FIN ↘

2024–2025
Lycée Pasteur

MSPI 1
Mathématiques
DS 08 (4 heures)

Samedi 05 avril, 8 h – 12 h

Avec corrigé

Table des matières

Exercice 1 (*Limites*).

1. Déterminer $\lim_{x \to 0} x^x$. On note ℓ cette limite.

On écrit que, si $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$. Or, par croissances comparées, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de exp en 0 et par composition des limites, $\boxed{x^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1}$.

---

2. Déterminer un équivalent simple, quand x tend vers 0, de $x^x - \ell$.

Comme $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{e^y - 1}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$; donc par composition des limites, on en déduit que $x^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$.

---

3. En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^{(x^x)}\ln(x)}{x^x - 1}$.

Soit $x \in]0; 10^{-2025}[$. On a

$$\frac{x^{(x^x)}\ln(x)}{x^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{(x^x)}\ln(x)}{x\ln(x)} = x^{x^x - 1} = e^{(x^x-1)\ln(x)}.$$

Or, $(x^x - 1)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)^2$ et $x\ln(x)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc

$$\boxed{x^{x^x - 1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}.$$

Exercice 2 (*Décompositions dans quatre bases*).

Soit $P = (2X+1)(3X-2)(4X+3) \in \mathbb{C}[X]$. On nomme respectivement (A_0, A_1, A_2, A_3), (B_0, B_1, B_2, B_3), (C_0, C_1, C_2, C_3), et (D_0, D_1, D_2, D_3) les quatre familles

- ▷ $(1 \ , \ X \ , \ X^2 \ , \ X^3)$.
- ▷ $(1 \ , \ X-5 \ , \ (X-5)^2 \ , \ (X-5)^3)$.
- ▷ $(1 \ , \ X-1 \ , \ (X-1)(X-2) \ , \ (X-1)(X-2)(X-3))$.
- ▷ $((X-1)(X-2)(X-3) \ , \ X(X-2)(X-3) \ , \ X(X-1)(X-3) \ , \ X(X-1)(X-2))$.

1. Justifier que les quatre familles précédentes sont des bases (de décomposition linéaires à coefficients scalaires des éléments) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$.

En m'appuyant (*avec force et conscience*) sur nos **connaissances et méthodes communes de référence**, je reconnais que :

- ▷ la première famille est la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$;
- ▷ la deuxième et la troisième sont composées de polynômes de degrés échelonnés décrivant $\{0; 1; 2; 3\}$;
- ▷ la dernière est équivalente la base de Lagrange associée à la 4-liste de points $(0; 1; 2; 3)$.

Ainsi, ce sont bien quatre bases sur $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}_3[X]$.

---

2. Déterminer la liste des coordonnées de P

a. Dans la base (A_0, A_1, A_2, A_3).

A l'aide de la double distributivité, en développant, je trouve

$\boxed{(-6; -11; 14; 24).}$

b. Dans la base (B_0, B_1, B_2, B_3).

A l'aide de la formule de Taylor, notamment en calculant les évaluations de P, P', P'' et P''' en 5, suivant la méthode de Hörner, je trouve

$\boxed{(3289; 1929; 374; 24).}$

c. Dans la base (C_0, C_1, C_2, C_3).

A l'aide d'un système linéaire triangulaire obtenu par les évaluations en 1, 2 et 3 et par la prise du coefficient canonique de degré 3, je trouve

$\boxed{(21; 199; 158; 24).}$

d. Dans la base (D_0, D_1, D_2, D_3).

A l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange, notamment en calculant les évaluations de P en 0, 1, 2, et 3, je trouve

$\boxed{(1; 10,5; -110; 122,5).}$

Exercice 3 (*Valuations échelonnées*).

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on appelle **valuation** de P, qu'on note $val(P)$, l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ égal à la multiplicité de $0_{\mathbb{C}}$ dans P ; c.-à-d. le plus bas des degrés des coefficients non nuls de la décomposition canonique de P si $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, et $+\infty$ si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

On dit qu'une famille de polynômes $(P_1, P_2 \ldots, P_n)$ est **à valuations échelonnées** si, et seulement si,

$$\mathrm{val}(P_1) < \mathrm{val}(P_2) < \cdots < \mathrm{val}(P_n).$$

1. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Donner, **en justifiant**, des formules (avec des égalités ou des inégalités) pour $\mathrm{val}(P+Q)$ et $\mathrm{val}(PQ)$.

Démontrons que $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$. Notons $s = \mathrm{val}(P)$ et $t = \mathrm{val}(Q)$. Alors $\forall k < s$, $a_k = 0$ et $\forall k < t$, $b_k = 0$. Donc, $\forall k < \min(s,t)$, $a_k + b_k = 0$, $\boxed{\text{donc } \mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(s,t)}$.

Ensuite, démontrons que $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$. Notons $s = \mathrm{val}(P)$ et $t = \mathrm{val}(Q)$. Notons $PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k < s + t$, alors, comme

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell},$$

on remarque que pour tout ℓ dans $[\![0, k]\!]$, ou $\ell < s$, et donc $a_\ell = 0$, ou $\ell \geqslant s$, donc $k-\ell < s+t-s = t$, donc $b_{k-\ell} = 0$. Donc $c_0, \dots, c_{s+t-1}$ sont nuls.

Ensuite, $c_{s+t} = a_s b_t$, qui est non nul, $\boxed{\text{donc la valuation de } PQ \text{ est égale à } s+t.}$

Autre rédaction : à l'aide de points de suspensions en traitant à part les cas des valuations infinies et en usant de la symétrie par permutation des variables.

Autre voie : à l'aide de l'interprétation en termes de multiplicités.

Supposons, par symétrie, que $\mathrm{val}(P) \leqslant \mathrm{val}(Q)$. Si $\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q) \in \mathbb{N}$, alors P et Q sont divisibles par $X^{\mathrm{val}(P)}$, donc $P+Q$ également ; donc $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \mathrm{val}(P) = \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$. Sinon, Q est nul ; alors $P+Q = P$; donc $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \mathrm{val}(P) = \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$.

Si $\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q) \in \mathbb{N}$, alors $PQ = X^{\mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)}T$, où $T \in \mathbb{C}[X]$ est le produit de deux polynômes qui n'admettent pas 0 pour racine ; donc c'est un tel polynôme ; donc $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$. Sinon, P ou Q est nul : alors PQ est nul et $\mathrm{val}(P)$ ou $\mathrm{val}(Q)$ est égal à $+\infty$; donc $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Ainsi étend-on ces propriétés aux multiplicités des nombres complexe dans les polynômes à coefficients complexes.

2. Démontrer qu'une famille de polynômes tous non nuls à valuations échelonnées est libre.

Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes tous non nuls à valuations échelonnées.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Par l'absurde, supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Alors l'ensemble $A = \{k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Il possède donc un plus petite élément m. Mais alors $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Nommons alors $v \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ la valuation de P_m. Comme $P_m \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, on a $v \in \mathbb{N}$. Nommons alors $a \in \mathbb{C}^*$ le coefficient canonique du monôme X^v dans P, alors, comme les valuations des polynômes sont échelonnées, le coefficient canonique du monôme X^v dans $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k$ est $\lambda_m a$. Donc, comme $\sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{C}[X]}$, $\lambda_m a = 0$, donc $\lambda_m = 0$ car $a \neq 0$. Ce qui est absurde car $m \in A$ (*en divisant par X^v puis en évaluant en 0, on trouve aussi a=0*).

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.

Généralisation : avec une famille quelconque, éventuellement non indexée par un intervalle d'entiers (*famille d'éléments éventuellement non rangés*).

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille non vide de polynômes tous non nuls et de valuations distinctes. Montrons que cette famille est libre en vérifiant que toute sous famille finie est libre.

Pour ce faire, soit J une partie non vide et finie de I.

Soit $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ tel que $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j P_j = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Par l'absurde, supposons que $(\lambda_j)_{j\in J} \neq (0)_{j\in J}$. Nommons alors K l'ensemble des indices j tels que $\lambda_j \neq 0$, puis nommons k_0 l'élément de K tel que la valuation de P_{k_0} est minimale dans $([-\infty, +\infty], \leqslant)$ (*CMCR : toute partie non vide et finie d'un ensemble totalement ordonné peut-être rangée de son plus petit élément à son plus grand élément*). Alors P_{k_0} est une combinaison linéaire des P_k pour $k \in K \setminus \{k_0\}$.

Supposons que $K \setminus \{k_0\} = \emptyset$. Alors $P_{k_0} = 0_{\mathbb{C}[X]}$; c'est absurde car les P_i sont tous non nuls.

Sinon, $\mathrm{val}(P_{k_0}) \geqslant \min\left\{\mathrm{val}(P_k) \ : \ k \in K \setminus \{k_0\}\right\}$ car pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$, et $\mathrm{val}(cP) \geqslant \mathrm{val}(P)$. Prenons alors $k \in K \setminus \{k_0\}$ tel que $\mathrm{val}(P_{k_0}) \geqslant \mathrm{val}(P_k)$; or par choix de k_0, $\mathrm{val}(P_k) \geqslant \mathrm{val}(P_{k_0})$. Donc $k \neq k_0$ et $\mathrm{val}(P_k) = \mathrm{val}(P_{k_0})$; c'est absurde car les valuations des P_i sont distinctes.

Ainsi, $(\lambda_j)_{j\in J} = (0)_{j\in J}$. D'où la sous-famille non vide et finie $(P_j)_{j\in J}$ est libre, ce quelle que soit la partie non vide et finie de I. La sous-famille vide étant libre, l'objectif est atteint.

I Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes complexes en une indéterminée X, et $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degrés inférieurs à n. On définit la famille des polynômes de Bernstein d'ordre n notée $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$, par

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}.$$

I-A Définition et premières propriétés.

1. Déterminer les décompositions linéaires canoniques des polynômes $(B_{3,k})_{0\leqslant k\leqslant 3}$.

Calculons :

- $B_{3,0} = \binom{3}{0} X^0(1-X)^3 = (1-X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$.
- $B_{3,1} = \binom{3}{1} X(1-X)^2 = 3X(1-2X+X^2) = 3X - 6X^2 + 3X^3$.
- $B_{3,2} = \binom{3}{2} X^2(1-X) = 3X^2 - 3X^3$.
- $B_{3,3} = \binom{3}{3} X^3(1-X)^0 = X^3$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Donner (sans justification) les racines de $B_{n,k}$ et leurs multiplicités.

Comme $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$, les racines de $B_{n,k}$ sont

$\boxed{0, \text{ de multiplicité } k,}$ et $\boxed{1, \text{ de multiplicité } n-k.}$

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tous $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, m]\!]$, déterminer $B_{n,k} \wedge B_{m,\ell}$.

On sait que $B_{n,k}$ et $B_{m,\ell}$ sont scindés, avec deux racines uniquement : 0, de multiplicité k pour $B_{n,k}$ et ℓ pour $B_{m,\ell}$ et 1, de multiplicité $n-k$ pour $B_{n,k}$ et

$m-\ell$ pour $B_{m,\ell}$, donc, d'après les formules sur les multiplicités des racines du PGCD unitaire,

$$B_{n,k} \wedge B_{m,\ell} = X^{\min(k,\ell)}(X-1)^{\min(n-k,m-\ell)}.$$

4. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Donner le degré de $B_{n,k}$ ainsi que l'expression de ses coefficients. Donner en particulier le coefficient dominant de $B_{n,k}$.

Développons proprement, d'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} X^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (-1)^\ell X^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}(-1)^\ell X^{\ell+k} =_{j=k} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j X^j, \end{aligned}$$

où, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\boxed{\alpha_j = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}}$. En particulier, $\alpha_j = 0$ si $j > n$ ou $j < k$. Donc $B_{n,k}$ est de degré n et son coefficient dominant est égal à $\boxed{\binom{n}{k}(-1)^{n-k}}$.

5. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$?

On écrit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1},$$

car X **et** $(1-X)$ **commutent pour** $\times$.

6. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$.

Supposons d'abord $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $n-k = (n-1)-(k-1)$; donc on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} XX^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nX\sum_{\ell=0}^{n-1} B_{n-1,\ell} \qquad (\ell = k-1) \\ &= nX.\end{aligned}$$

Et la formule reste valable pour $n = 0$. D'où le résultat !

I-B Engendrement et liberté.

Dans la suite, n est supposé non nul. Pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$V_\ell = \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-\ell}).$$

7. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

Comme les transvections et les dilatations sur les listes de vecteurs préservent l'espace engendré, il est vrai que

$$\mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell})$$

car $B_{n,n-\ell} = aX^{n-\ell} + \vec{r}$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\vec{r} \in \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)})$ d'après la formule définissant ce polynôme.

---

8. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que

$$(1) \quad \forall \ell \in [\![0, n]\!],\ V_\ell = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-\ell})$$

Raisonnons par récurrence.

(1°) Pour commencer, $V_0 = \mathrm{Vect}(X^{n-0})$ car $B_{n,n-0} = X^{n-0}$.

(2°) Ensuite, **à l'instar de** 1, soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$V_{\ell-1} = \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}).$$

Alors

$$\begin{aligned} V_\ell &= \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(B_{n,n}, B_{n,n-1} \dots, B_{n,n-(\ell-1)}) + \mathrm{Vect}(B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}) + \mathrm{Vect}(B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, B_{n,n-\ell}) \\ &= \mathrm{Vect}(X^{n-0}, \dots, X^{n-(\ell-1)}, X^{n-\ell}) \end{aligned}$$

(3°) D'où le résultat, en vertu de la propriété du plus petit élément dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

En particulier, $V_n = \mathbb{C}_n[X]$. Donc la liste est génératrice.

---

9. En déduire que les polynômes de Bernstein d'ordre n sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Conclure que $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

En deux temps.

$*$ D'après ce qui précède, on a :

$$\{0_{\mathbb{C}_n[X]}\} = \mathrm{Vect}(\emptyset) \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = \mathbb{C}_n[X].$$

Or, d'après la propriété d'ajout d'un vecteur à une famille libre, ou bien la nouvelle famille est liée et engendre le même espace, ou bien la nouvelle famille est libre et engendre un sous-espace strictement plus grand. Donc la famille en question est libre.

Autre rédaction. Par l'absurde, supposons que la famille est liée. Alors au moins un des vecteurs de cette **liste** est soit nul soit combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent ; ce qui est exclu.

$*$ Comme $V_n = \mathbb{C}_n[X]$, cette famille engendre $\mathbb{C}_n[X]$. Donc, étant libre, il s'agit d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

---

10. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. En écrivant que $X^k = X^k(X + (1 - X))^{n-k}$, écrire X^k comme combinaison linéaire des $(B_{n,\ell})_{0\leqslant \ell\leqslant n}$. Retrouver (1).

$*$ On écrit

$$\begin{aligned}
X^k &= X^k(X + (1-X))^{n-k} \\
&= X^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} X^\ell (1-X)^{n-k-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} X^{k+\ell}(1-X)^{n-(k+\ell)} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} X^j (1-X)^{n-j} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} \frac{1}{\binom{n}{j}} \binom{n}{j} X^j (1-X)^{n-j} = \boxed{\sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} \frac{1}{\binom{n}{j}} B_{n,j}},
\end{aligned}$$

$*$ Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. Alors, d'après les calculs ci-avant,

$$\forall k \in [\![n-\ell, n]\!],\ X^k = \mathrm{Vect}(B_{n,j})_{n-\ell\leqslant j\leqslant n}.$$

Donc

$$\mathrm{Vect}(X^j)_{n-\ell\leqslant j\leqslant n} \subset \mathrm{Vect}(B_{n,j})_{n-\ell\leqslant j\leqslant n}.$$

L'inclusion réciproque se déduit de manière semblable. D'où le résultat.

II Propriétés de la trace

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

II-A Trace et matrices de rang 1

Soit $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Dans les questions 1, 2 et 3, $n=3$**,** $U=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

1. Calculer le produit matriciel $U^\top \times V$, puis le produit $U \times V^\top$.

On vérifiera que $U^\top \times V$ *donne bien un scalaire, que l'on notera* τ*, et que* $U \times V^\top$ *donne bien une matrice, que l'on notera* M*.*

On calcule $U^{\mathsf{T}} \times V$:

$$U^{\mathsf{T}}V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 4 = 2.$$

Puis on calcule

$$UV^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

2. Résoudre les deux systèmes linéaires $MX = 0$ et $MX = \tau X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $MX = 0_{3,1}$ et $\mathcal{S}_\tau$ l'ensemble des solutions de $MX = \tau X$. On présentera les solutions à l'aide de la notation Vect*.*

Gare à vérifier l'égalité exact de l'ensemble des solutions avec l'ensemble proposé, et non une inclusion seule.

On résout $MX = 0$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\alpha - 2\beta \\ y = \beta, \ \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$). Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -3\alpha - 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \ : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

On résout $MX = 2X$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2x \\ -x - 3y - 2z = 2y \\ 2x + 6y + 4z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 5y - 2z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+2z=0 & \\ -8y-4z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 12y+6z=0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+2z=0 & \\ 2y+z=0 & L_2 \leftarrow L_2/(-4) \\ 2y+z=0 & L_3 \leftarrow L_3/6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+2z=0 & \\ 2y+z=0 & \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3x+2z=\alpha/2 \\ y=-\alpha/2 \\ z=\alpha, \ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

3. Déterminer $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_\tau$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. Si $X \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_\tau$ alors $\tau X = MX = 0_{3,1}$, puis $X = 0_{3,1}$ car $\tau \neq 0_{\mathbb{K}}$; et réciproquement. Donc $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_\tau = \{0_{3,1}\}$.

Désormais, n, U et V sont à nouveau quelconques !

4. Exprimer, à l'aide de $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ les produits $U^\top \times V$, $V^\top \times U$ et $U \times V^\top$.
On note $M = U \times V^\top$.

On remarque que

$$\boxed{U^\top \times V = V^\top U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k},$$

et que $U \times V^\top$ est la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\boxed{m_{ij} = u_i v_j}$.

5. Comparer $U^\top \times V$ et $\mathrm{tr}(M)$.

Calculons $\mathrm{tr}(M)$. $\boxed{\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = U^\top \times V}$.

On note $\tau = \mathrm{tr}(M)$.

6. Démontrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $M^p = \tau^{p-1} M$.

Qu'on donne $p \in \mathbb{N}^*$.

Voie 1 :

Par associativité du produit matriciel, $(UV^\top)^p = U(V^\top U)^{p-1} V^\top = U\tau^{p-1} V^\top$; d'où le résultat.

Voie 2 :

Procédons par récurrence. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $p = 1$ alors $M^p = \tau^{p-1}M$.

Supposons $M^p = \tau^{p-1}M$. Alors $M^{p+1} = M^pM = \tau^{p-1}M^2$. Or,

$$M^2 = UV^\top UV^\top = U(V^\top U)V^\top = \tau UV^\top = \tau M.$$

Donc $M^{p+1} = \tau^{p-1}\tau M = \tau^p M$, d'où l'hérédité et le résultat.

On suppose désormais que $\tau \neq 0$. On nomme $\mathcal{S}_0 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0_{n,1}\}$ et $\mathcal{S}_\tau = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \tau X\}$.

7. Démontrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists!(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau,\ X = X_0 + X_\tau.$$

Qu'on donne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Je cherche TOUT couple $(X_0, X_\tau) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

(Obj) $(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau$ ET $X_0 + X_\tau = X$

Je vais procéder par analyse-synthèse (par recherche de quelque condition de satisfaction).

Ainsi, je choisis, parmi tous les couples de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, un couple (X_0, X_τ), quel qu'il soit. Ce couple choisi est-il satisfaisant ?

Sans discrimination, simulant ainsi le parcourt de tous les couples.

Analyse (réduction de l'ensemble de recherche en trouvant quelque C.N.

de satisfaction). Je suppose que la condition (Obj) est satisfaite.

Inconnue en premier dans le sens de lecture.

Alors $MX_0 + MX_\tau = MX$ et $MX_0 = 0$; donc $\tau X_\tau = MX$, donc si le couple choisi est satisfaisant, alors il est nécessaire que

(CN) $X_\tau = \dfrac{1}{\tau} MX \quad \text{ET} \quad X_0 = X - X_\tau$

Synthèse (continuation dans l'ensemble réduit de recherche pour obtenir satisfaction). Je suppose la condition condition (CN) est satisfaite. Alors

▷ d'abord, $\boxed{X = X_0 + X_\tau}$,

▷ ensuite, $MX_\tau = \dfrac{1}{\tau} M^2 X = \dfrac{1}{\tau} \tau MX = \tau X_\tau$; donc $\boxed{X_\tau \in \mathcal{S}_\tau}$;

▷ enfin, $MX_0 = MX - MX_\tau = MX - \tau X_\tau = MX - \tau \dfrac{1}{\tau} MX = 0_{3,1}$, donc $\boxed{X_0 \in \mathcal{S}_0}$.

Conclusion. Pour satisfaire la condition (Obj), la condition (CN) est à la fois nécessaire et suffisante, autrement dit, ces deux conditions sont équivalentes. J'en conclus qu'il existe exactement un couple satisfaisant à la condition (Obj). QED !

Autre rédaction possible. Qu'on donne $(X_0, X_\tau) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Unicité (au plus un). Je suppose que

$(\mathscr{U})$ $(X_0, X_\tau) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_\tau \quad \text{ET} \quad X_0 + X_\tau = 0_{n,1}$.

Alors, appliquant $X \mapsto MX$, j'obtiens $\tau X_\tau = 0_{n,1}$; donc $X_\tau = 0_{n,1}$. Puis la relation $(\mathscr{U})$ donne $X_0 = 0_{n,1}$.

Comme S_0 et S_τ sont deux sous-groupes de $(\mathcal{M}_{n,1}, +)$; j'ai démontré l'unicité.

Existence (au moins un). Je suppose que

$$(\mathscr{E}) \quad X_\tau = \frac{1}{\tau} MX \quad \text{ET} \quad X_0 = X - X_\tau$$

Alors

▷ d'abord, $\boxed{X = X_0 + X_\tau}$,

▷ ensuite, $MX_\tau = \frac{1}{\tau} M^2 X = \frac{1}{\tau} \tau MX = \tau X_\tau$; donc $\boxed{X_\tau \in \mathcal{S}_\tau}$;

▷ enfin, $MX_0 = MX - MX_\tau = MX - \tau X_\tau = MX - \tau \frac{1}{\tau} MX = 0_{3,1}$, donc $\boxed{X_0 \in \mathcal{S}_0}$.

Remarque : Comme, $M^2 = \tau M$, le polynôme $(Z-0)(Z-\tau)$ de $\mathbb{K}[Z]$ est annulateur de M, et $1 = \frac{1}{\tau}(Z-0) + \frac{-1}{\tau}(Z-\tau)$. Donc, à l'instar de ce qu'on a fait pour les endomorphismes idempotents ou involutifs, on vient de montrer que la somme des noyaux $\operatorname{Ker}(M - 0.\mathrm{I}_n)$ et $\operatorname{Ker}(M - \tau \mathrm{I}_n)$ est directe et égale à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tout entier ; les projections associées à cette décomposition de l'espace étant égales à $\frac{1}{\tau}(M - 0.\mathrm{I}_n)$ et à $\frac{-1}{\tau}(M - \tau \mathrm{I}_n)$ respectivement. On a assimilé ici toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé.

8. Démontrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists \alpha \in \mathbb{K},\ MX = \alpha U$. Déterminer MU en fonction de U, de V, de τ. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\tau$.

On n'a pas exigé de déduire cela de ce qui précède.

A cet instant présent, je vise à trouver, parmi les éléments de $\mathbb{K}$, au moins un élément α tel que $\alpha U = MX$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(1°) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $MX = UV^\top X = U(V^\top X) = \alpha U$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ vérifie $\alpha = V^\top X$.

(2°) Ainsi, $\boxed{MU = \tau U}$. Donc $U \in \mathcal{S}_\tau$; puis $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathcal{S}_\tau$ car $\mathcal{S}_\tau$ est stable par multiplication externe.

(3°) Soit $X \in \mathcal{S}_\tau$. Alors $\tau X = MX$; donc $X = \lambda U$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est égal à $(V^\top X)/\tau$ d'après (1°), car $\tau \neq 0_{\mathbb{K}}$.

D'où, $\boxed{\mathcal{S}_\tau = \mathrm{Vect}(U).}$

II-B Une caractérisation de la trace

9. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

C'est une question de cours !

Soit maintenant une application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Si $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui vaut 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} \overset{\text{def.}}{=} 1_{\{(a,b)\}}(i,j) = \delta_{i,a}\delta_{b,j}.$$

10. Que vaut $\varphi(0_n)$?

Voie naïve (*sans les CMCR*) :

On a $\quad 0_n = 0_n + 0_n$; donc $\varphi(0_n) = \varphi(0_n) + \varphi(0_n)$; donc $\varphi(0_n) = 0$.

Aussi, $\quad 0_n = 0_n + (-1).0_n$; donc $\varphi(0_n) = \varphi(0_n) + (-1).\varphi(0_n) = 0$.

Aussi, $\quad 0_n = 0.0_n$; donc $\varphi(0_n) = 0.\varphi(0_n) = 0$.

Voie savante (*avec les CMCR*) :

On a $\quad \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$,

$\left(i.e. (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +) \to (\mathbb{K}, +),\ M \mapsto \varphi(M) \text{ est un homomorphisme} \right)$;

donc $\varphi(0_n) = 0$.

Aussi, $\quad \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$; donc $\varphi(0_n) = 0$.

---

11. Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. En exprimant $\varphi(E_{a,b}E_{b,b})$ de deux manières différentes, montrer que $\varphi(E_{a,b}) = 0$.

On sait que $E_{a,b}E_{b,b} = E_{a,b}$, alors que $E_{b,b}E_{a,b} = 0_n$, car $b \neq a$. Donc

$$\boxed{\varphi(E_{a,b}) = \varphi(E_{a,b}E_{b,b}) = \varphi(E_{b,b}E_{a,b}) = \varphi(0_n) = 0}.$$

---

12. Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $a \neq b$. Démontrer que $\varphi(E_{a,a}) = \varphi(E_{b,b})$.

On pourra introduire les matrices $E_{a,b}$ et $E_{b,a}$

On remarque que $E_{a,b}E_{b,a} = E_{a,a}$ et $E_{b,a}E_{a,b} = E_{b,b}$. Donc

$$\boxed{\varphi(E_{a,a}) = \varphi(E_{a,b}E_{b,a}) = \varphi(E_{b,a}E_{a,b}) = \varphi(E_{b,b})}.$$

13. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A).$$

Je vise à trouver, parmi les éléments de $\mathbb{K}$, au moins un élément λ tel que ...

Posons $\boxed{\lambda = \varphi(E_{1,1})}$. Alors par la question précédente, $\varphi(E_{i,i}) = \lambda$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$. Donc

$$\varphi(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\varphi(E_{ij}).$$

Or, $\varphi(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$ et λ si $i = j$, donc

$$\boxed{\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda = \lambda\,\mathrm{tr}(A)}.$$

D'où le résultat !

II-C Matrices semblables

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

14. Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.

Soient A et B deux matrices semblables. Alors on choisit P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}(PB)) = \mathrm{tr}(B)}$.

---

15. Soient A et B deux matrices semblables. Démontrer que si B est scalaire (i.e. $\exists\lambda \in \mathbb{K},\ B = \lambda I_n$), alors $A = B$. Démontrer que si B est inversible, alors A est inversible (et préciser son inverse).

Inversibilité : $xx' = e$ *ET* $e = x'x$.

A et B sont semblables donc on trouve P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

▷ si B est scalaire, on trouve $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B = \lambda I_n$. Alors

$$\boxed{A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n}.$$

▷ si B est inversible, comme P^{-1}, P et B sont inversibles, $A = PBP^{-1}$ est inversible et $\boxed{A^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}}$.

16. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente si, et seulement si, il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. Démontrer que si A est nilpotente et est semblable à B, alors B est nilpotente (*s'il y a un raisonnement par récurrence, on le rédigera avec soin*).

A est nilpotente donc on trouve k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$. De plus, A est semblable à B donc $A = PBP^{-1}$. Alors $B = P^{-1}AP$.

Montrons par récurrence sur s que pour tout s dans $\mathbb{N}$, $B^s = P^{-1}A^sP$.

Initialisation. Si $s = 0$, $B^0 = I_n$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_nP = I_n$.

Hérédité. Si, pour un certain s, $B^s = P^{-1}A^sP$, alors

$$B^{s+1} = B^s \times B = P^{-1}A^sPP^{-1}AP = P^{-1}A^sI_nAP = \boxed{P^{-1}A^{s+1}P,}$$

d'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

Aussi, pour tout s dans $\mathbb{N}^*$, $(P^{-1}AP)^sP^{-1}P = P^{-1}(APP^{-1})^sP$ d'après l'associativité générale (composée multinaire d'algèbre générale).

$\boxed{\text{On en déduit que } B^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}0_nP = 0_n. \text{ Donc } B \text{ est nilpotente !}}$

17. Donner deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui soient de traces égales mais qui ne soient pas semblables.

Prenons $A = 0_2$ et $B = E_{1,2}$. Alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$; mais A est scalaire et B n'est pas égale à A, donc B n'est pas semblable à A.

D'après ce qui précède, il suffisait de choisir :

- ▷ soit une première matrice scalaire puis une dernière matrice distincte de la première mais de même trace.
- ▷ soit une première matrice inversible puis une matrice non inversible mais de même trace.
- ▷ soit une première matrice nilpotente puis une matrice non non nilpotente mais de même trace.

Ainsi, voici deux autres couples qui conviennent : $(\mathrm{I}_2 + 2025E_{1,2}\,;\, 2E_{1,1})$ et $(E_{2,1}\,;\, E_{2,1} + E_{1,2})$.

On va dans cette partie démontrer le résultat suivant : toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

18. Un exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 6 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible, calculer P^{-1} et montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

À l'aide d'un pivot de Gauss, on remarque que P est inversible d'inverse

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

On calcule alors

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}},$$

qui est de diagonale nulle.

On admet que la propriété suivante.

Propriété. *A est semblable à B si, et seulement si, on peut passer de A à B par un enchaînement d'opération élémentaires simultanées sur les lignes **et** les colonnes parmi les trois sortes suivantes :*

- ▷ *une **double** transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ **ET** $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.*
- ▷ *une **double** dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **ET** $C_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} C_i$.*
- ▷ *une **double** permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ **ET** $C_j \leftrightarrow C_i$.*

En d'autres termes on a $B = PAP^{-1}$ avec P un produit de matrices de transvection, dilatation ou permutation.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -21 & -7 \end{pmatrix}$ comme le prouve les deux opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ **ET** $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$. **qu'on effectue en même temps**.

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

19. Si A est une matrice scalaire que dire de A ?

Si A est une matrice scalaire, on trouve $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Alors $\operatorname{tr}(A) = n\lambda$. Donc si A est de trace nulle, $\lambda n = 0$ donc $\lambda = 0$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est nulle.}}$

---

20. On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix},$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est de trace nulle, où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

On pourra commencer par traiter le cas où la première ligne de A comporte un coefficient non nul qui n'est pas en position $(1,1)$; puis se ramener à ce cas en discutant selon si A est diagonale ou non.

Si A est une matrice scalaire, alors A est nulle d'après ce qui précède, et il n'y a rien à faire. Pour la suite, supposons que A n'est pas scalaire. Procédons en deux temps.

$*$ D'abord, supposons que la première ligne de A comporte un coefficient non nul qui n'est pas en position $(1,1)$. Nommons a le coefficient $(1,1)$ et b un coefficient non nul sur la première ligne pas en position $(1,1)$. Supposons qu'il soit en $(1,j)$ avec $j \neq 1$.

On effectue alors la double transvection $L_i \leftarrow L_i + \dfrac{a}{b} L_1$ (dont on se moque de l'effet), **puis** $C_1 \leftarrow C_1 - \dfrac{a}{b} L_i$. Cette opération a pour effet d'amener un coefficient nul en position $(1,1)$, et le résultat est donc démontré !

$*$ Ensuite, montrons que A est semblable à une matrice avec un coefficient non nul sur la première ligne et pas à la position $(1,1)$. Ce qui fera conclure d'après le traitement ci-avant.

- ▷ Supposons que A est diagonale. Comme A n'est pas scalaire, choisissons i tel que le coefficient (i,i), notons sa valeur b, soit différent du coefficient $(1,1)$, dont on note la valeur a. On effectue la double transvection $L_1 \leftarrow L_1 - L_i$ et $C_i \leftarrow C_i + C_1$. On obtient alors en position $(1,i)$ le coefficient $a - b \neq 0$.
- ▷ Supposons que A n'est pas diagonale. Choisissons alors une position (i,j), où $i \neq j$, dont le coefficient est non nul. Appelons a la valeur de ce coefficient. Effectuons la double permutation $L_i \leftrightarrow L_1$ et $C_i \leftrightarrow C_1$. On amène donc a en position $(1,j)$ par la première opération, puis ce coefficient n'est pas affecté par la deuxième comme $i \neq j$!

Donc A est semblable à une matrice avec un coefficient non nul sur la première ligne et pas en position $(1,1)$.

---

21. En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
On pourra procéder par récurrence sur n.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}_n : \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(A) = 0 \Rightarrow A$ est semblable à une matrice de diagonale nulle..

Initialisation. Si $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, de trace nulle, alors, comme A n'a qu'un coefficient, A est nulle, donc semblable à une matrice de diagonale nulle.

Hérédité. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain n. Soit alors A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, de trace nulle. Alors, par la question précédente, A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$ où A' est une matrice de taille $n \times n$ de trace nulle, où L est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que l'on trouve $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$.

Par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice de diagonale nulle, donc on trouve $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QA'Q^{-1}$ est de diagonale nulle. Posons alors $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$. Alors R est inversible d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Mais $R \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & LQ^{-1} \\ QC & B \end{pmatrix}$ qui est de diagonale nulle. Donc $RPAP^{-1}R^{-1} = (RP)A(RP)^{-1}$ est de diagonale nulle. D'où l'hérédité et le résultat !

***

DEBUT ↖