Application des fractions continues à la construction des gammes musicales

Xavier Caruso

Août 2011

Résumé

Les fractions continues peuvent être considérées comme une merveille des mathématiques. Les propriétés absolument remarquables qu'elles possèdent font qu'elles interviennent naturellement dans des domaines très variés. Par exemple, nous avions déjà expliqué dans [1] comment elles permettaient d'apporter un éclairage sur l'apparition de la suite de Fibonacci dans la répartition des graines du tournesol. Le but de cet article est de montrer avec quelle élégance elles s'immiscent aussi en musique et unifient la définition des gammes classiques.

Mots-clés : approximation discrète, gammes de musique, approximation diophantienne, fractions continues

La construction de bonnes gammes musicales est un problème complexe et, bien entendu, tout à fait primordial en musique. Il semble que Pythagore soit le premier à s'être intéressé sérieusement à la question ; après avoir dégagé les propriétés qu'une bonne gamme musicale devrait posséder, il aurait même construit une première gamme à douze notes (do, do$\sharp$, ré, ré$\sharp$, mi, fa, fa$\sharp$, sol, sol$\sharp$, la, la$\sharp$, si) très proche de celle que l'on utilise couramment aujourd'hui. L'étude des gammes a été ensuite reprise et complétée au fil des siècles, et certaines améliorations ont été apportées : la plus notable d'entre elles est la découverte des gammes dites tempérées permettant d'adoucir certains accords, qui sonnaient alors faux, sans pour autant augmenter le nombre de notes de la gamme.

Pour une description minutieuse et approfondie des gammes usuelles mettant en valeur les qualités et les défauts de chacune d'elles, on renvoie à [2]. Cet article, quant à lui, a un objectif un peu différent qui est de développer une « théorie des gammes » à partir d'une base axiomatique, comme l'on développe par exemple plus classiquement la théorie des groupes. Plus précisément, reprenant les idées de Pythagore, on commence par définir mathématiquement la notion de *gamme* puis celle de *gamme optimale*. En utilisant comme outil essentiel la théorie des fractions continues, on donne ensuite une classification complète des gammes optimales, et on entâme une étude de celles-ci. On conclut finalement en constatant que les gammes optimales trouvées correspondent aux gammes musicales usuelles.

1 Qu'est-ce qu'une gamme musicale ?

La hauteur d'une note musicale est caractérisée par sa fréquence qui est une grandeur physique qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un espace continu de paramètres (en l'occurrence un intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$). Toutefois, si l'on souhaite écrire de la musique, il est bien plus commode de se restreindre à un nombre fini de notes. Le même problème se pose — et même de façon encore plus criante — lorsque l'on souhaite construire certains instruments de musique, typiquement des pianos.

Se pose ainsi la question de sélectionner un ensemble de notes (ou de fréquences, cela revient au même) intéressant d'un point de vue musical. Un tel ensemble est appelé une *gamme* ou une *échelle*. La construction des gammes repose sur le principe suivant : les notes de fréquence f, $2f$ et $3f$ sonnent bien ensemble. On cherche donc, autant que faire se peut, à construire des gammes ayant la propriété suivante : si une note y apparaît, les notes des fréquences double, moitié, triple et tiers doivent aussi y apparaître. À partir de cette idée, les musiciens (et aussi les mathématiciens car Pythagore a été, semble-t-il, le premier à s'intéresser à cette question) ont défini plusieurs gammes satisfaisant au mieux aux propriétés précédentes :

- la gamme *pentatonique* formée de 5 notes par octave ;
- la gamme *(heptatonique) diatonique* qui correspond à la gamme classique formée des 7 notes do, ré, mi, fa, sol, la et si pour chaque octave ;
- les gammes *pythagoriciennes*, *chromatique* et *tempérée* (ou, plus exactement, *au tempérament égal*), qui s'obtiennent à partir de la précédente en ajoutant les dièses do$\sharp$, ré$\sharp$, fa$\sharp$, sol$\sharp$ et la$\sharp$ (ou les bémols ré$\flat$, mi$\flat$, sol$\flat$, la$\flat$ et si$\flat$) : elles comptent 12 notes par octave ;
- la *gamme des solfèges* formée de 53 notes par octave.

Dans les descriptions précédentes est apparu le mot *octave* qui n'a pas encore été défini ; c'est en fait simplement un intervalle de fréquences de la forme $[f, 2f[$. Les gammes complètes s'obtiennent en « transposant dans tous les autres octaves », c'est-à-dire, mathématiquement parlant, en répétant (théoriquement à l'infini mais, en pratique, bien sûr, on s'arrête au bout d'un moment) les notes choisies dans une octave $[f, 2f]$ dans chacune des autres octaves $[2^n f, 2^{n+1} f[$ en multipliant la fréquence par 2^n.

Il n'est pour l'instant pas nécessaire d'en savoir plus sur la définition des gammes classiques ; on y reviendra plus longuement dans la suite (partie 4) afin de les comparer aux gammes qui vont être construites par voie mathématique.

1.1 Modélisation mathématique

D'après ce qui a été dit précédemment, d'un point de vue mathématique, on a envie de définir une gamme musicale comme un sous-ensemble fermé discret de $\mathbb{R}_+^\star$ contenant une fréquence de référence f_0 et stable par multiplication et division à la fois par 2 et 3. Il est un peu plus agréable de passer au logarithme en base 2 : une gamme musicale devrait donc être un sous-ensemble fermé discret de $\mathbb{R}$ contenant un élément de référence (que l'on supposera à partir de maintenant égal à 0) et stable par addition de ± 1 et $\pm\alpha$ avec $\alpha = \log_2(3)$. Cependant, un ensemble A ayant ces propriétés contiendrait nécessairement le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et α. Comme α est irrationnel, ce dernier est dense, ce qui implique que A lui-même ne saurait être discret. Au final, on conclut qu'un tel ensemble A n'existe pas.

On cherche donc plutôt à en construire des approximations. Il semble malgré tout important de conserver la propriété d'invariance par addition par ± 1. En effet, d'un point de vue musical, c'est celle qui correspond à la « transposition par octaves » qui est à la base de la construction de toutes les gammes usuelles. On s'intéressera donc exclusivement dans la suite aux sous-ensembles discrets de $\mathbb{R}$ stables par translation par les entiers. Une telle partie est clairement entièrement déterminée par son intersection avec l'intervalle $[0, 1[$, qui est un ensemble fini.

Définition 1. Une *gamme* est partie discrète non vide de $\mathbb{R}$ stable par translation par les entiers. La *taille* d'une gamme A est le cardinal de l'ensemble fini $A \cap [0, 1[$.

Pour mesurer la qualité en tant que gamme musicale, on introduit la notion de défaut :

Définition 2. Le *défaut* d'une gamme A est la quantité

$$\sum_{x \in A \cap [0,1[} \mathrm{dist}(x + \alpha, A)$$

où $\mathrm{dist}(\cdot, A)$ désigne la distance à A.

Remarque 3. On peut discuter de la pertinence de l'indicateur chiffré « défaut » que l'on vient de définir : pourquoi considérer la somme des distances plutôt, par exemple, que leur moyenne ou leur suprémum ? La réponse n'est pas évidente mais on peut au moins dire que, si ce choix n'est pas forcément celui qui rend compte au mieux de la réalité, il est au moins celui pour lequel les résultats à suivre seront les plus riches. Quoi qu'il en soit, on encourage vivement le lecteur à adapter la suite de cet article avec diverses fonctions défaut de son choix, et à constater que dans tous les cas raisonnables (comme les deux cités en exemple ci-dessus), les conclusions générales demeurent.

Construire une bonne gamme musicale revient donc, d'un point de vue mathématique, à trouver des gammes A ayant à la fois un petit défaut et une petite taille. Bien sûr, comme on va le voir rapidement, il ne sera pas possible de minimiser simultanément ces deux paramètres ; le cœur du problème sera donc de définir de bons compromis, et c'est dans cette entreprise que la théorie des fractions continues s'avèrera particulièrement utile.

Jusqu'à présent, on a pris pour α la valeur particulière $\log_2 3$ mais, dans sa formulation mathématique, le problème auquel on a abouti a un sens pour tout α. À partir de maintenant, on autorise α à prendre n'importe quelle valeur réelle positive, non rationnelle. En réalité, la question présente encore un intérêt lorsque α est un nombre rationnel ; toutefois, la traiter dans cette généralité ne servira qu'à apporter un certain nombre de complications déplaisantes. Nous préférons donc écarter ce cas dès maintenant, mais incitons malgré tout le lecteur à y réfléchir par lui-même en seconde lecture.

1.2 Défaut optimal à taille fixée

Le nombre réel α étant toujours fixé, on introduit les fonctions d et $d_{\min}$ de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par $d(q) = \mathrm{dist}(q\alpha, \mathbb{Z})$ et $d_{\min}(q) = \min_{1 \leqslant q' \leqslant q} d(q')$.

Proposition 4. *Le défaut d'une gamme de taille q est minoré par $d_{\min}(q)$.*

Démonstration. Soit A une gamme de taille q. Pour tout $x \in A \cap [0, 1[$, on choisit un élément $g(x) \in A$ tel que $|x + \alpha - g(x)| = \mathrm{dist}(x + \alpha, A)$. La fonction $f : x \mapsto \{g(x)\}$ (où la notation $\{a\}$ désigne la partie décimale du réel a) envoie ainsi $A \cap [0, 1[$ dans lui-même. Il est ainsi possible de parler des itérés de f que l'on note f^n (pour $n \in \mathbb{N}$). Comme l'ensemble $A \cap [0, 1[$ est fini de cardinal q, il existe un entier $q' \in \{1, \ldots, q\}$ et un élément $x \in A \cap [0, 1[$ tels que $f^{q'}(x) = x$. On fixe une telle donnée pour laquelle q' est minimal. Pour r compris au sens large entre 0 et q', on pose $x_r = f^r(x)$. La minimalité de q' implique que les nombres $x_r = f^r(x)$ pour $r < q'$ sont deux à deux distincts. Par ailleurs, toujours pour $r < q'$, il existe un entier s_r tel que $\mathrm{dist}(x_r + \alpha, A) = |x_r + \alpha - x_{r+1} - s_r|$. En sommant ces égalités pour r variant dans $\{0, \ldots, q' - 1\}$, on trouve que le défaut de A est minoré par

$$\sum_{r=0}^{q'-1} |x_r + \alpha - x_{r+1} - s_r|.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, il est donc aussi minoré par $|q'\alpha - s|$ où $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_{q'-1} \in \mathbb{Z}$. Par définition de $d(q')$, il est *a fortiori* minoré par $d(q')$ et la proposition est démontrée. $\square$

La minoration donnée par la proposition 4 est d'autant plus intéressante qu'il est possible de montrer qu'elle est optimale dans le sens où pour tout q, on peut construire une gamme A de taille q et de défaut $d_{\min}(q)$. Un exemple d'ensemble A ayant ces propriétés est le suivant :

$$A_q = \{\, r\alpha + s \ \text{ avec } s \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leqslant r < q \,\}. \tag{1}$$

En effet, l'intersection $A \cap [0, 1[$ est alors égale à l'ensemble des $\{r\alpha\}$ pour $0 \leqslant r < q$. Il est donc bien déjà de cardinal q (puisque α est irrationnel). Par ailleurs, en revenant à la définition, on voit que le défaut de A_q est égal à $\mathrm{dist}(q\alpha, A)$, c'est-à-dire au minimum des $|(q-r)\alpha - s|$ pris sur tous les $s \in Z$ et $r \in \{0, \ldots, q-1\}$. Comme, à r fixé, ce minimum vaut par définition $d(q-r)$, le défaut de A_q est bien égal au minimum des $d(q')$ pour $1 \leqslant q' \leqslant q$. Une gamme minimisant le défaut n'est en général pas unique comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1. On considère q un entier strictement positif tel que $d(q) = d_{\min}(q)$. Soit p un nombre entier tel que $|q\alpha - p| = d_{\min}(q)$. Soit $\underline{t} = (t_0, t_1, \ldots t_{q-1})$ un q-uplet d'entiers tels que $|t_{q-1} - t_0| \leqslant d_{\min}(q)$. On suppose que les différences $t_{i+1} - t_i$ (pour $0 \leqslant i < q - 1$) sont du même signe que $p - q\alpha$. Montrer que la partie

$$A_{q,\underline{t}} = \{\, r\alpha + t_r + s \ \text{ avec } s \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leqslant r < q \,\}$$

est une gamme de taille q et de défaut $d_{\min}(q)$.

2 L'apparition des fractions continues

Le but de cette partie est d'expliquer comment les fractions continues interviennent dans la problématique de cet article. *A priori*, cela ne coule pas de source car, loin des préoccupations musicales, l'objectif initial de cette branche de l'arithmétique est de construire de très bonnes approximations rationnelles d'un nombre réel α. Toutefois, comme on va le voir, il s'avère qu'elle fournit également une étude précise de la fonction $d_{\min}$ apparue précédemment.

L'essentiel de cette partie est consacré à donner un exposé succinct de la théorie classiques des fractions continues. On expliquera seulement au numéro 2.4 le lien avec la fonction $d_{\min}$ et les applications à l'étude des gammes qui en découlent.

2.1 La construction de départ

Étant donné un nombre réel α, supposé pour simpliifier positif et irrationnel, la méthode pour en obtenir de très bonnes approximations rationnelles est étonnamment fort simple : on commence par écrire α sous la forme

$$\alpha = a_0 + \{\alpha\} \tag{2}$$

où a_0 est la partie entière de α et $\{\alpha\}$ est sa partie décimale. Comme première approximation de α, on retient simplement la fraction $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$. On regarde à présent le reste $\{\alpha\}$; c'est un élément de l'intervalle $[0, 1[$ qui ne peut être nul car α est supposé irrationnel.

On pose $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}}$, et on recommence le processus précédent à partir de α_1, *i.e.* on écrit $\alpha_1 = a_1 + \{\alpha_1\}$ où a_1 est la partie entière de α_1. L'égalité (2) devient alors

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \{\alpha_1\}} \tag{3}$$

et on retient comme deuxième approximation la fraction $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$. Comme précédemment, $\{\alpha_1\}$ n'est pas nul, on pose $\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}}$ et on poursuit la construction avec α_2. À l'étape n, on obtient :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \{\alpha_n\}}}}} \tag{4}$$

et l'approximation que l'on retient est la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ obtenue en enlevant $\{\alpha_n\}$ dans l'écriture précédente. Afin de fixer les valeurs respectives de p_n et q_n, on convient en outre que ces deux entiers sont positifs et premiers entre eux. Plutôt que d'utiliser des fractions à étages comme ci-dessus, il est souvent plus commode d'adopter une écriture en ligne. On introduit à cette fin la notation

$$[x_0\,; x_1, x_2, \dots, x_n] = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

pour des nombres réels $x_1, \dots, x_n$. Par définition, on a donc $\frac{p_n}{q_n} = [a_0\,; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Par ailleurs, étant donné une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels, on convient de noter $[x_0\,; x_1, \dots, x_n, \dots]$ la limite des $[x_0\,; x_1, \dots, x_n]$ si celle-ci existe.

Au niveau de la terminologie et en conservant les notations précédentes le nombre rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ s'appelle la *n-ième réduite* de α. L'entier a_n, quant à lui, est appelé *coefficient* d'indice n de α. Enfin, le réel α_n s'appelle le *quotient complet* d'indice n de α.

2.2 Les formules magiques des fractions continues

La théorie des fractions continues a un petit côté magique, lié au fait que l'on dispose d'énormément de formules pour tout calculer, et que la plupart des résultats en découlent presque directement. Typiquement, si les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ sont les réduites successives de α, on dispose d'une formule pour la différence $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$ de laquelle suit la convergence de la suite des $\frac{p_n}{q_n}$ vers α et même une estimation de la vitesse de convergence. Voici une proposition donnant quelques unes de ces formules.

Proposition 5. *Soit α un nombre irrationnel strictement positif. On note (a_n) la suite des coefficients de α, (α_n) celles des quotients complets de α et $(\frac{p_n}{q_n})$ celle des réduites de α écrites sous forme irréductible. Alors, pour tout entier n, on a :*

1. $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ *en posant, en guise d'initialisation,* $p_{-2} = 0$ *et* $p_{-1} = 1$ *;*
2. $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ *en posant, en guise d'initialisation,* $q_{-2} = 1$ *et* $q_{-1} = 0$ *;*
3. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ *;*
4. $\alpha - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n-1} + \alpha_n q_n^2}$ *;*

5. $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$;

6. $\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}$.

Démonstration. Ces formules se démontrent toutes plus ou moins facilement par récurrence sur n. On se contente de renvoyer au début du livre [3] pour une preuve détaillée. □

Il résulte des formules 1 et 2 ci-dessus que les suites (p_n) et (q_n) tendent vers l'infini puisque $a_n \geqslant 1$ dès que $n \geqslant 1$. Mieux encore, si F_n désigne la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $p_n \geqslant F_{n-2}$ et $q_n \geqslant F_{n-1}$. De la formule 4, il suit que la suite des réduites de α converge vers α, c'est-à-dire que $\alpha = [a_0\,;\, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Cette même formule précise en outre la position relative de $\frac{p_n}{q_n}$ par rapport à α : la réduite est à gauche si n est pair, et à droite si n est impair. Ainsi, les suites extraites $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\geqslant 0}$ et $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. À partir de cette remarque et de l'égalité 5, on déduit la majoration suivante :

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \tag{5}$$

qui exprime de façon précise en quoi les réduites de α fournissent d'excellentes approximations : la distance à α est contrôlée par le carré de l'inverse du dénominateur.

2.3 La notion de meilleure approximation

On vient de voir que la majoration (5) rendait compte de la bonne qualité de l'approximation d'un nombre réel α par ses réduites successives. Toutefois, pour l'instant, rien ne dit que l'on ne puisse pas obtenir des approximations encore meilleures par d'autres procédés. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il n'en est rien : la construction que l'on a présentée donne en effet les meilleures approximations de α dans un sens que l'on va préciser tout de suite !

Le nombre α étant toujours fixé, la fonction $d : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}$, $q \mapsto \mathrm{dist}(q\alpha, \mathbb{Z})$ considérée dans la partie 1.2 apparaît comme une mesure de la qualité de l'approximation de α par des fractions de dénominateur q. On dit ainsi que la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est une *meilleure approximation* de α si $d(q) = |q\alpha - p|$ et si $d(q) < d(q')$ pour tout $q' \in \{1, \ldots, q-1\}$. Le théorème 6 ci-dessous est un résultat classique et essentiel de la théorie des fractions continues.

Théorème 6. *Soit α un nombre irrationnel strictement positif. Toutes les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de α pour $n \geqslant 1$ sont des meilleures approximations de α.*

Réciproquement, si $\frac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α, alors $\frac{p}{q}$ apparaît parmi les réduites de α.

Remarque 7. On peut dire précisément à quelle condition $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ est une meilleure approximation de α : c'est exactement lorsque la partie décimale de α est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Dans le cas contraire, a_0 est battu par $a_0 + 1$. Dans ce cas, on a $a_0 + 1 = \frac{p_1}{q_1}$ et ce nombre apparaît donc bien parmi les réduites de α, comme le prédit le théorème.

Remarque 8. Le théorème 6 explique pourquoi, bien avant de connaître les fractions continues, de nombreux savants qui voulaient approcher certaines constantes irrationnelles classiques étaient tombés sans le savoir sur certaines réduites de ces nombres. C'est notamment le cas d'Archimède qui avait trouvé l'approximation $\frac{22}{7}$ pour π. De telles « coïncidences » se retrouvent aussi en astromonie, notamment en lien avec le décompte du nombre de jours dans une année, ou dans une lunaison.

Démonstration. De l'inégalité (5), on déduit que lorsque $q_{n+1} > 1$, ce qui est vrai dès que $n \geqslant 1$, on $|q_n\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|$ pour tout $p \neq p_n$. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver que les q_n sont exactement les entiers q tels que $d(q) < d(q')$ pour tout $q' < q$.

On suppose pour commencer que $d(q) < d(q')$ pour tout $q' < q$. Soit p un entier tel que $d(q) = |p\alpha - q|$. La fraction $\frac{p}{q}$ une meilleure approximation de α. Cela implique (exercice laissé au lecteur) que $\frac{p}{q}$ est irréductible et que $\frac{p_0}{q_0} \leqslant \frac{p}{q} \leqslant \frac{p_1}{q_1}$. D'après ce que l'on sait sur le comportement de la suite des réduites, il existe un entier m tel que $\frac{p}{q}$ soit compris entre $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ et $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$. On souligne que, dans cette dernière affirmation, rien n'est précisé sur la parité de m ; il se peut donc que $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ soit inférieur ou supérieur à $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$. Toutefois, le raisonnement qui va suivre fonctionne dans les deux cas.

On raisonne par l'absurde en supposant que q n'est pas l'un des q_n. On a ainsi $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ et $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, d'où on déduit que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \geqslant \frac{1}{qq_{m-1}}$$

puisque la membre de gauche est une fraction non nulle de dénominateur qq_{m-1}. Mais comme, par ailleurs, on a

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| < \left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| = \frac{1}{q_m q_{m-1}}$$

on obtient $q_m < q$. Or, on a également :

$$d(q) = |q\alpha - p| = q \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant q \cdot \left|\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p}{q}\right| \geqslant q \cdot \frac{1}{qq_{m+1}} = \frac{1}{q_{m+1}}$$

ce qui entre en contradiction avec l'inégalité $d(q_m) < \frac{1}{q_{m+1}}$ qui provient de (5).

Il reste enfin à démontrer que si $q = q_n$ pour un certain n, alors $d(q) < d(q')$ pour tout $q' < q$. Il suffit bien sûr de démontrer cette inégalité pour l'entier $q' \in \{1, \ldots, q-1\}$ pour lequel $d(q')$ est minimal. Or, d'après la première partie de la démonstration, cet entier q' est égal à q_m pour un certain entier m, nécessairement strictement plus petit que n. On est ainsi finamelent amené à démontrer que la suite des $d(q_k)$ est strictement décroissante. En vertu de la formule 4 de la proposition 5, ceci équivaut encore à établir l'inégalité $q_{k-1} + \alpha_k q_k < q_k + \alpha_{k+1}q_{k+1}$ pour tout k. Et cette dernière est bien vraie comme le montre la suite d'inégalités suivante :

$$q_{k-1} + \alpha_k q_k < q_{k-1} + (a_k + 1)q_k = q_{k+1} + q_k \leqslant q_k + \alpha_{k+1}q_{k+1}$$

(on rappelle que, par définition, tous les α_k sont supérieurs ou égaux à 1 et que a_k est la partie entière de α_k). □

2.4 Conséquences sur l'étude des gammes

On rappelle que l'on avait introduit au numéro 1.2 la fonction $d_{\min} : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}^+$, $q \mapsto \min_{1 \leqslant q' \leqslant q} d(q')$. Il est clair que $d_{\min}$ est une fonction décroissante. On dit que l'entier $q \geqslant 1$ est un *saut* de $d_{\min}$ si $q = 1$ ou si $d_{\min}(q) < d_{\min}(q-1)$ (dans le cas où $q > 1$). Le théorème 6 se reformule directement en termes de la fonction $d_{\min}$ comme suit.

Corollaire 9. *Pour un nombre irrationnel $\alpha > 0$ fixé, les sauts de la fonction $d_{\min}$ sont exactement les dénominateurs des réduites de α.*

Le corollaire indique que parmi les gammes A_q définies par la formule (1), les meilleures sont celles pour lesquelles q est le dénominateur d'une réduite de α, puisqu'à défaut fixé, ce sont elles qui ont une taille minimale. Mieux encore, il permet de sélectionner, parmi *toutes* les gammes, un certain nombre d'entre elles particulièrement intéressantes pour les critères que l'on considère dans cet article. Pour donner un sens précis à cette affirmation, on introduit la définition suivante.

Définition 10. Une gamme A de taille q et de défaut d est dite *optimale* si toute autre gamme a soit une taille supérieure ou égale à q, soit un défaut supérieur ou égal à d.

Le résultat de l'exercice 1 donne des exemples de gammes optimales : si q est le dénominateur de la n-ième réduite de α et si $\underline{t} = (t_0, t_1, \dots t_{q-1})$ est un d-uplet de réels triés par ordre croissant avec $t_{q-1} - t_0 \leqslant d_{\min}(q)$, alors l'ensemble

$$A_{q,(-1)^{n+1}\underline{t}} = \left\{ r\alpha + (-1)^{n+1} t_r + s \text{ avec } s \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leqslant r < q \right\}$$

est une gamme optimale. Réciproquement, on a le théorème suivant.

Théorème 11. *Soit A une gamme optimale de taille q. Alors il existe un entier n tel que q soit le dénominateur de la n-ième réduite de α. De plus, pour n ayant cette propriété, il existe un q-uplet $\underline{t} = (t_0, t_1, \dots t_{q-1})$ de réels triés par ordre croissant avec $t_{q-1} - t_0 \leqslant d_{\min}(q)$, tels que $A = A_{q,(-1)^{n+1}\underline{t}}$.*

Démonstration. Le fait que q soit le dénominateur d'une réduite de α est une conséquence directe de la combinaison du corollaire 9 et de la proposition 4.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, on peut évidemment supposer que $q > 1$ et il suffit alors de justifier que l'égalité dans la proposition 4 ne peut être atteinte que si A est de la forme $A_{q,(-1)^{n+1}\underline{t}}$ pour un certain $\underline{t}$ (où, comme dans l'énoncé du théorème, n désigne un [1] entier tel que q soit le dénominateur de la n-réduite de α). Or, en revenant à la démonstration de cette proposition et en reprenant les notations utilisées à cet endroit, on voit que, dans le cas d'égalité, on a nécessairement $d(q') = d(q) = |q'\alpha - s|$ tandis que les $c_r = x_r + \alpha - x_{r+1} - s_r$ doivent être du même signe $q'\alpha - s$. Par le corollaire 9, l'égalité entre $d(q)$ et $d(q')$ implique $q' = q$. On en déduit que l'application f (définie dans la démonstration de la proposition 4) est une permutation circulaire $A \cap [0, 1[$ et, par suite, que cet ensemble est égal à $\{x_0, \dots, x_{q-1}\}$. Or les x_r s'expriment en fonction des c_r comme suit :

$$x_r = x_0 + r\alpha - (c_0 + \dots + c_{r-1}) - (s_0 + \dots + s_{r-1})$$

ce qui donne :

$$\{x_r\} = \{x_0 + r\alpha - (c_0 + \dots + c_{r-1})\}.$$

Si on pose $t_r = (-1)^n \cdot (c_0 + \dots + c_{r-1} - x_0)$, il ne reste plus qu'à démontrer que la suite des t_r est croissante et qu'elle vérifie $t_{q-1} - t_0 \leqslant d(q)$. Or, par la théorie des fractions continues, on connait le signe de la différence $q\alpha - s$: c'est celui de $(-1)^n$. Les c_r ont donc également ce signe et la suite des t_r est bien croissance. Enfin, en utilisant $t_{q-1} \geqslant t_0$ et que tous les c_r sont de même signe, on obtient

$$t_{q-1} - t_0 \leqslant |c_0 + \dots + c_{q-2}| \leqslant |c_0 + \dots + c_{q-1}| = |q\alpha - s| = d(q)$$

comme souhaité. □

1. En fait, n est unique grâce à l'hypothèse supplémentaire $q > 1$.

Définition 12. Si $q = q_n$ est le dénominateur de la n-ième réduite de α, on appelle *tempérament* d'indice n la donnée d'un q-uplet $\underline{t}$ vérifiant les conditions du théorème 11.

Le *tempérament égal* d'indice n est le tempérament $\underline{t} = (t_0, \dots, t_{q_n-1})$ avec $t_i = \frac{i}{q_n} \cdot d(q_n)$ pour $0 \leqslant i < q_n$.

Un des avantages d'utiliser un tempérament est de répartir le défaut de la gamme entre toutes les contributions des $\mathrm{dist}(x + \alpha, A)$ (pour x dans $A \cap [0, 1[$). En effet, toujours si $q = q_n$ est le dénominateur d'une réduite de α, pour la gamme non tempérée A_{q_n}, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\{r\alpha\}, A) &= 0 && \text{pour } 0 \leqslant r < q_n - 1 \\ &= d(q_n) && \text{pour } r = q_n - 1 \end{aligned}$$

tandis que, pour une gamme tempérée $A_{q_n,(-1)^{n+1}\underline{t}}$ avec $\underline{t} = (t_0, \dots, t_{q_n-1})$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\{r\alpha\} + t_r, A) &= t_{r+1} - t_r && \text{pour } 0 \leqslant r < q_n - 1 \\ &= d(q_n) - t_{q_n-1} && \text{pour } r = q_n - 1. \end{aligned}$$

Le cas du tempérament égal est celui où toutes les contributions $\mathrm{dist}(x + \alpha, A)$ s'égalisent à la valeur moyenne $\frac{d(q_n)}{q_n}$. Pour la gamme correspondante $A_{q_n,\text{égal}}$, on a donc $\mathrm{dist}(x + \alpha, A_{q_n,\text{égal}}) = \frac{d(q_n)}{q_n}$ pour tout $x \in A_{q_n,\text{égal}}$.

3 Sur la répartition des multiples de α modulo 1

On conserve le nombre réel α fixé précédemment ; on rappelle qu'il est supposé positif et irrationnel. On fixe également un entier $n \geqslant 1$. On a vu dans les parties précédentes que les gammes $A_{q_n,(-1)^t\underline{t}}$ jouaient un rôle particulièrement important. Le but de cette partie est de dégager certaines de leurs propriétés. Les numéros 3.1 et 3.2 sont consacrés à l'étude des gammes non tempérées A_{q_n} (on pourra également consulter [4] à ce sujet), tandis que dans le paragraphe 3.3, on explique comment il faut modifier les résultats obtenus pour prendre en compte un tempérament.

3.1 Étude des écarts consécutifs

Par définition, étudier la gamme non tempérée A_{q_n} revient à étudier la répartition dans l'intervalle $[0, 1[$ des $\{r\alpha\}$ pour $r < q_n$. Étant donné que α est irrationnel, ces nombres sont deux à deux distincts. On peut ainsi, sans ambiguïté, trier les $\{r\alpha\}$ par ordre croissant. De façon plus précise, on appelle $r_0, \dots, r_{q_n-1}$ les entiers de $\{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ tels que :

$$\{r_0\alpha\} < \{r_1\alpha\} < \{r_2\alpha\} < \dots < \{r_{q_n-1}\alpha\}.$$

Comme les $\{r\alpha\}$ sont tous strictement positifs dès que r est non nul, on a clairement $r_0 = 0$. Les r_i suivants se calculent également facilement comme l'explique la proposition suivante.

Proposition 13. *Avec les notations précédentes, pour tout entier i, l'entier r_i est le reste de la division euclidienne de $(-1)^{n-1}q_{n-1}i$ par q_n.*

Démonstration. Pour simplifier, on ne donne la démonstration que dans le cas où n est impair, le cas contraire étant analogue.

On commence par déterminer les valeurs minimales et maximales que prend la quantité $\{q\alpha\}$ pour $|q| < q_n$ et $q \neq 0$. En reprenant les notations du paragraphe 2.3, pour tout entier

q, on a soit $d(q) = \{q\alpha\} = 1 - \{-q\alpha\}$, soit $d(q) = 1 - \{q\alpha\} = \{-q\alpha\}$. Comme on a supposé en outre n impair, on peut préciser ce qu'il en est pour q_{n-1} :

$$d(q_{n-1}) = |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = q_{n-1}\alpha - p_{n-1} = \{q_{n-1}\alpha\}.$$

Le théorème 6 assure que $d(q_{n-1})$ est le plus petit parmi les $d(q)$ pour $0 < q < q_n$. On en déduit que $\{q_{n-1}\alpha\} = d(q_{n-1})$ est le plus petit parmi les $\{q\alpha\}$ pour $|q| < q_n$ et $q \neq 0$. De même, on a $\{q_n\alpha\} = 1 - d(q_n)$, ce qui implique que $\{q_n\alpha\}$ est plus grand que tous les $\{q\alpha\}$ pour $|q| < q_n$. Ainsi, on peut écrire :

$$\{q\alpha\} = \{q_n\alpha\} - \{(q - q_n)\alpha\}$$

et la valeur maximale de $\{q\alpha\}$ est atteinte lorsque $q = q_{n-1} - q_n$ et vaut $1 - d(q_n) - d(q_{n-1})$.

On est maintenant prêt à démontrer la proposition. On définit s_i comme le reste de la division euclidienne de $q_{n-1}i$ par q_n. Il suffit de montrer que $\{s_{i+1}\alpha\} > \{s_i\alpha\}$ pour tout $i \in \{0, \dots, q_n - 2\}$. On fixe un entier i dans cet intervalle. Comme $q_n > q_{n-1}$, on a soit $s_{i+1} = s_i + q_{n-1}$, soit $s_{i+1} = s_i + q_{n-1} - q_n$. Dans le premier cas, on a

$$\{s_{i+1}\alpha\} \equiv \{s_i\alpha\} + \{q_{n-1}\alpha\} = \{s_i\alpha\} + d(q_{n-1}) \pmod{\mathbb{Z}}$$

où la notation signifie que la différence entre les deux nombres écrits de part et d'autre du signe $\equiv$ est un entier. Étant donné que $\{s_i\alpha\} + d(q_{n-1}) \leqslant 1 - d(q_n) - d(q_{n-1}) + d(q_{n-1}) = 1 - d(q_n) < 1$, on en déduit que $\{s_{i+1}\alpha\} = \{s_i\alpha\} + d(q_{n-1})$, d'où il résulte que $\{s_{i+1}\alpha\} > \{s_i\alpha\}$ comme voulu. Dans le deuxième cas, on a

$$\{s_{i+1}\alpha\} \equiv \{s_i\alpha\} + \{q_{n-1}\alpha\} - \{q_n\alpha\} = \{s_i\alpha\} + d(q_{n-1}) + d(q_n) - 1 \pmod{\mathbb{Z}}$$

et, par suite, après avoir noté que s_i ne vaut pas $q_n - q_{n-1}$ puisque i est supposé différent de $q_n - 1$, on obtient $\{s_{i+1}\alpha\} = \{s_i\alpha\} + d(q_{n-1}) + d(q_n)$. Ceci implique à nouveau l'inégalité voulue. □

Si on pose $x_i = \{r_i\alpha\}$ pour $i < q_n$ et $x_{q_n} = 1$, il résulte de la démonstration que l'on vient de faire que les différences $x_{i+1} - x_i$ ne peuvent prendre que deux valeurs. Plus précisément, en convenant que $r_{q_n} = 0$, on a pour tout $i \in \{0, \dots, q_n - 1\}$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= d(q_{n-1}) && \text{si } r_{i+1} = r_i + (-1)^{n-1}q_{n-1} \\ &= d(q_n) + d(q_{n-1}) && \text{sinon, } \textit{i.e.} \text{ si } r_{i+1} = r_i + (-1)^{n-1}(q_{n-1} - q_n). \end{aligned}$$

Autrement dit, les x_i $(0 \leqslant i \leqslant q_n)$ découpent l'intervalle $[0, 1]$ en deux types d'intervalles : les longs de longueur $d(q_n) + d(q_{n-1})$ et les courts de longueur $d(q_{n-1})$. Pour reprendre la terminologie musicale, on appellera *apotomes* (ou si l'on veut préciser apotomes d'indice n) les intervalles longs et *limmas* les intervalles courts.

Exercice 2. Montrer qu'il y a exactement q_{n-1} apotomes d'indice n et $q_n - q_{n-1}$ limmas d'indice n.

3.2 Le passage de $n - 1$ à n

Lorsque l'on passe de $n - 1$ à n, on ajoute un certain nombre de points sur le segment $[0, 1]$. Les apotomes et limmas d'indices $n - 1$ se divisent donc chacun en un certain nombre d'apotomes et limmas d'indice n. La proposition suivante montre que, d'un point de vue combinatoire, cette division est extrêmement simple.

Proposition 14. *Lors du passage de $n - 1$ à n,*

– *un limma se divise en un apotome et $(a_n - 1)$ limmas, et*
– *un apotome se divise en un apotome et a_n limmas.*
De plus si n est pair (resp. impair), l'apotome d'indice n apparaît à gauche (resp. à droite) dans chaque intervalle de la subdivision d'indice $n-1$.

Démonstration. On se contente de donner la démonstration pour le découpage des limmas dans le cas où n est pair, tous les autres cas se traitant de manière analogue. Pour $m = n-1$ ou n, on note $r_i^{(m)}$ le reste de la division euclidienne de $(-1)^{m-1} q_{m-1} i$ par q_m. Un limma d'indice $n-1$ est alors un intervalle L de la forme $[\{r_i^{(n-1)}\alpha\}, \{r_{i+1}^{(n-1)}\alpha\}]$ pour un certain $i \in \{0, \ldots, q_{n-1}-1\}$ tel que $r_{i+1}^{(n-1)} = r_i^{(n-1)} + q_{n-2}$. Soit $j_{\min}$ (resp $j_{\max}$) l'entier de $\{0, \ldots, q_n - 1\}$ tel que $r_i^{(n-1)} = r_{j_{\min}}^{(n)}$ (resp. $r_{i+1}^{(n-1)} = r_{j_{\max}}^{(n)}$). Les points de la subdivision d'ordre n qui tombent dans le limma L sont les $\{r_j^{(n)}\alpha\}$ avec $j_{\min} \leqslant j \leqslant j_{\max}$. La différence $j_{\max} - j_{\min}$ correspond donc au nombre de parties en lesquelles le limma L est subdivisé. Or, on a

$$q_{n-2} = r_{i+1}^{(n-1)} - r_i^{(n-1)} = r_{j_{\max}}^{(n)} - r_{j_{\min}}^{(n)} \equiv (j_{\max} - j_{\min}) q_{n-1} \pmod{q_n}.$$

Avec la formule 2 de la proposition 5, cela donne $(j_{\max} - j_{\min}) q_{n-1} \equiv a_n q_{n-1} \pmod{q_n}$ et, par suite, puisque q_n et q_{n-1} sont premiers entre eux d'après la formule 3 de la même proposition, on obtient $j_{\max} - j_{\min} \equiv a_n \pmod{q_n}$ ce qui donne, finalement, $j_{\max} - j_{\min} = a_n$. Ainsi L est découpé en a_n intervalles.

Il ne reste plus qu'à comprendre lesquels parmi ces intervalles sont des apotomes et lesquels sont des limmas. Étant donné que $r_{j_{\min}}^{(n)} < q_{n-1}$, on a $r_{j_{\min}+1}^{(n)} = r_{j_{\min}}^{(n)} - q_{n-1} + q_n$ et le premier intervalle qui subdivise L est bien un apotome. Pour les intervalles suivants, on remarque simplement qu'en vertu de la formule 2 de la proposition 5, on a

$$r_{j_{\min}}^{(n)} - (j_{\max} - j_{\min}) q_{n-1} = r_{j_{\min}}^{(n)} - a_n q_{n-1} = r_{j_{\min}}^{(n)} + q_{n-2} - q_n = r_{j_{\max}}^{(n)} + q_n$$

ce qui signifie que dans L il n'y a qu'un seul apotome. □

Exercice 3. Soit $q > 0$ un nombre entier, et soit n un entier supérieur ou égal à 1 tel que $q_{n-1} < q \leqslant q_n$. On note a la partie entière de $\frac{q_n - q}{q_{n-1}}$.
a) Montrer que si $q \equiv q_n \pmod{q_{n-1}}$, alors les points d'abscisse $\{r\alpha\}$ pour $0 \leqslant r < q$ découpent sur le segment $[0,1]$ des intervalles dont la longueur prend les deux valeurs suivantes : $d(q_{n-1})$ et $a \cdot d(q_{n-1}) + d(q_n)$.
b) Montrer que si $q \not\equiv q_n \pmod{q_{n-1}}$, alors les points d'abscisse $\{r\alpha\}$ pour $0 \leqslant r < q$ découpent sur le segment $[0,1]$ des intervalles dont la longueur prend les trois valeurs suivantes : $d(q_{n-1})$, $a \cdot d(q_{n-1}) + d(q_n)$ et $(a+1) \cdot d(q_{n-1}) + d(q_n)$.

3.3 Influence d'un tempérament

On se donne maintenant en plus de ce que l'on a déjà un tempérament $\underline{t} = (t_0, \ldots, t_{q_n - 1})$ d'indice n (voir définition 12). Étant donné que tous les t_i sont compris entre 0 et $d(q_n)$, on déduit des résultats de la partie 3.1 que, si on note comme précédemment r_i le reste de la division euclidienne de $(-1)^{n-1} q_{n-1} i$ par q_n, alors les nombres $x_i = \{r_i \alpha\} + (-1)^{n-1} t_{r_i}$ (pour $0 \leqslant i < q_n$) et $x_{q_n} = x_0 + 1$ sont encore triés par ordre croissant. Autrement dit, sans formules, appliquer un tempérament ne modifie pas l'ordre des notes.

On peut également parler d'apotome et de limma dans ce nouveau contexte tempéré : en reprenant les notations précédentes, on dira qu'un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (pour un $i \in$

$\{0, \ldots, q_n - 1\}$) est un apotome d'indice n tempéré par $\underline{t}$ (resp. un limma d'indice n tempéré par $\underline{t}$) si $r_{i+1} = r_i + (-1)^{n-1} q_{n-1}$ (resp. si $r_{i+1} = r_i + (-1)^{n-1}(q_{n-1} - q_n)$). Dans le cas tempéré, la longueur des apotomes et des limmas n'est en général pas constante. Il se peut même, qu'à tempérament fixé, certains apotomes soient plus courts que certains limmas ; par contre, la longueur des apotomes tempérés, comme celle des limmas tempérés, varie toujours dans l'intervalle $[d(q_{n-1}), d(q_{n-1}) + d(q_n)]$.

Proposition 15. *Soit $\underline{t}$ un tempérament d'indice n. Les apotomes (resp. les limmas) d'indice n tempérés pas $\underline{t}$ ont tous la même longueur si, et seulement s'il existe deux nombres réels t_0 et t avec $t \in [0, \frac{d(q_n)}{q_n}]$ et $\underline{t} = (t_0, t_0 + t, t_0 + 2t, \ldots, t_0 + (q_n - 1)t)$.*

En outre, dans le cas où $t = \frac{d(q_n)}{q_n}$ (et donc, en particulier, dans le cas du tempérament égal), les apotomes ont la même longueur que les limmas, et celle-ci vaut $\frac{1}{q_n}$.

Remarque 16. De la proposition, il résulte que l'on a une description extrêmement simple de la gamme $A_{q_n,\text{égal}}$, puisque celle-ci n'est rien d'autre que l'ensemble $\frac{1}{q_n} \cdot \mathbb{Z}$ des multiples entiers de $\frac{1}{q_n}$. L'adjectif « égal » est donc particulièrement adapté puisqu'à la fois les notes de $A_{q_n,\text{égal}}$ sont réparties à intervalles réguliers et, comme on l'a déjà vu, les distances de $x + \alpha$ à $A_{q_n,\text{égal}}$ sont toutes égales lorsque x décrit la gamme.

Démonstration. Comme précédemment, on note t_r les coordonnées de $\underline{t}$. Si l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un limma (resp. un apotome), il est facile d'exprimer sa longueur : elle vaut

$$d(q_{n-1}) + t_{r_{i+1}} - t_{r_i} \quad (\text{resp. } d(q_{n-1}) + d(q_n) - t_{r_{i+1}} + t_{r_i}).$$

Dire que tous les limmas ont même longueur équivaut donc à dire que les différences $t_{r+q_{n-1}} - t_r$ sont toutes égales à une même valeur δ lorsque r parcourt l'ensemble $\{0, 1, \ldots, q_n - q_{n-1} - 1\}$. De même, dire que tous les apotomes ont même longueur signifie que tous les $t_{r+q_{n-1}-q_n} - t_r$ valent tous la même constante δ' pour r dans $\{q_n - q_{n-1}, \ldots, q_n - 1\}$. Ainsi, il est déjà clair que si $\underline{t}$ a la forme du théorème, la propriété de constance des longueurs des apotomes et des limmas est satisfaite. Pour établir la réciproque, on commence par prolonger la suite (t_r) à tout $\mathbb{Z}$ en posant $t_{aq_n+r} = (\delta - \delta')a + t_r$ pour tout entier a et tout $r \in \{0, \ldots, q_n - 1\}$. Avec cette convention, on a $t_{r+q_{n-1}} = t_r + \delta$ pour tout entier r. On considère une relation de Bézout $uq_{n-1} - vq_n = 1$ entre les nombres premiers entre eux q_{n-1} et q_n (la formule 3 de la proposition 5 dit que l'on peut prendre $u = p_n$ et $v = p_{n-1}$). Pour un entier r fixé, le nombre $t_{r+uq_{n-1}}$ est alors égal d'une part à $t_r + u\delta$, et d'autre part à $t_{r+uq_{n-1}} = t_{r+1+vq_n} = t_{r+1} + v(\delta - \delta')$. On en déduit que $t_{r+1} = t_r + u\delta - v(\delta - \delta')$. Si on pose $t = u\delta - v(\delta - \delta')$, on a donc bien $\underline{t} = (t_0, t_0 + t, t_0 + 2t, \ldots, t_0 + (q_n - 1)t)$. Le fait que $t \in [0, \frac{d(q_n)}{q_n}]$ résulte des propriétés imposées dans la définition des tempéraments.

Enfin, si $t = \frac{d(q_n)}{q_n}$, d'après ce que l'on a dit au début de la preuve, la longueur des limmas vaut $d(q_{n-1}) + q_{n-1} \cdot \frac{d(q_n)}{q_n}$ tandis que celle des apotomes vaut $d(q_{n-1}) + d(q_n) + (q_{n-1} - q_n) \cdot \frac{d(q_n)}{q_n}$, ce qui redonne après simplification la longueur des limmas. Cette longueur commune est nécessairement égale à $\frac{1}{q_n}$ puisque l'intervalle $[0, 1]$ de longueur 1 est découpé entre q_n apotomes ou limmas. □

Remarque 17. Il résulte de la dernière partie de la démonstration ci-dessus que $d(q_{n-1}) + q_{n-1} \cdot \frac{d(q_n)}{q_n} = \frac{1}{q_n}$, ce qui se réécrit encore sous la forme plus symétrique suivante : $\frac{d(q_{n-1})}{q_{n-1}} + \frac{d(q_n)}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$. Cette dernière formule peut s'obtenir plus directement à partir de la proposition 5. En effet, sachant que $\frac{d(q_{n-1})}{q_{n-1}} = |\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}|$, que $\frac{d(q_n)}{q_n} = |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$ et que les fraction

$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$ sont de part et d'autre de α, il s'agit de montrer que $|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$, ce qui est exactement le contenu de l'alinéa 5.

Exercice 4. Soit m un entier supérieur ou égal à n. On pose $t = \frac{d(q_m)}{q_m}$ et on considère le tempérament $\underline{t} = (0, t, 2t, \ldots, (q_n - 1)t)$ d'indice n. Montrer que le rapport de la longueur des apotomes d'indice n tempérés par $\underline{t}$ par la longueur des limmas d'indice n tempérés par $\underline{t}$ est égal à $[1\,; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m]$.

4 Obtention des gammes musicales par voie mathématique

On en revient à la musique et donc à la valeur particulière $\alpha = \log_2 3$. Avec une bonne calculatrice, on trouve le début de son développement en fraction continue :

$$\alpha = [1\,; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, \ldots]$$

et ses premières réduites :

$$1 \;\; ; \;\; 2 \;\; ; \;\; \frac{3}{2} \;\; ; \;\; \frac{8}{5} \;\; ; \;\; \frac{19}{12} \;\; ; \;\; \frac{65}{41} \;\; ; \;\; \frac{84}{53} \;\; ; \;\; \frac{485}{306} \;\; ; \;\; \frac{1054}{665}.$$

Du théorème 11, on déduit les premières gammes optimales, et notamment leur taille. Les nombres 5, 12 et 53 attirent particulièrement l'attention lorsque l'on sait (ce qui est le cas si on se souvient du début de l'article) qu'il existe des gammes usuelles comptant ce nombre de notes par octave.

Les quatre gammes non tempérées A_5, A_{12}, A_{41} et A_{53} sont représentées à gauche sur la figure 1. La gamme A_{12} n'est autre que la gamme pythagoricienne citée au début de cet article ; les notes qui apparaissent en annotations sur cette gamme sont celles que l'on connaît bien.

La gamme diatonique (obtenue en enlevant les dièses et les bémols) apparaît comme la sous-gamme de A_{12} formée des sept premières notes obtenues à partir du fa[2] et en ajoutant à chaque fois α ; ce sont les notes bécarres, ou encore, celles qui correspondent aux touches blanches du piano. Conformément au résultat de l'exercice 3, les intervalles découpés par ces notes n'ont que deux longueurs différentes. Par contre, contrairement à ce qui se passe pour les gammes A_{q_n}, ces deux longueurs ne sont pas proches l'une de l'autre, le rapport entre les deux étant plutôt de l'ordre de 2 (et le dépassant même légèrement). Le qualificatif « diatonique » rend compte de cette propriété : certaines notes sont espacées d'un ton complet et d'autre seulement d'un demi-ton. On notera que la gamme diatonique n'est pas optimale dans le sens de cet article : en effet, en décalant de α le si (qui est la dernière note bécarre obtenue à partir du fa en ajoutant successivement α), on tombe sur le fa$\sharp$ qui est loin de toute note bécarre.

La sous-gamme des dièses dans A_{12} (c'est-à-dire la sous-gamme complémentaire de la gamme diatonique) s'identifie, à l'aide d'une translation à la gamme A_5. Jouer avec la gamme pentatonique correspond donc (à un tempérament près) à n'utiliser que les touches noires du piano.

Pour en terminer avec les gammes non tempérées, remarquons qu'il est possible de vérifier visuellement le résultat de la proposition 14 sur la figure 1. Pour le passage de A_5 à A_{12} par exemple, on a $n = 4$, $a_n = 2$, et on constate bien qu'un apotome se découpe en un apotome et deux limmas tandis qu'un limma se divise en un apotome et un limma,

2. C'est la raison pour laquelle on a choisi d'aligner les gammes sur le fa, et non pas sur le la comme cela se fait pourtant plus classiquement en musique. Bien sûr, on passe d'une convention à l'autre par une simple translation.

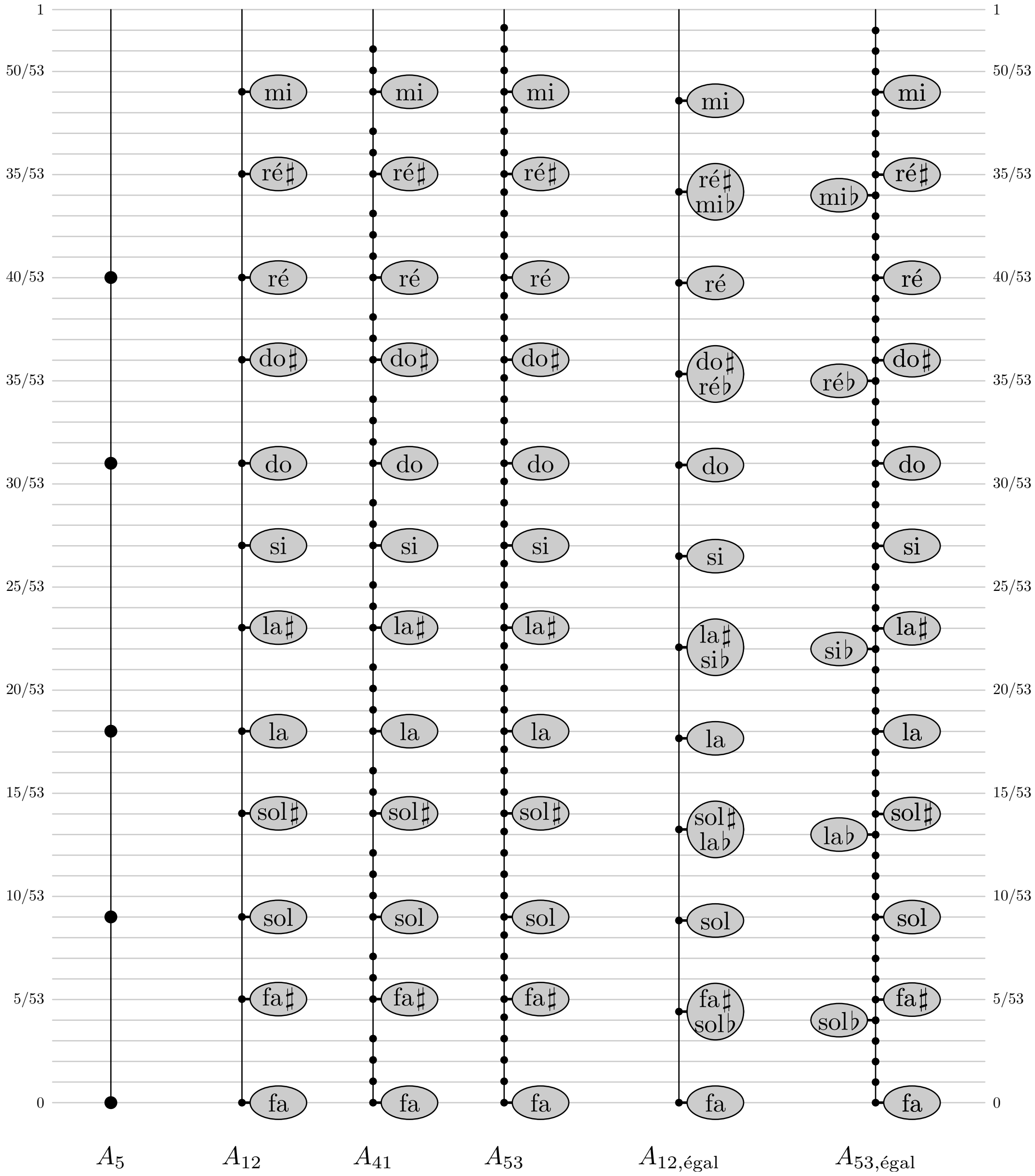

FIGURE 1 – Quelques gammes optimales pour $\alpha = \log_2 3$

et qu'en outre l'apotome se place toujours en gauche (ou plutôt en bas tel que cela est représenté sur la figure 1).

Parce qu'elles ne sont pas tempérées, les gammes précédentes ne sont pas les plus adaptées à la musique. En effet, la répartition du défaut de ces gammes fait qu'alors que la plupart des quintes (*i.e.* des couples de notes (x, y) où y est la note de la gamme la plus proche de $x + \alpha$) sonnent parfaitement, il y a une quinte par octave qui hurle ; elle est appelée la *quinte du loup*. Pour pallier à ce problème, on introduit un tempérament, c'est-à-dire que l'on décale un peu chaque note afin de répartir l'erreur sur chacune des quintes de l'octave. Comme cela a déjà été expliqué, la répartition la plus équitable est donnée par le tempérament égal. La gamme à douze notes $A_{12,\text{égal}}$ représentée en cinquième position sur la figure 1 est la gamme au tempérament égal citée dans la partie 1 de cet article ; c'est aussi celle qui est le plus couramment utilisée actuellement dans le monde occidental aussi bien pour écrire des partitions que pour construire des instruments.

Enfin, la gamme $A_{53,\text{égal}}$ est la gamme des solfèges. Elle est très proche de la gamme A_{53} comme on le voit sur la figure 1. Ainsi la gamme A_{12}, incluse dans A_{53}, définit une sous-gamme $A_{12,\text{solf}}$ de $A_{53,\text{égal}}$: en reprenant les notations du paragraphe 3.3, c'est celle formée des nombres $x_0, \ldots, x_{11}$. On en déduit que $A_{12,\text{solf}}$ s'obtient aussi en appliquant à A_{12} le tempérament $(0, t, 2t, \ldots, 11t)$ avec $t = \frac{d(53)}{53}$. C'est donc encore une gamme optimale et, en accord avec la proposition 15, tous ses apotomes (resp. ses limmas) ont même longueur, à savoir $\frac{5}{53}$ (resp. $\frac{4}{43}$). Le quotient de ces deux longueurs est $\frac{5}{4} = [1; 3, 1]$ comme le prédit le résultat de l'exercice 4. En théorie de la musique, un intervalle de la forme $[\frac{i}{53}, \frac{i+1}{53}]$ est appelé un *comma* ; un apotome est donc formé de cinq commas, alors qu'un limma n'en compte que quatre. Travailler avec la gamme des solfèges conduit également à distinguer les dièses et les bémols, en plaçant ces derniers un comma en dessous ; en effet, la bonne quinte (celle qui ne hurle pas) n'est pas (la♯, fa) mais (si♭, fa). Théoriquement, en itérant cette constatation, on devrait être amené à nommer les cinquante-trois notes. Il semble toutefois que les musiciens ont préféré ne pas en arriver là.

Les gammes à douze notes précédentes ont une autre propriété remarquable pour les applications musicales : l'écart entre les notes sol♯ et do (par exemple) est proche de $\alpha' = \log_2 5$ à un entier près. Ceci est intéressant car il se trouve que des sons de fréquence f et $5f$ vont encore relativement bien ensemble ; les gammes à douze notes permettent donc une harmonie musicale supplémentaire qui, en un sens, échappe aux méthodes de cet article. Il serait peut-être intéressant de modifier la théorie développée précédemment pour prendre cela en compte. On pourrait, par exemple, introduire le nouveau défaut :

$$\sum_{x \in A \cap [0,1[} \operatorname{dist}(x + \alpha, A) + \operatorname{dist}(x + \alpha', A)$$

avec éventuellement quelques pondérations si l'on souhaite privilégier certains accords (par exemple ceux distants de α qui sonnent, semble-t-il, malgré tout, plus justes que ceux distants de α'). Les méthodes de cet article ne semblent toutefois pas pouvoir s'adapter facilement à cette nouvelle question : en effet, il faudrait savoir construire simultanément de bonnes approximations de α et α' par des fractions ayant même dénominateur, ce qui échappe à la théorie des fractions continues[3]. Plusieurs théories ont, cependant, été développées dans cette direction (par exemple l'algorithme LLL), mais elles restent à la fois plus complexes et moins précises. Obtenir par cette voie une application concrète à l'étude des gammes musicales pourrait donc s'avérer délicat.

3. De surcroît, un coup d'œil aux premières réduites de α et α' montrent que, malheureusement, celles-ci ne partagent pas de dénominateur commun.

Références

[1] X. Caruso, *Nombre d'or et tournesol*, RMS **116-4** (2006), 7–23

[2] G. Cohen et al., *Maths & musique, des destinées parallèles*, Tangente Hors-Série **11**, 157 pages

[3] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Mineola, N.Y. : Dover Publications (1997)

[4] N. B. Slater, *Gaps and steps for the sequence* $n\theta \mod 1$, Proc. Cambridge Phil. Soc. **63** (1967), 461-472