on a en plus $\delta_k = O(1/\sqrt{n_k})$, où par définition δ_k est la distance de $(m_k - n_k)\alpha$ à l'entier le plus proche.*

Démonstration. Comme pour le lemme précédent, il suffit de montrer que pour toutes suites (n_k) et (m_k) vérifiant (H), il existe (n'_k) et (m'_k) vérifiant (H), la condition du lemme et :

$$\liminf_k |z_{n'_k} - z_{m'_k}| \leq \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|.$$

On peut supposer $\liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}| < +\infty$ et on choisit un $h > \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$.

Comme n_k tend vers l'infini, on peut supposer quitter à supprimer les premiers termes des suites (n_k) et (m_k) , ce qui ne modifie pas la valeur de h , que $n_k \geq 2h^2$ pour tout k . Si le point d'affixe z_{m_k} est situé à l'extérieur du secteur angulaire représenté en gras sur la figure suivante :



il ne peut être dans la zone grisée et donc $|z_{n_k} - z_{m_k}| \geq h$. L'angle non orienté $\widehat{M_k O N_k}$ vaut $2\pi\delta_k$. Ainsi si $2\pi\delta_k \geq \widehat{T_k O N_k}$, on a $|z_{n_k} - z_{m_k}| \geq h$. Les suites (n'_k) et (m'_k) obtenues en extrayant les termes des suites (n_k) et (m_k) pour lesquels $\delta_k < \frac{1}{2\pi} \cdot \widehat{T_k O N_k}$ conviennent grâce à l'estimation $\widehat{T_k O N_k} = \arcsin(\frac{h}{c\sqrt{n_k}}) = O(1/\sqrt{n_k})$. $\square$

En regroupant les preuves des deux lemmes précédents, on obtient la proposition suivante :

Proposition 7. *La quantité $\inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|$ est la même que l'on prenne l'infimum sur toutes les suites vérifiant (H) ou seulement sur celles pour lesquelles on a en plus $m_k = n_k + O(\sqrt{n_k})$ et $\delta_k = O(1/\sqrt{n_k})$, où par définition δ_k est la distance de $(m_k - n_k)\alpha$ à l'entier le plus proche.*

Calcul de la meilleure constante c

On considère désormais des suites (n_k) et (m_k) vérifiant les hypothèses de la proposition 7. On définit $d_k = m_k - n_k$ et δ_k comme dans la proposition. On obtient facilement :

$$\frac{1}{c^2} |z_{n_k} - z_{m_k}|^2 = n_k \left(1 - \sqrt{1 + \frac{d_k}{n_k}} \right)^2 + 2n_k \sqrt{1 + \frac{d_k}{n_k}} (1 - \cos(2\pi\delta_k)).$$

Comme $\frac{d_k}{n_k}$ et δ_k sont des $O(1/\sqrt{n_k})$ et tendent donc vers 0, on déduit :

$$\frac{1}{c^2}|z_{n_k} - z_{m_k}|^2 = n_k \left(\frac{d_k}{2n_k} + o\left(\frac{d_k}{n_k}\right) \right)^2 + 2n_k(1 + o(1))(2\pi^2\delta_k^2 + o(\delta_k^2)).$$

Le terme $o(d_k/n_k)$ est un $o(1/\sqrt{n_k})$ et de même le terme $o(\delta_k^2)$ est un $o(1/n_k)$. Au final, on a la simplification :

$$|z_{n_k} - z_{m_k}|^2 = c^2 \left[\frac{d_k^2}{4n_k} + 4\pi^2 n_k \delta_k^2 \right] + o(1). \quad (4)$$

On fait une disjonction de cas. Tout d'abord on suppose que $\delta_k \geq \frac{1}{2d_k}$. On obtient alors :

$$|z_{n_k} - z_{m_k}|^2 \geq c^2 \left[\frac{d_k^2}{4n_k} + \frac{\pi^2 n_k}{d_k^2} \right] + o(1) \geq \pi c^2 + o(1).$$

Supposons maintenant $\delta_k < \frac{1}{2d_k}$. Notons c_k l'entier (ou l'un des entiers) le plus proche de $d_k\alpha$. On a alors $\delta_k = |d_k\alpha - c_k|$ et donc :

$$\left| \alpha - \frac{c_k}{d_k} \right| = \frac{\delta_k}{d_k} < \frac{1}{2d_k^2}.$$

On en déduit, par le théorème 2, que la fraction $\frac{c_k}{d_k}$ est une réduite de α , disons $\frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}$. Comme la fraction $\frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}$ est irréductible, d_k est un multiple de q_{i_k} . On retiendra simplement $d_k \geq q_{i_k}$. Soit a_{i_k} le réel défini par $|\alpha - \frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}| = \frac{a_{i_k}}{q_{i_k}^2}$ déjà considéré dans le théorème 3. On a :

$$\delta_k = \frac{d_k a_{i_k}}{q_{i_k}^2} \geq \frac{a_{i_k}}{d_k}$$

d'où on déduit :

$$|z_{n_k} - z_{m_k}|^2 \geq c^2 \left[\frac{d_k^2}{4n_k} + \frac{4\pi^2 n_k a_{i_k}^2}{d_k^2} \right] + o(1) \geq 2\pi a_{i_k} c^2 + o(1).$$

On rappelle que l'on avait posé $\mu = \liminf_i a_i$ et que le théorème 3 annonçait $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. On aimerait conclure que :

$$\liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}|^2 \geq \min(\pi c^2, 2\pi \mu c^2) = 2\pi \mu c^2 \quad (5)$$

mais on a besoin pour cela du lemme suivant⁴ :

Lemme 8. *On suppose α irrationnel. S'il existe une infinité de k pour lesquels on est dans le second cas (i.e. $\delta_k < \frac{1}{2d_k}$), alors la suite infinie des i_k ainsi formée tend vers $+\infty$.*

Démonstration. La suite de rationnels $\frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}$ converge vers α qui est irrationnel. Par un argument classique, cela implique que q_{i_k} tend vers $+\infty$, ce qui n'est possible que si i_k tend lui aussi vers $+\infty$. $\square$

Théorème 9. *La constante α étant fixée, la plus petite constante c pour laquelle la répartition des graines vérifie la condition (3) est :*

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{r}{\sqrt{\mu}}$$

où μ est la constante de Markov associée à α . En particulier, si $\mu = 0$, il n'y a aucune constante c convenable.

⁴On laisse au lecteur le soin de comprendre comment ce lemme implique l'inégalité donnée.

Remarque. Lorsque α est rationnel, on a bien $\mu = 0$ et donc aucune constante c ne convient. Il est assez facile de vérifier ce résultat indépendamment de ce qui précède.

Démonstration. Montrons tout d'abord que :

$$\inf_{(n_k), (m_k)} \liminf_k |z_{n_k} - z_{m_k}| = c\sqrt{2\pi\mu}$$

où l'infimum est pris sur les suites (n_k) et (m_k) vérifiant les conditions de la proposition 7. L'inégalité (5) donne la partie « $\geq$ » du résultat. Pour conclure, il suffit de construire des suites (n_k) et (m_k) pour lesquelles la liminf précédente vaut $c\sqrt{2\pi\mu}$. Les calculs effectués précédemment donnent des indications très claires quant aux suites à considérer. Pour que toutes les majorations faites soient des égalités, il faut imposer d'une part $d_k = q_k$ et d'autre part $\frac{d_k^2}{4n_k} = \frac{4\pi^2 n_k a_k^2}{d_k^2}$ (on a ici, $i_k = k$), ce qui fournit :

$$n_k = \frac{q_k^2}{4\pi a_k} \quad \text{et} \quad m_k = \frac{q_k^2}{4\pi a_k} + q_k.$$

Ces nombres ne sont certainement pas entiers, mais on les remplace par les entiers les plus proches. On laisse au lecteur le soin de reprendre les calculs précédents pour vérifier que la liminf obtenue avec ces suites est bien $c\sqrt{2\pi\mu}$. Ceci démontre l'égalité annoncée.

Par la propriété 4, on a aussi :

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| = c\sqrt{2\pi\mu}. \quad (6)$$

La condition (3) dit exactement que ce dernier nombre doit être supérieur ou égal à $2r$, ce qui donne la minoration :

$$c \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{r}{\sqrt{\mu}}$$

et conclut la preuve du théorème. □

Corollaire 10. *La plus petite constante c possible (et donc la plus petite suite r_n possible parmi celles considérées pour ce paragraphe) est obtenue pour les α équivalents à φ . On a alors $c = \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{\pi}} \cdot r$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des théorèmes 3 et 9. □

Remarque. Il apparaît de temps à autre dans la nature (et aussi parfois pour les tournesols) la suite dite *anormale* dont les premiers termes sont 1, 3, 4, 7, 11, 18, etc. : elle vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci, mais les conditions initiales sont différentes. Cette constatation est en parfait accord avec le corollaire précédent, puisque les termes de cette suite sont exactement les dénominateurs⁵ des réduites successives de $\frac{1}{2+\varphi}$. Notez que la fraction $\frac{1}{1+\varphi}$ (*a priori* plus « simple » que $\frac{1}{2+\varphi}$) admet des réduites qui ont encore pour dénominateurs les nombres de la suite de Fibonacci.

3.2 Étude dans un cas plus général

Dans ce paragraphe, on ne suppose plus que r_n est de la forme particulière $c\sqrt{n}$ pour une constante $c > 0$, et on se propose de traiter le même problème : trouver « la plus petite » suite (r_n) qui satisfait la condition (3). Auparavant le sens de « la plus petite » était clair, puisque pour comparer deux suites (r_n) , il suffisait de comparer les c correspondants. Ce n'est plus aussi simple désormais, et c'est le premier point que nous voulons préciser.

⁵Ces dénominateurs correspondent au nombre de spirales que l'on observe couramment. Voir paragraphe 3.3.

Dépendance en $\sqrt{n}$

L'hypothèse (3) est équivalente au fait que les graines ont un rayon qui tend vers r lorsque n tend vers l'infini. D'après le théorème de Césaro, la moyenne des carrés des rayons converge vers r^2 et donc l'aire de la surface occupée par les n premières graines admet un développement limité de la forme $n\pi r^2 + o(n)$. Comme ces n graines doivent loger dans un disque de rayon $r_n + r$, il vient :

$$\pi(r_n + r)^2 \geq n\pi r^2 + o(n)$$

soit encore :

$$r_n \geq r\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

D'autre part, en 3.1, on a construit un α (en l'occurrence $\alpha = \varphi$) et une suite (r_n) définie par $r_n = \ell r\sqrt{n}$ (avec $\ell = \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{\pi}}$) convenables. Ces deux encadrements suggèrent qu'une suite (r_n) optimale doit être comparable à $\sqrt{n}$, et nous incitent à définir la suite (u_n) par l'égalité $r_n = u_n\sqrt{n}$. On a alors :

$$u_n \geq r + o(1). \quad (7)$$

« La plus petite suite (r_n) »

Il est temps de préciser le sens de « la plus petite suite (r_n) » que l'on utilisera par la suite. Au vu de ce qui précède, il semble qu'un invariant numérique qui rende compte de la taille de (r_n) est relié au comportement asymptotique de la suite (u_n) . Nous utiliserons la grandeur $\limsup u_n$, ce qui signifie que nous allons chercher les suites (r_n) pour lesquelles $\limsup u_n$ est minimal. Cela revient à chercher les configurations infinies de graines qui minisent la surface occupée lorsque l'on se restreint aux N premières graines *pour tout* N suffisamment grand.

Une hypothèse supplémentaire

On aimerait reprendre le calcul de la partie *Calcul de la meilleure constante c* de 3.1, mais on a besoin pour cela d'une estimation de r_n et d'un développement limité en $o(1/n)$ de la quantité $\frac{r_{n+1}}{r_n}$.

Commençons par la suite (r_n) . On sait, pour l'avoir construit en 3.1, qu'il existe un α et une suite (r_n) convenables pour lesquels $\limsup u_n = \ell r$ avec toujours $\ell = \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{\pi}}$. Puisque l'on cherche à minimiser $\limsup u_n$, on pourra toujours supposer par la suite que :

$$u_n \leq r\ell + o(1). \quad (8)$$

Combiné avec l'inégalité (7), cela assure que la suite (u_n) est bornée. Informellement, un calcul numérique donne $\ell \simeq 1,1931$, d'où on constate que ℓ est proche de 1 et puis que la suite u_n reste confinée aux alentours de r (avec une déviation qui ne dépasse pas asymptotiquement 20%).

Passons à $\frac{r_{n+1}}{r_n}$. Il ne semble pas évident d'obtenir une estimation comme on la souhaite pour le précédent quotient. La solution la plus simple que nous ayons trouvée consiste à ajouter l'hypothèse suivante :

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \leq 1 + \frac{m}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

où $m < \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$ est une constante. La majorant que l'on vient d'écrire pour m peut paraître étrange à ce niveau de l'exposé ; il ne semble pas avoir de signification physique particulière, c'est simplement celui qui fera fonctionner les calculs à venir. Au niveau du tournesol, cette hypothèse interdit grosso modo à la fleur de trop espacer ses graines pendant un moment, ce qui pourrait lui permettre de les resserrer par la suite et d'ainsi gagner de la place.

La conclusion

Une adaptation immédiate des arguments de la démonstration du théorème 9 permet d'aboutir à la proposition suivante :

Proposition 11. *Avec les notations et les hypothèses précédentes, on a :*

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| \leq r\ell\sqrt{2\pi\mu m} = 2r\sqrt{\frac{\mu m}{\mu_0}}.$$

où $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Remarque. On peut montrer que si (n_k) et (m_k) sont deux suites vérifiant les conditions de la proposition 7, alors :

$$\frac{r_{m_k}}{r_{n_k}} \geq 1 + \frac{d_k}{2n_k} + o\left(\frac{d_k}{n_k}\right)$$

ce qui permet, par des arguments analogues (mais parfois un peu plus raffinés) à ceux utilisés en 3.1, de prouver la minoration :

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| \geq r\sqrt{2\pi\mu}.$$

Corollaire 12. *Sous la condition (9), la plus petite valeur possible pour $\limsup u_n$ est obtenue pour les α équivalents à φ .*

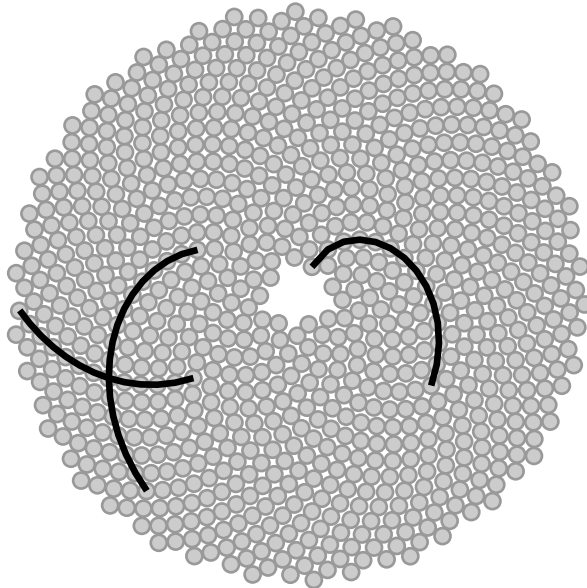
Démonstration. Il suffit de montrer que l'inégalité de la proposition 11 implique $\mu = \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ou encore $\mu > \frac{1}{\sqrt{8}}$ (ce qui revient au même d'après le théorème 3). Supposons le contraire. Alors $\frac{\mu m}{\mu_0} < 1$ et donc :

$$\liminf_n \inf_{m \neq n} |z_n - z_m| < 2r$$

ce qui est en contradiction avec la condition (3). □

3.3 Un mot sur les spirales

Voici une figure sur laquelle on a réparti les graines de tournesol selon la formule $z_n = c\sqrt{n} \exp(2i\pi\varphi n)$ étudiée en 3.1 :



La constante c est choisie égale à ℓ : c'est la valeur optimale donnée par le théorème 9. On constate sans mal que les graines ne s'interpénètrent pas, tout en étant très proche les unes des autres. Également, les spirales mentionnées dans l'introduction apparaissent effectivement assez clairement sur le dessin : trois d'entre elles ont été repassées en gras pour vous aider à les visualiser.

La formation de ces spirales est facile à expliquer après les calculs de la partie 3.1. En effet, notre vision a tendance à associer une graine avec celles qui lui sont le plus proches. Or, on a vu dans la preuve du théorème 9 que si n est de l'ordre de $N_i = \frac{F_i^2}{4\pi a_i}$, alors la n -ième graine a pour plus proches voisines les $(n + F_i)$ et $(n - F_i)$ -ièmes graines. Ainsi, toujours pour n de l'ordre de N_i , on a tendance à associer les graines dont les rangs sont congrus modulo F_i . Il est alors tout naturel que l'on distingue F_i courbes, qui s'avèrent de surcroît ressembler à des spirales⁶.

La partie de la phrase « pour n de l'ordre de N_i » a une importance à souligner. Elle explique pourquoi les spirales représentées sur le dessin précédent semblent se localiser soit dans la partie centrale du tournesol, soit plus à la périphérie. En effet, à l'intérieur de chacune de ces parties n est de l'ordre de grandeur du même N_i (ou plus exactement du même couple (N_i, N_{i+1})), mais ce n'est plus le cas lorsque l'on passe d'une zone à l'autre. Il semble ainsi y avoir un saut plus ou moins brutal qui correspond au changement d'ordre de grandeur.

Utilisant les approximations⁷ $F_i \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^i$ et $a_i \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}$, on est conduit à :

$$N_i \simeq \frac{\varphi^{2i}}{4\pi\sqrt{5}}.$$

En inversant cette formule, on obtient l'heuristique suivante qui fonctionne très bien en pratique : si on regarde aux alentours de la n -ième graine (c'est-à-dire à une distance de l'ordre de $\ell r\sqrt{n}$ de l'apex) et si i et $i + 1$ sont les deux entiers qui encadrent le réel $\frac{\log(4\pi\sqrt{5}n)}{2\log\varphi}$ alors on apercevra F_i spirales enroulées dans une direction et F_{i+1} dans une direction transverse.

4 Quelques expériences numériques

On conserve les notations de la section 1, et on définit à nouveau la suite (u_n) par l'égalité $r_n = u_n\sqrt{n}$. Jusqu'alors, nous avons imposé la distance minimale (asymptotique) entre deux graines, et nous avons cherché « la plus petite » suite (r_n) et la constante α associée qui permettaient d'obtenir une disposition satisfaisant la contrainte (3). Évidemment, il revient au même d'imposer la « taille » de la suite (r_n) , c'est-à-dire pour ce qui nous concerne $\limsup u_n$, et de maximiser la quantité :

$$\liminf_n \inf_m |z_n - z_m|.$$

Pour cette section, nous préférons traiter le problème dans cette nouvelle formulation. On imposera toujours $\limsup u_n = 1$.

On constatera par ailleurs sur tous les graphiques de cette section que, si N désigne le nombre de graines du tournesol, la qualité de l'approximation « $N = \infty$ » est excellente dès que N dépasse 3 000 et très bonne bien avant.

4.1 Lorsque $\alpha = \varphi$

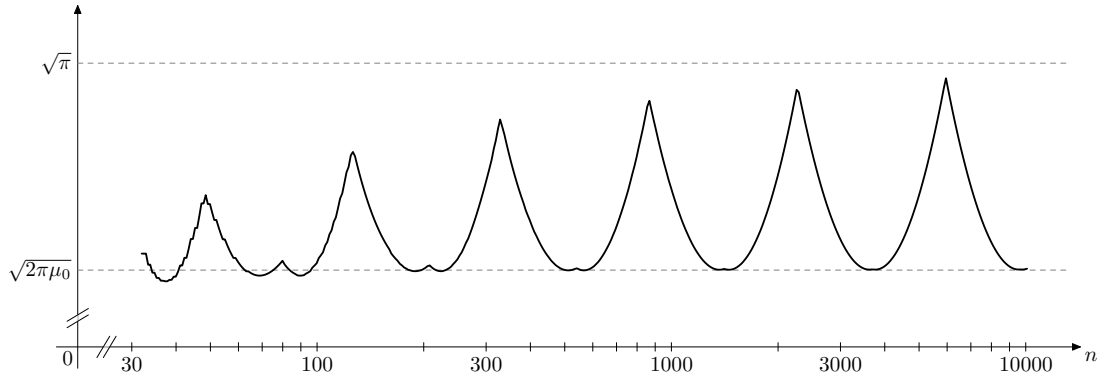
Comme le titre l'indique, dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'au cas $\alpha = \varphi$. La question qui nous motive est la suivante : la répartition donnée par le théorème 9 (que l'on a montrée optimale sous l'hypothèse (u_n) constante, et donc égale à 1 avec les normalisations expliquées dans l'introduction de cette section) est-elle optimale (sans cette hypothèse supplémentaire) ?

⁶Le lecteur a désormais toutes les indications pour calculer les équations de ces spirales, ce qu'il pourra donc faire en exercice.

⁷Ces approximations sont excellentes puisque l'on a $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^i + O(\varphi^{-i})$ et $a_i = \frac{1}{\sqrt{5}} + O(\varphi^{-2i})$.

La répartition régulière

On appelle μ_0 la constante de Markov associée à φ , *i.e.* $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Pour l'instant, on considère le cas où la suite (u_n) est constante égale à 1. Sur la figure suivante, on a représenté (en utilisant une échelle logarithmique en n) le graphe de la fonction qui à n associe la distance x_n qui sépare la n -ième graine de sa plus proche voisine :

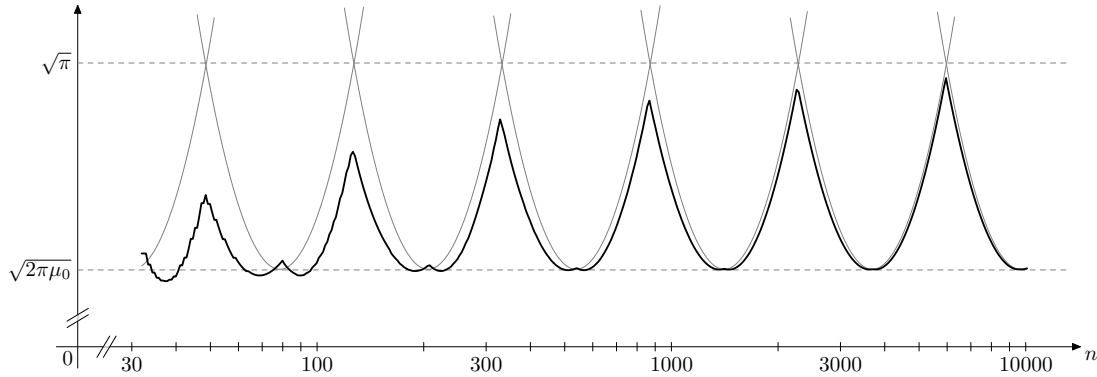


On observe directement que $\liminf x_n = \sqrt{2\pi\mu_0}$ comme l'indiquait déjà le théorème 9. On constate en outre que (x_n) est majorée par $\sqrt{\pi}$, ce qui implique (si l'on se rappelle l'étude faite en 3.1) que si m désigne l'indice de la plus proche voisine de la n -ième graine alors la différence $|m - n|$ est *toujours* le dénominateur d'une réduite de φ , c'est-à-dire un nombre de la suite de Fibonacci.

Cette dernière remarque permet d'expliquer sans mal la forme du graphe obtenu. En effet, combinée à la formule (4), elle implique que x_n est donnée par l'expression :

$$x_n^2 = \frac{F_i^2}{4n} + \frac{4\pi^2 n a_i^2}{F_i^2} + o(1)$$

pour un certain entier i . Ceci se vérifie graphiquement en superposant au dessin précédent les courbes données par les expressions précédentes (une courbe pour tout entier i) :



Une simple étude de fonctions permet de calculer l'abscisse du minimum de la i -ième courbe et celle de l'intersection des i et $(i + 1)$ -ième courbes. Si l'on appelle respectivement N_i et $N_{i+\frac{1}{2}}$ ces abscisses, et si l'on utilise les approximations $F_i \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^i$ et $a_i = \frac{1}{\sqrt{5}}$ qui permettent de simplifier considérablement les expressions, on obtient :

$$N_i \simeq \frac{\varphi^{2i}}{4\pi\sqrt{5}} \quad (10)$$

que i soit entier ou demi-entier. Au vu de cette formule, on ne s'étonne plus de la périodicité apparente de la figure précédente.

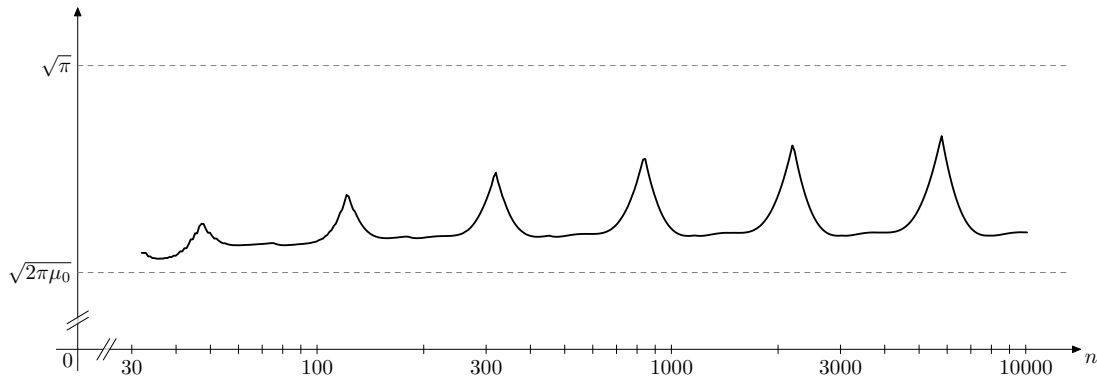
Une légère altération

Les diagrammes réalisés précédemment montrent clairement que l'écartement des graines varie d'une région à l'autre. Il semblerait donc que l'on perde ainsi de la place : si l'on arrivait à rendre plus homogène cet écartement, on peut raisonnablement penser que celui-ci se concentrerait vers la moyenne, et donc donnerait lieu à une $\liminf$ plus grande.

Ainsi, on a envie d'écarter plus les graines lorsque n est proche d'un N_i avec i entier et de les rapprocher lorsque n est proche d'un N_i avec i demi-entier (mais non entier). En inversant la formule (10), l'heuristique précédente conduit à considérer la suite

$$u_n = \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \left[1 + \varepsilon \sin \left(\pi \frac{\log(4\pi\sqrt{5}n)}{\log \varphi} \right) \right]. \quad (11)$$

où $\varepsilon > 0$ est un réel qui tient compte de l'amplitude de la perturbation. (Notez que la division par $1 + \varepsilon$ ne sert qu'à conserver la condition $\limsup u_n = 1$.) Si l'on note à nouveau x_n la distance qui sépare la n -ième graine de sa plus proche voisine, voici à quoi ressemble le graphe de x_n lorsque $\varepsilon = 0,002$:



On constate que $\liminf x_n$ est *strictement* supérieur à $\sqrt{2\pi\mu_0}$. On a ainsi, semble-t-il, réussi à obtenir une configuration de graines plus « compacte ». Il est possible non seulement de faire cette constatation à partir de la figure précédente mais également de la prouver. Pour cela, on reprend les calculs du paragraphe 3.1 qui donnent, dans cette nouvelle situation, l'expression suivante (à comparer avec la formule (4)) pour la distance entre deux graines :

$$|z_n - z_m|^2 = u_n^2 \left[\frac{d^2}{4n} \left(1 + \frac{\pi}{\log \varphi} \cdot \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon \sin s_n} \cdot \cos s_n \right)^2 + 4\pi^2 n \delta^2 \right] + o(1) \quad (12)$$

où $s_n = \pi \frac{\log(4\pi\sqrt{5}n)}{\log \varphi}$, $d = m - n$ et δ est la distance de $d\alpha$ à l'entier qui lui est le plus proche et où on a fait les hypothèses $d = O(\sqrt{n})$ et $\delta = O(1/\sqrt{n})$.

Remarque. On a fait le choix, ici, de s'affranchir des indices k qui alourdissent encore les formules : cela ajoute une ambiguïté car on ne sait plus bien quel sens donner au $o(1)$ de la formule (12). Il faut comprendre (comme cela était explicitement mentionné lors des calculs de 3.1) que l'asymptotique de cette formule s'exprime lorsque n et m parcourent des suites (n_k) et (m_k) tendant toutes deux vers l'infini.

Lorsque $d = F_i$ est le dénominateur d'une réduite, l'expression (12) se transforme et prend une tournure que certains peuvent trouver plus agréable si l'on utilise à nouveau les approximations $F_i \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^k$ et $a_i = \frac{1}{\sqrt{5}}$, à savoir :

$$|z_n - z_m|^2 \simeq f_\varepsilon \left(\frac{\log(4\pi\sqrt{5}n)}{\log \varphi} - 2k \right)$$

où la fonction f_ε est définie par la formule :

$$f_\varepsilon(t) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \sin(\pi t)}{1 + \varepsilon} \right)^2 \cdot \left(\varphi^t + \frac{2\varepsilon \cos(\pi t)}{1 + \varepsilon \sin(\pi t)} \varphi^{-t} \right).$$

On en déduit⁸ que $\liminf x_n$ s'égale à la valeur minimale prise par la fonction $\sqrt{f_\varepsilon}$. Une étude numérique montre que la plus grande de ces valeurs minimales est atteinte pour $\varepsilon \simeq 0,002008$ et qu'elle vaut environ 1,69331 (alors que $\sqrt{2\pi\mu_0} \simeq 1,67628$, soit une amélioration de plus de 1%!).

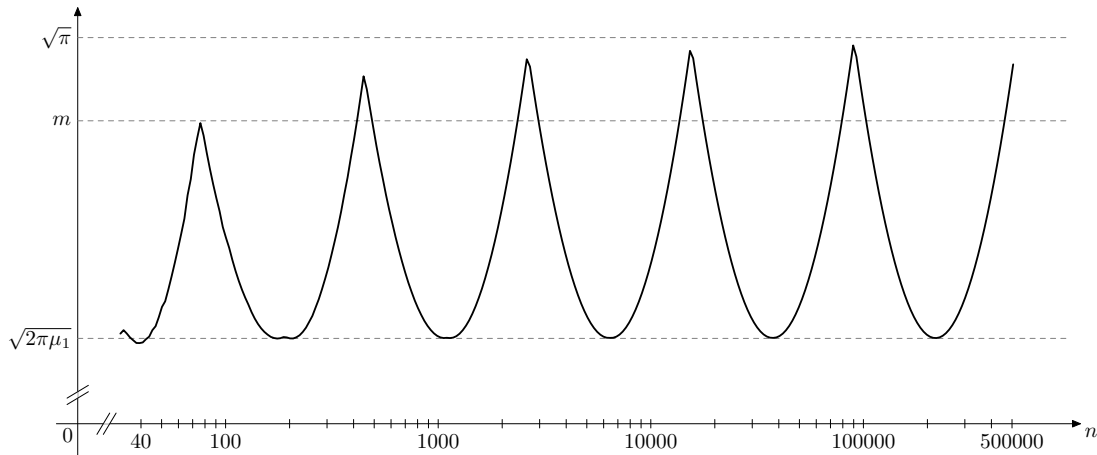
Évidemment, il est à peu près certain que la suite (u_n) que nous avons choisie n'a rien d'optimal. Par exemple, il est possible d'introduire en outre un déphasage dans la formule (12) et d'obtenir par suite une organisation encore légèrement meilleure. Toutefois, au delà de ces petits ajustements, il semble certain que « la suite (u_n) optimale » prend une forme bien différente de celle qui façonne la formule (12).

Finalement, pour les constantes α équivalentes à φ , on mène une étude tout à fait similaire à ce qui précède. En particulier, on retrouve la *même* fonction f_ε . On en déduit que la $\liminf$ peut être optimisée exactement de la même façon dans ce cas plus général. En tout cas, on est en droit de penser que ces constantes ne vont pas fournir de meilleure répartition que φ .

4.2 Lorsque $\alpha = \sqrt{2}$

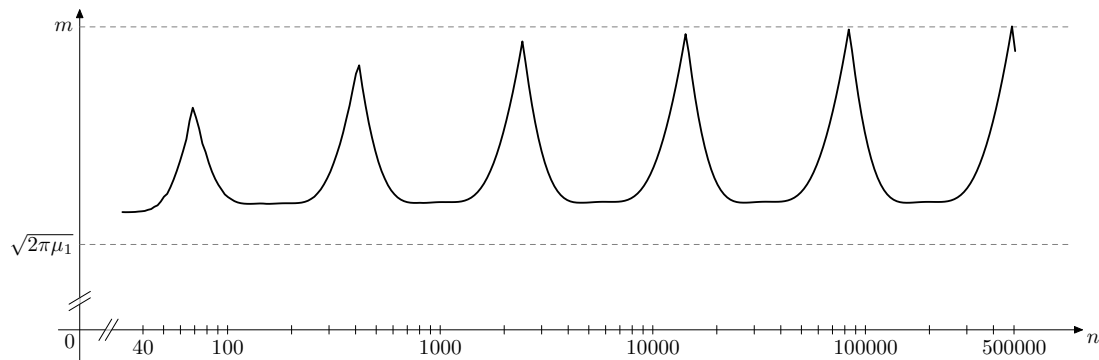
Posons $m \simeq 1,69331$ la valeur déterminée dans le paragraphe précédent ; le challenge consiste à trouver une suite (u_n) de limite supérieure 1 et un α non équivalent à φ pour lesquels $\liminf x_n > m$. Notons que des arguments élémentaires (que nous laissons au lecteur) de calcul d'aires démontrent que l'on a nécessairement $\liminf x_n \leq 2$. Ainsi, il est certain qu'il ne sera pas possible d'obtenir des améliorations véritablement significatives.

La valeur $\alpha = \sqrt{2}$ semble intéressante car elle a pour constante de Markov $\frac{1}{\sqrt{8}}$, c'est-à-dire la deuxième plus grande valeur possible. Notons $\varphi_1 = \sqrt{2}$ et $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Le graphe obtenu pour la répartition régulière, c'est-à-dire la suite (u_n) constante égale à 1 se présente comme suit :



En accord avec le théorème 9, la $\liminf$ vaut $\sqrt{2\pi\mu_1}$. On a maintenant envie d'altérer la suite (u_n) comme nous l'avons fait dans le cas de φ et de cette façon parvenir à une $\liminf$ strictement supérieure à m . Toutefois, comme on le constate sur la figure précédente, la position de m est bien loin de $\sqrt{2\pi\mu_1}$, et il paraît difficile de pouvoir « monter » jusque là. Et, effectivement, si l'on considère le même genre d'altérations que celles utilisées pour φ , la meilleure répartition que l'on obtient correspond au graphe suivant :

⁸L'expression est certainement exagérée. Il serait préférable de dire qu'en écrivant correctement les bons développements limités, on pourrait en déduire que...



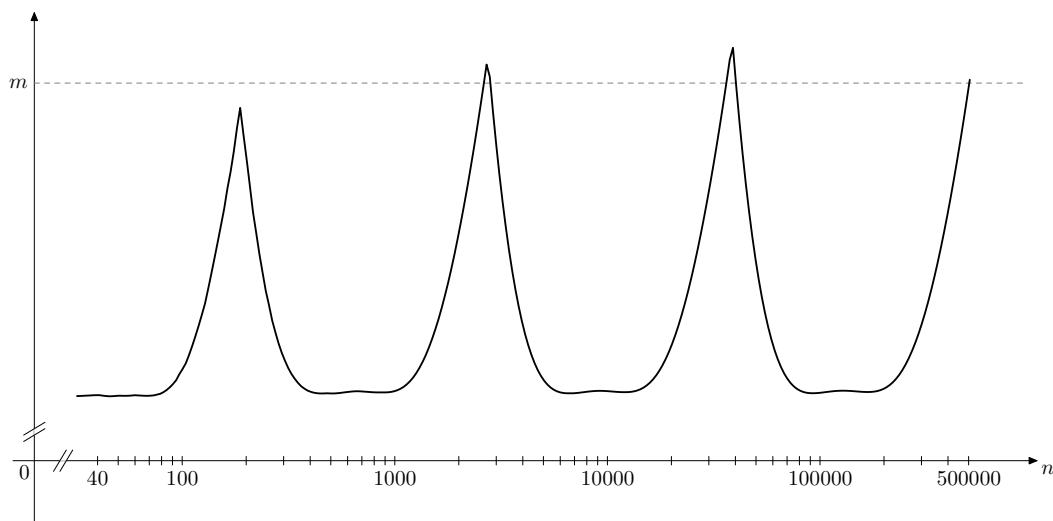
pour lequel la liminf (qui vaut environ 1,52) est encore bien en dessous m .

Bien entendu, malgré ce qui précède, on reste en droit de croire qu'avec une altération plus judicieuse on pourrait dépasser m . Cependant, il semble très probable que dans ce cas l'on parvienne également à transposer cette altération au cas $\alpha = \varphi$ et que l'on obtienne ainsi une liminf encore meilleure. En résumé, ces expériences semblent confirmer que $\alpha = \varphi$ est forcément meilleur que $\alpha = \varphi_1$. Par analogie, il est improbable que l'on obtienne de meilleurs résultats avec des α pour lesquels la suite (a_i) n'admet aucune valeur d'adhérence supérieure à μ_0 .

4.3 Lorsque $\alpha = \sqrt{3}$

Il semble donc qu'il reste à examiner le cas d'un α pour lequel la suite (a_i) admet une grande valeur d'adhérence. Il est important aussi que cette suite n'admette pas de valeur d'adhérence trop petite : en effet, on peut montrer que plus une valeur d'adhérence est petite, plus elle « s'étend » sur l'axe des n et sera d'autant donc plus difficile à éliminer par le procédé de moyennage utilisé précédemment.

Il devient alors difficile de trouver des constantes α satisfaisant au mieux les conditions précédentes. Un exemple qui peut avoir ses chances est $\alpha = \sqrt{3}$, car alors la suite (a_i) admet deux valeurs d'adhérence qui sont $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (qui est grand) et $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (qui n'est pas trop petit). En outre, ces deux valeurs d'adhérence ont approximativement le même⁹ « poids » puisque l'une d'entre elles correspond à la limite des termes d'indices pairs, alors que l'autre est la limite des termes d'indices impairs. Cependant, pour ce choix de α , après lissage, on n'obtient guère mieux que l'écartement représenté sur la figure suivante :



⁹Il est malheureusement impossible de sur-représenter les grandes valeurs d'adhérence. Précisément, si a_i est « grand », on peut montrer que a_{i+1} est forcément « petit ».

On constate que la liminf est encore dans ce cas manifestement bien en dessous m .

Un autre cas qui paraît intéressant à étudier est $\alpha = \frac{9+\sqrt{221}}{10}$. En effet, pour cette valeur, la suite (a_i) admet à nouveau deux valeurs d'adhérence (une grande et une petite) également représentées, et en outre la petite valeur d'adhérence est la plus grande possible. Cependant, les expériences numériques montrent qu'encore une fois, la liminf obtenue au final reste encore bien en dessous de m .

Concluons cette section par une remarque peut-être intéressante : dans tous les exemples calculés précédemment, l'hypothèse (9) pouvait être satisfaite. Il est donc normal que l'on n'ait pas réussi à trouver un meilleur α que φ .

5 Conclusion

Tout au long de cette note, nous avons admis que la croissance du tournesol était conditionnée par la maximisation du nombre de graines sur une surface donnée. Cependant si l'on y réfléchit une minute, cette hypothèse paraît pour le moins absurde. En effet, il semble évident que lorsqu'un tournesol grandit, il n'est pas principalement préoccupé par l'optimisation précédente et en tout cas, il est fort peu probable qu'il mène à terme les calculs de cet article afin de les utiliser pour disposer au mieux ses graines. Il est certainement plus tentant de penser que la disposition résulte de la combinaison de nombreux phénomènes physiques qui tendent à déplacer les graines de telle ou telle façon, et qui au final conduisent à l'organisation que l'on connaît. Cette dernière idée a été étudiée par Couder et Douady dans [3] (et [4], plus complet mais plus difficile également), et leurs résultats *expliquent* de façon assurément beaucoup plus convaincante que les théorèmes de cet article les causes des spirales observées sur les tournesols.

Toutefois, il ne faut pas en déduire que les calculs menés précédemment sont inutiles. Pour étayer ce point, laissez-moi établir une comparaison avec un exemple tiré de la physique. On entend souvent dire à propos du phénomène de réfraction que « la lumière suit le chemin le plus rapide d'un point à un autre ». À nouveau, il semble idiot de croire que les photons, à la traversée d'une interface, se posent des questions existentielles et entreprennent des calculs savants pour décider de la nouvelle direction à prendre dans le seul but de suivre le chemin le plus rapide. Il est certainement plus raisonnable de penser que ces photons sont soumis à des contraintes physiques qui les obligent à dévier leur trajectoire selon la loi de Descartes.

Mais, quoi qu'il en soit, cela n'enlève rien à la réalité : « la lumière suit le chemin le plus rapide d'un point à un autre ». Et il reste souvent utile d'avoir cette interprétation simple à l'esprit pour mieux appréhender de nombreuses questions. Souvent, il est utilisé l'expression « tout se passe comme si » pour témoigner de cette situation : on sait bien que très probablement cela ne se passe intrinsèquement ainsi, et pourtant c'est comme si c'était le cas.

C'est un phénomène très comparable qui se produit ici avec le tournesol : *tout se passe comme si* la croissance de la fleur obéissait à la loi de minimisation de surface. Ainsi dit, c'est un fait très surprenant et remarquable. Peut-être finalement s'agit-il de la raison profonde : le tournesol serait plus résistant dans cette configuration optimale, et au fil de nombreuses mutations, il aurait enfin trouvé le moyen de forcer les lois de la physique à agir à sa convenance...

Bibliographie

- [1] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Univ. Press (1957)
- [2] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr. **30**, Amer. Math. Soc., Providence (1989)

- [3] S. Douady et Y. Couder, *La physique des spirales végétales*, La Recherche **24** (Janvier 1993), 26–35
- [4] S. Douady et Y. Couder, *Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process (Part I, II, III)*, J. theor. Biol **178** 1996, 255–312
- [5] R. V. Jean, *Phyllotaxis, a systemic study in plant morphogenesis*, Cambridge Univ. Press (1994)
- [6] H. Vogel, *A better way to construct the sunflower head*, Math. Biosci. **44** (1979), 179–189