

FIN ↘

TD19 ESPACES DE DIMENSIONS FINIES (avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\},$$

$$G = \text{vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

1. Calculer la dimension de F .

On détermine la dimension de F en échelonnant le système d'équations linéaire qui décrit F :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \alpha \\ z = \beta \\ y = -z - t = -\alpha - \beta \\ x = -y - z = \alpha \end{cases}$$

Donc $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec u et v non colinéaires, donc $\dim(F) = 2$.

Remarque : avec la fin du cours sur la dimension, on aurait pu s'arrêter sur le fait d'être décrit par deux équations non proportionnelles en dimension 4 pour dire que l'on était de dimension $4 - 2 = 2$ (théorème du rang).

2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.

Comme G est défini par un Vect, il suffit de montrer que tous les vecteurs qui définissent G vérifient le système d'équations de F (je vous laisse le vérifier). Donc $G \subset F$. Donc $\dim(G) \leq 2$. Mais G contient deux vecteurs non colinéaires (les deux premiers par exemple), donc $\dim(G) \geq 2$. Donc $\dim(G) = 2$, donc $G \subset F$ et $\dim(G) = \dim(F)$, donc $F = G$.

3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Il suffit pour déterminer un supplémentaire de compléter la base de F trouvée avec deux vecteurs de la base canonique (on sait que deux vecteurs de la base canonique fonctionneront). Comme le système est échelonné en colonnes, on voit que e_3, e_4 complètent bien la base (u, v) de F . Donc $\text{Vect}(e_3, e_4)$ est bien un supplémentaire de F .

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$. A-t-on $F \cup G = E$?

Démontrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Déjà, $F \cup G \neq E$ car sinon, $F \cup G$ serait un espace vectoriel, donc on aurait $F \subset G$ ou $G \subset F$, donc $F \cup G$ serait de dimension $n - 1$, donc pas égal à E .

Soit alors $x \notin F \cup G$. Alors $x \notin F$ et F est un hyperplan, donc $F \oplus \text{Vect}(x) = E$. De même $G \oplus \text{Vect}(x) = E$. Donc F et G ont un supplémentaire commun.

2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

On démontre le résultat par **récurrence sur** $k = n - p$. (on dit parfois « par récurrence descendante »)

Initialisation : pour $n - p = 1$, i.e. $p = n - 1$, le résultat a été démontré à la question précédente.

Hérédité : si on suppose le résultat démontré pour un certain k , on démontre qu'il est vrai pour $k + 1$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions $n - k - 1$. Alors $F \cup G \neq E$ (par le même argument qu'à la question 1). Soit alors x dans $E \setminus (F \cap G)$. Alors $F \oplus \text{Vect}(x)$ et $G \oplus \text{Vect}(x)$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension $n - k$, donc, par hypothèse de récurrence, $F \oplus \text{Vect}(x)$ et $G \oplus \text{Vect}(x)$ admettent un supplémentaire commun H , i.e. on dispose d'un sous-espace vectoriel H telle que $F \oplus \text{Vect}(x) \oplus H = G \oplus \text{Vect}(x) \oplus H = E$, donc $\text{Vect}(x) \oplus H$ est un supplémentaire commun à F et à G .

D'où l'hérédité, et le résultat.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on illustre la notion de dimension dans $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Démontrer que $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(1°) D'abord, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension égale à $n + 1$.

(2°) Puis, cette famille est composée de $n + 1$ vecteurs.

(3°) Enfin, elle est libre. En effet, posons $B_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors B_n est non nul, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k < n$ alors X^{k+1} ne divise pas B_k , alors que X^{k+1} divise toute combinaison linéaire des B_j pour $k + 1 \leq j \leq n$; donc B_k n'est pas une combinaison linéaire de ces polynômes.

2. Soit n dans $\mathbb{N}$. Démontrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(1°) Chacune des applications coordonnées de φ est linéaire en tant qu'évaluation en un point; donc φ est bien une application linéaire.

(2°) Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors P admet pour racines les $n + 1$ éléments distincts $0, 1, \dots, n$ de $\mathbb{R}$; or $\deg(P) < n + 1$; donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. C'est que φ est injective.

(3°) D'où le résultat.

(4°) Aussi, φ est bien définie comme application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Puis comme $(0; 1; \dots; n)$ est une liste de points distincts et au nombre de $n + 1$, d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, φ est bijective. De plus, φ est linéaire, donc le résultat suit.

3. Soit E un $\mathbb{K}$ -evdf, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les formes linéaires coordonnées associées. Démontrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Application. Démontrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \lambda_{n-1} P\left(\frac{n-1}{n}\right) + \lambda_n P(1).$$

(1°) Je montre que cette famille est génératrice.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Soit $x \in E$. Alors, par définition,

$$x = \phi_1(x)e_1 + \dots + \phi_n(x)e_n.$$

Comme f est linéaire et que les $\phi_i(x)$ sont des scalaires,

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi_1(x)f(e_1) + \dots + \phi_n(x)f(e_n) \\ &= (\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n)(x). \end{aligned}$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Cela étant quel que soit $x \in E$, il s'en suit que

$$f = \lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n.$$

J'ai montré que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), f \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Objectif atteint !

(2°) Je montre que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Je suppose que

$$\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}.$$

Alors, en évaluant en e_1 , on trouve

$$\lambda_1 \delta_{1,1} + \dots + \lambda_n \delta_{n,1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Donc $\lambda_1 = 0$. Idem, en évaluant en e_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on trouve $\lambda_i = 0$.

Objectif avoué et atteint !

(3°) D'où, en vertu de (1°) et (2°), $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est bien une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(4°) Quant à l'application $P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$, il s'agit d'un élément de l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ en vertu de la linéarité de l'intégrale.

En vertu du théorème d'interpolation de Lagrange, on dispose de l'isomorphisme $T : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto \left(P(0), P\left(\frac{1}{n}\right), \dots, P\left(\frac{n-1}{n}\right), P(1) \right)$.

Donc, tout élément de l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ s'exprime comme la composée de T suivi d'un certain élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ (lequel est unique). Avec les notations précédentes, c'est qu'en prenant pour E l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ et en considérant sa base canonique, les formes linéaires $\phi_i \circ T$ constituent une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Autre considération. L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ est de dimension égale à $n + 1$. Or les $n + 1$ formes linéaires $\phi_i \circ T : P \mapsto P(i/n)$, pour $0 \leq i \leq n$, sont linéairement indépendantes comme le prouve la

base de Lagrange associée à la liste croissante de ces points d'évaluations. Donc elles constituent une base sur $\mathbb{R}$ de l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Dernière considération. Pour tout $i \in \{0; 1; \dots; n\}$, posons

$$\begin{aligned}\lambda_i &:= \int_0^1 \frac{\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (t - k/n)}{\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (i/n - k/n)} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{nt - k}{i - k} dt.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule d'interpolation de Lagrange, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \lambda_{n-1} P\left(\frac{n-1}{n}\right) + \lambda_n P(1).$$

Exercice 4 (Endomorphismes nilpotents). Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit *nilpotent* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, où $u^k = \text{Id} \circ \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$. Soit u un endomorphisme nilpotent.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\text{Id} - u$ est inversible.

Deux possibilités.

- (Newton) On va trouver un polynôme annulateur de terme constant non nul. On sait que $u = u - \text{Id} + \text{Id}$. Or, $u^k = 0$, donc $(u - \text{Id} + \text{Id})^k = 0$, donc

$$0 = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (u - \text{Id})^i,$$

donc

$$\text{Id} = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (u - \text{Id})^i = (u - \text{Id}) \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (u - \text{Id})^{i-1},$$

donc $u - \text{Id}$ est inversible d'inverse $\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (u - \text{Id})^{i-1}$, donc $\text{Id} - u$ aussi.

- (Bernoulli) On sait que

$$\text{Id} = \text{Id} - u^k = (\text{Id} - u) \circ (\text{Id} + u + u^2 + \dots + u^{k-1}),$$

donc $\text{Id} - u$ est inversible d'inverse $\text{Id} + u + u^2 + \dots + u^{k-1}$.

2. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $u^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de u .

La partie $A = \{j \in \mathbb{N}, u^j = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p .

3. On veut montrer que $p \leq n$ (où p est l'indice de nilpotence de u). Pour ce faire, on définit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier k , $N_k \subset N_{k+1}$ et que s'il existe k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell \geq k_0$, $N_\ell = N_{\ell+1}$. Conclure.

(1°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Je montre que $N_k \subset N_{k+1}$.

Soit $x \in E$. Je suppose que $x \in N_k$. Alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$; donc $x \in N_{k+1}$. C'est fait !

(2°) Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Je suppose que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ vérifiant $\ell \geq k_0$. Je montre que $N_\ell = N_{\ell+1}$.

Soit $x \in E$. Je suppose que $x \in N_{\ell+1}$. Je définis $y \in E$ par $y = u^{\ell-k_0}(x)$, en sorte que $u^{k_0}(y) = u^\ell(x)$. Alors, comme $x \in N_{\ell+1}$, $y \in N_{k_0+1}$. Or $N_{k_0+1} = N_{k_0}$; donc $y \in N_{k_0}$. D'où $\boxed{x \in N_\ell}$. Ainsi, $N_\ell \supset N_{\ell+1}$. C'est fait !

(3°) Par l'absurde, je suppose que $p > n$. Alors $p \geq 1$. Comme $N_p = E$ et $N_{p-1} \neq E$, d'après (2°),

$$\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{p-1} \subsetneq N_p = E.$$

L'espace étant de dimension finie, les sous-espaces N_k sont de dimensions finies. Puis

$$\forall k \in \{0; 1; \dots; p-1\}, \dim(N_{k+1}) - \dim(N_k) \geq 1.$$

En sommant, j'obtiens $\dim(N_p) - \dim(N_0) \geq p$. Donc $\dim(E) > n$. Absurde !

4. Retrouver le même résultat en démontrant que si x est un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.
-

Je suppose que $n = 0$, alors $p = 0$, donc $p \leq n$.

Je suppose que $n \geq 1$. Alors $\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_p = E$; donc $p \geq 1$, puis $N_{p-1} \subsetneq E$. Soit alors $x \in E \setminus N_{p-1}$. Alors

(1°) $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.

(2°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Je suppose que $p-1 > k$. Alors toute combinaison linéaire des vecteurs $u^\ell(x)$, pour $p-1 \geq \ell \geq k+1$, est annulée par u^{p-1-k} , ce qui n'est pas le cas du vecteur $u^k(x)$. Donc

$$p-1 > k \Rightarrow \text{Vect}(u^{p-1}(x), \dots, u^{k+1}(x)) \not\ni u^k(x).$$

(3°) Ainsi, la famille $(u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \dots, u^1(x), u^0(x))$ est libre.

(4°) Ainsi, l'espace E admet une famille libre finie de cardinal égal à p . Donc, en vertu du lemme fondamental de la dimension, $p \leq n$.

Stratégie. Pour ce TD encore davantage que pour les autres, **ciblez vos besoins**. Je vous conseille de jauger votre niveau de compréhension de l'algèbre linéaire en dimension finie.

- si vous avez des difficultés en algèbre linéaire, lancez-vous sur des exercices **pratiques**, qui font appliquer petit à petit les théorèmes de cours : 5, 6, 12 et 13.

- ensuite, familiarisez-vous avec d'autres exemples : des polynômes (7, 8, 14, 15, 16) ou des matrices (9).
- enfin, n'hésitez pas à faire des exercices théoriques, c'est-à-dire les exercices 10, 11, puis des exercices théoriques sur les applications linéaires : 17, 19, 20, 21, 22.
- les exercices sur les formes linéaires sont un peu plus rares, mais faites quand même l'exercice 23.

Mon best of. Ce sont les exercices que je considère parmi les plus importants. Mais ne grillez pas d'étape et familiarisez-vous bien avec les notions ! Ce sont les exercices 8, 9, 11, 16, 17, 20, 22, 23. Dans ce best-of, je n'ai pas mis les exercices de base. **Encore une fois, je me répète, mais maîtrisez les bases avant de vous lancer dans ces exercices !**

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Aspects pratiques

Exercice 5. ●○○ Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F , une base de G , en déduire leurs dimensions respectives.

Ici F et G sont définis par une seule équation, donc pour en trouver une base, deux méthodes sont possibles : on va en utiliser une pour F et l'autre pour G .

- **Première méthode (on l'applique à F).** Compléter l'équation : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \beta, \beta \in \mathbb{R}, \\ x = 2\beta - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v)$$

$$\text{où } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc F est de dimension 2.

- **Deuxième méthode (on l'applique à G).** G est défini par une équation non nulle en dimension 3, donc (cf. partie sur les formes linéaires) $\dim(G) = 2$. Donc si on trouve deux vecteurs non colinéaires de G , on aura gagné. Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc (u, w) est une base de G .

2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.

Là aussi, deux méthodes : la « standard » et une un peu plus astucieuse (mais qui montre que l'on a bien compris la notion de dimension).

- La méthode standard consiste à, pour une intersection, réunir les deux équations qui définissent les sous-espaces vectoriels correspondants. Ainsi, un système d'équations de $F \cap G$ est

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ x = -\alpha \end{cases}$$

Donc $F \cap G = \text{Vect}(u)$, où u a déjà été défini plus tôt !

- La méthode astucieuse consiste à dire que l'on voit clairement que $u \in F \cap G$ donc $F \cap G$ est

de dimension ≥ 1 et que, comme $F \neq G$ (on voit que $v \notin G$), alors $F \cap G$ est de dimension ≤ 1 , donc $F \cap G$ est de dimension $= 1$, donc $F \cap G = \text{Vect}(u)$.

3. Déterminer $F + G$.

Là encore, on a de nombreuses possibilités :

- La méthode standard consiste à **concaténer** les vecteurs de base de F et G , i.e. (u, v, w) : puis on échelonne ce système pour en déterminer son rang.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc le système est échelonné avec trois pivots, donc il est libre, donc la famille de ces trois vecteurs en dimension 3 est libre, donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $F + G = \mathbb{R}^3$. **Attention !**

La famille obtenue après échelonnement des lignes n'a aucune raison d'être génératrice de $F + G$. J'ai juste fait cet échelonnement sur les lignes pour montrer qu'on pouvait aussi déterminer le rang de cette manière.

- On aurait pu aussi écrire **beaucoup plus simplement** que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Non, car leur intersection n'est pas réduite à 0 !

Exercice 6. ●○○ On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F .

Déterminons une base de F en échelonnant le système linéaire et en posant les paramètres nécessaires.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Posons $z = \alpha$, $t = \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $y = \alpha$, $x = -\alpha$, donc l'ensemble des solutions est

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v),$$

où $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 0, 1)$.

2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

On remarque que (u, v) forme un début de base échelonnée. Si l'on prend $w = (0, 1, 0, 0)$ et $s = (0, 0, 1, 0)$, alors la famille (u, w, s, v) est échelonnée dans $\mathbb{R}^4$, donc libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

On remarque que l'on va devoir déterminer une base d'une intersection dans les questions

suivantes. Pour gagner du temps, échelonnons déjà le système en lignes avec des conditions de compatibilité

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 3 & -1 & z \\ 1 & 4 & 0 & t \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \\ 0 & 3 & 1 & t-x \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & x-2y+z \\ 0 & 0 & -2 & 2x-3y+t \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & x-2y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y-z+t \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Donc la famille est de rang 3, donc libre.

4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 . Quelle est la dimension de G ? Donner une équation de G .

Par le calcul précédent, la dimension de G est 3 et une équation en est $x - y - z + t = 0$.

5. Donner une base de $F \cap G$.

Pour déterminer une base de $F \cap G$, on rassemble les équations trouvées, et on échelonne le

système obtenu

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{array} \right. &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2y - z + t = 0 \end{array} \right. \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -3z + t = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Étant donnée la dernière équation, on peut poser indifféremment z ou t comme paramètre. Soyons malins et posons $z = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des solutions est

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(-1, 1, 1, 3).$$

Donc $F \cap G$ est de dimension 1.

6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Par la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$, donc $(F + G)$ est de dimension 4 dans $\mathbb{R}^4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

On a existence, en revanche, on n'a pas unicité, car on n'a pas liberté de la famille.

2.2 Bases et dimension finie

Exercice 7. ●○○ Montrer que la famille $(X^3 - 2X + 1, X^3 + 2X, X^2 - 1)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$, et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Notons $P = X^3 - 2X + 1$, $Q = X^3 + 2X$ et $R = X^2 - 1$. Soient λ, μ, ν tels que

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0.$$

Alors

$$X^3(\lambda + \mu) + X^2\nu + 2X(\mu - \lambda) + \lambda - \nu = 0,$$

donc $\nu = 0$ (terme en X^2) et donc $\lambda = 0$ (terme constant) et donc $\mu = 0$ (terme en X^3), donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc la famille est libre.

On sait que $(P, Q, R, 1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ (car la famille contient la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$). On peut donc la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ en prenant un vecteur de la base canonique.

Si on prend X par exemple, on remarque que $\lambda P + \mu Q + \nu R + \zeta X = 0$ implique de la même manière que $\lambda = \mu = \nu = 0$, puis, en regardant le terme en X , $\zeta = 0$. Donc (P, Q, R, X) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 8. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on définit

$$B_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Montrer que $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On remarque que la famille $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ contient $n + 1$ vecteurs, dans un espace de dimension $n + 1$. Il suffit donc de vérifier que la famille est libre.

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de $n + 1$ réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k B_k = 0$. Alors, en évaluant en 0, on remarque

que $B_k(0) = 1$ si $k = 0$, 0 sinon. Donc $a_0 = 0$. Donc

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n = 0.$$

En dérivant l'expression, et en évaluant en 1, on remarque que, comme 0 est racine simple de B_1 et racine multiple de tous les autres polynômes,

$$a_1 B_1'(0) = 0,$$

donc, comme $B_1'(0) \neq 0$, $a_1 = 0$. Puis on démontre par récurrence sur k que $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$.

L'initialisation vient d'être faite.

Pour l'**hérédité**, supposons que pour un certain k , on ait $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$. Alors la relation de liaison s'écrit

$$a_{k+1} B_{k+1} + \cdots + a_n B_n = 0.$$

Or, 0 est racine de multiplicité k de B_{k+1} et de multiplicité $\geq k+1$ de $B_{k+2}, \dots, B_n$, donc, en dérivant k fois l'égalité et en évaluant en 0,

$$a_{k+1} B_{k+1}(k)(0) = 0,$$

donc, comme $B_{k+1}(k)(0) \neq 0$, $a_{k+1} = 0$.

D'où l'hérédité et la proposition par récurrence. Donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, donc la famille $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc elle en est une base.

Exercice 9. ●●○ Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0$.

(on rappelle que si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d$, et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P(M) = a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_d M^d$).

On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$. Donc la famille $I_n, M, \dots, M^{n^2}$, qui contient $n^2 + 1$ éléments, est nécessairement liée. Donc on dispose de $a_0, \dots, a_{n^2}$ $n^2 + 1$ réels tels que

$$a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_{n^2} M^{n^2} = 0,$$

i.e. $P(M) = 0$, avec $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$.

2.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 10. ●○○ Soit E un evdf, soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ $2n$ vecteurs de E tels que la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est libre. Montrer que $\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq n$.

On utilise le fait que l'on peut faire des opérations sur les vecteurs lorsque l'on détermine un Vect :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \text{Vect}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, y_1, \dots, y_n) \supset \text{Vect}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

donc

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) \geq \dim(\text{Vect}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)) = n,$$

car la famille est libre.

Exercice 11. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G admettent au moins un vecteur non nul en commun.

On sait que $F+G \subset E$, donc $\dim(F+G) \leq \dim(E)$. Or, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, donc $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leq \dim(E)$, donc $\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) > 0$, donc $F \cap G \neq \{0\}$, donc $F \cap G$ contient un vecteur, i.e. F et G ont un vecteur en commun.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Aspects pratiques

Exercice 12. ●○○ Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ x_1 = -2\alpha \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(u) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?

u n'est pas injectif car son noyau n'est pas réduit à 0. Il ne peut être surjectif car c'est un endomorphisme, et qu'un endomorphisme est injectif ssi il est surjectif ssi il est bijectif.

2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?

On sait que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(-2e_1 + 2e_3, 3e_2, -4e_1 + 4e_3)$.

3. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 13. ●○○ On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

On sait que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

On remarque que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$, de dimension 2 car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.

On résout $f(x, y, z) = 0$ d'inconnues x, y et z , i.e.
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
 On pourrait résoudre ce système mais on remarque que, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$, donc il suffit de trouver un vecteur non nul du noyau pour en avoir une base. Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution du système. Donc $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

On en déduit que l'application n'est ni injective, ni surjective !

3.2 Exemples avec des polynômes

Exercice 14. ●●○ On définit sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'application

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .

Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$. Alors $\deg(u(P)) \leq \max(\deg(P), \deg((1-X)P')) = 3$. Donc $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Ensuite, soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(P + (1 - X)P') + \mu(Q + (1 - X)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$\begin{aligned} u(P) &= aX^3 + bX^2 + cX + d + (1 - X)(3aX^2 + 2bX + c) \\ &= aX^3 + bX^2 + cX + d + 3aX^2 + 2bX + c - 3aX^3 - 2bX^2 - cX \\ &= -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + d + c. \end{aligned}$$

Donc

$$u(P) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ et } d = -c.$$

Donc $\ker(u) = \{c(X - 1), c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X - 1)$.

3. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)) \\ &= \text{Vect}(1, 1, -X^2 + X, -2X^3 + 3X^2) \\ &= \text{Vect}(1, -X^2 + X, -2X^3 + 3X^2). \end{aligned}$$

Comme, par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u)) = 4 - 1 = 3$ et que $(1, -X^2 + X, -2X^3 + 3X^2)$ est

une famille génératrice de $\text{Im}(u)$ de cardinal 3, c'en est une base.

4. Montrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

On concatène les bases trouvées de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$: $(1, X - 1, -X^2 + X, -2X^3 + 3X^2)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, donc libre, de cardinal 4 dans $\mathbb{R}_3[X]$, donc la famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 15. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n + 1$. On définit l'application $\phi : E \rightarrow E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B .

1. Démontrer que ϕ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes, λ et μ deux réels. Soient (U, R) le quotient et le reste de la division euclidienne de AP par B et (V, S) le quotient et le reste de la division euclidienne de AQ par B . Alors $AP = UB + R$ et $AQ = VB + S$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ et $\deg(S) < \deg(B)$.
Donc

$$A(\lambda P + \mu Q) = (\lambda U + \mu V)B + \lambda R + \mu S,$$

et $\deg(\lambda R + \mu S) \leq \max(\deg(R), \deg(S)) < \deg(B)$. Donc, par unicité du reste dans la division euclidienne, $\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q) = \lambda R + \mu S = \phi(\lambda P + \mu Q)$. D'où la linéarité de ϕ .

2. Démontrer que ϕ est bijective si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

Supposons A et B premiers entre eux.

Comme ϕ est un endomorphisme, il suffit donc d'étudier son injectivité. Soit P un élément de $\ker(\phi)$. Alors $\phi(P) = 0$, i.e. B divise AP . Donc, par le théorème de Gauss, B divise P . Or $\deg(P) \leq n < \deg(B)$. Donc nécessairement P est nul. Donc ϕ est injective, donc bijective.

Supposons que A et B ne sont pas premiers entre eux. Soit U un diviseur commun non constant de A et B , posons $A = UA_1$ et $B = UB_1$. Alors $\deg(B_1) < \deg(B)$ donc $B_1 \in E$ et $AB_1 = A_1UB_1 = A_1B$ donc $\phi(B_1) = 0$, avec $B_1 \neq 0$. Donc ϕ n'est pas injective, donc pas bijective.

Exercice 16 (Interpolation d'Hermite). ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ points de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(x_k) = P(x_k) \text{ et } f'(x_k) = P'(x_k).$$

On considèrera pour cela une application linéaire judicieusement choisie.

Montrons que l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \\ P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), P(a_1), P'(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_n)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- Déjà Ψ est linéaire par linéarité de la dérivation.
- Ensuite, $\dim(\mathbb{R}_{2n+1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^{2n+2})$.
- Enfin, montrons que Ψ est injective. Soit P dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P(a_0) = P'(a_0) = P(a_1) = P'(a_1) = \dots = P(a_n) = P'(a_n) = 0$. Alors $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $n+1$ racines de multiplicité au moins 2. Donc P a au moins $2(n+1) = 2n+2$ racines comptées avec multiplicité, et est de degré $2n+1$. Donc $P = 0$. D'où le résultat.

3.3 Généralités

Exercice 17. ●○○ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

1. Établir $\text{Im} f^2 = \text{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.

• Image.

- Montrons que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Soit y dans $\text{Im}(f^2)$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$ donc $y \in \text{Im}(f)$.
- Ensuite, $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$ donc $\dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Im}(f))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

• Image.

- Montrons que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Soit x dans $\ker(f)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker(f^2)$.
- Ensuite, $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$ donc, par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = \dim(E) - \text{rg}(f^2) = \dim(\ker(f^2)),$$

Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\ker(f^2) = \ker(f)$.

2. Montrer que $\text{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E .

Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$. Il suffit alors de démontrer que $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Soit x dans $\text{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors on dispose de a dans E tel que $x = f(a)$. Or, $f(x) = 0$ donc $f^2(a) = 0$, donc $a \in \ker(f^2)$ donc $a \in \ker(f)$. Donc $f(a) = 0$, i.e. $x = 0$. Donc $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, donc $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 18. ●●○ Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -evdf E . Démontrer que

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Exercice 19 (Imposer les noyaux). ●●○

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Le noyau que l'on veut imposer est $\text{Vect}(1, 1, 1, 1)$. Il est donc de dimension 1. Si on avait $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\ker(u) = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$, alors on aurait $\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = 4 - 1 = 3$, ce qui est impossible puisque u est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Donc il n'existe pas d'application u telle que $\ker(u) = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$.

2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E .

Là, en revanche, pas de problème de dimension. On veut imposer $\ker(u)$ de dimension 2, donc il suffit de trouver une application u de rang 1. On remarque que u et v sont tous deux dans le plan d'équation $y - z = 0$. Si l'on définit alors

$$u(x, y, z) = (y - z)(1, 1, 1),$$

alors on a bien une application linéaire dont le noyau est le plan souhaité.

Exercice 20 (Raisonnements sur la dimension). ●●○

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, où E est un evdf. Montrer que

$$\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(g)) = \dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Im}(g \circ f)).$$

Soit $u : \begin{cases} \text{Im}(f) \rightarrow G \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ Alors $\text{Im}(u) = u(\text{Im}(f)) = g(\text{Im}(f)) = \text{Im}(g \circ f)$. De même, si $x \in E$
 $x \in \ker(u)$ si et seulement si $x \in \text{Im}(f)$ et $x \in \ker(g)$ donc $\ker(u) = \text{Im}(f) \cap \ker(g)$. Donc, en

appliquant le théorème du rang à u , $\text{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(\text{Im}(f))$, donc

$$\dim(\text{Im}(f \circ g)) + \dim(\text{Im}(f) \cap \ker(u)) = \dim(\text{Im}(f))$$

-
2. Soient f et g deux endomorphismes d'un evdf E . On suppose que $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.
-

On sait, par le théorème du rang, que

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E), \dim(\text{Im}(g)) + \dim(\ker(g)) = \dim(E),$$

Comme $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) \geq \dim(E)$ et, de même, $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) \geq \dim(E)$, donc

$$2\dim(E) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) + \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = 2\dim(E).$$

Donc on a égalité dans toutes les inégalités, donc $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$ et $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = \dim(E)$. D'où, par égalité des dimensions, les espaces sont supplémentaires, donc les sommes sont directes.

Exercice 21 (Autour des suites exactes). ●●○ Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application linéaire de E_k dans E_{k+1} et

1. f_0 est injective ;
2. $\ker(f_k) = \text{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$;
3. f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$.

On applique le théorème du rang :

- f_0 est injective donc $\text{rg}(f_0) = a_0$.
- Ensuite, pour tout k ,

$$a_k = \dim(\ker(f_k)) + \text{rg}(f_k) = \text{rg}(f_{k-1}) + \text{rg}(f_k)$$

- Enfin, $\text{rg}(f_{n-1}) = a_n$.

Donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \text{rg}(f_0) + \sum_{k=1}^{n-1} (\text{rg}(f_{k-1}) + \text{rg}(f_k)) + \text{rg}(f_{n-1}) = 0,$$

par télescopage.

Exercice 22. ●●○ Un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si

$$\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{N}, f^k(x) = 0.$$

(i) Montrer que **si E est de dimension finie**, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de E est nilpotent.

Soit f un endomorphisme ponctuellement nilpotent. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , soient $k_1, \dots, k_n$ n entiers tels que pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $f^{k_i}(e_i) = 0$. Posons $k = \max_{1 \leq i \leq n} k_i$. Soit $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ n réels tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors

$$f^k(x) = f^k \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i f^k(e_i) = 0.$$

Donc $f^k = 0$, donc f est nilpotente.

- (ii) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus E de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).
-

Soit D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$. Alors si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré d , $D^{d+1}(P) = 0$. Mais D n'est pas nilpotent. Si c'était le cas, on aurait $k \in \mathbb{N}$ tel que $D^k = 0$. Mais $D^k(X^k) = k! \neq 0$.

3.4 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 23 (Extrait E3A PSI 2015). ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$.

- Justifier que l'ensemble des endomorphismes inversibles de E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
-

L'endomorphisme nul n'est pas inversible, donc il n'appartient pas à $GL(E)$.

- Rappeler la définition d'un hyperplan de E .
-

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Soit H un hyperplan de E et G son complémentaire dans E .

Répondre en le démontrant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses

- (1) G est un sous-espace supplémentaire de H .
-

FAUX. G ne contient pas 0 donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de E , donc il ne peut pas être un supplémentaire de H .

(2) Pour tout vecteur a de G , $\text{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E .

VRAI. (question de cours)

(3) Le noyau de l'application tr est un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

VRAI. La trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc son noyau est un hyperplan.

(4) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E .

VRAI.

$$\text{rg}(u) = 1 \Leftrightarrow \dim(E) - \text{rg}(u) = \dim(E) - 1$$

$$\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) \underset{\text{th. du rang}}{=} \dim(E) - 1 \Leftrightarrow \ker(u) \text{ est un hyperplan de } E,$$

car, en dimension finie, les hyperplans sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim(E) - 1$.

Exercice 24. ●●● Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{tr}(M)$ la trace de la matrice M .

1. Vérifier que $M \mapsto \text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Vérifier qu'il s'agit d'une forme linéaire a été fait dans le cours sur les matrices, pareil pour $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

(i) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$. Calculer $\varphi(E_{ij})$.

Remarquons que si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_{ij} = E_{ik}E_{kj}$. Donc

$$\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ik}E_{kj}) = \varphi(E_{kj}E_{ik}) = \varphi(\delta_{ji}E_{kk}) = \varphi(0) = 0.$$

(ii) Comparer $\varphi(E_{i,i})$ et $\varphi(E_{j,j})$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Remarquons que pour tous i et j , $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ij}E_{ji}) = \varphi(E_{ji}E_{ij}) = \varphi(E_{jj})$.

(iii) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$.

Posons λ la valeur commune des E_{jj} . Alors φ coïncide avec $\lambda \operatorname{tr}$ sur tous les $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donc sur les vecteurs d'une base, donc $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$

3. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$ avec A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathcal{H} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$, en déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

(question pas forcément facile) Déterminons une famille libre de $\mathcal{T}$. Remarquons que si $i \neq j$, alors $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$, donc si $i \neq j$, $E_{ij} \in \mathcal{T}$. Ensuite, remarquons que pour tous $i \neq 1$, $E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i} \in \mathcal{T}$, donc $F_i = E_{11} - E_{ii} \in \mathcal{T}$. De plus, la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \cup (E_{11} - E_{ii})_{2 \leq i \leq n}$ est libre, donc $\mathcal{T}$ est de dimension au moins $n^2 - 1$. Il est différent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car toute matrice de

$\mathcal{T}$ est de trace nulle, ce qui n'est pas le cas de toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ensuite, $\mathcal{H} = \text{Vect}(I_n)$ et $I_n \notin \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose $F_{ij} = I_n + E_{ij}$. Calculer pour $(i, j, h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{ij} F_{h,k}$.

Déjà remarquons que l'inverse de $F_{hk} = I_n + E_{hk}$ est, si $h \neq k$, $I_n - E_{hk}$: en effet,

$$(I_n + E_{hk})(I_n - E_{hk}) = I_n + E_{hk} - E_{hk} - E_{hk}E_{hk} = I_n.$$

De même pour l'autre produit. On a donc

$$\begin{aligned} F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk} &= (I_n - E_{hk})(I_n + E_{ij})(I_n + E_{hk}) \\ &= (I_n - E_{hk})(I_n + E_{ij} + E_{hk} + E_{ij}E_{hk}) \\ &= I_n + E_{ij} + E_{hk} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}^2 - E_{hk}E_{ij}E_{hk} \\ &= I_n + E_{ij} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} \\ &= F_{ij} + E_{ij} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk}. \end{aligned}$$

- si $i \neq k$ et $j \neq h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} + E_{hk}E_{ij}E_{hk} = 0$
- si $i = k$ et $j \neq h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} + E_{hk}E_{ij}E_{hk} = 0 - E_{hj}$
- si $i \neq k$ et $j = h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} = E_{ik}$
- si $i = k$ et $j = h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} = E_{ik} - E_{hj} - E_{hk} = E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}$.

5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in GL_n(\mathbb{K}), \psi(AB) = \psi(BA).$$

Démontrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \psi(M) = \lambda \text{tr}(M)$.

Soit φ une telle application linéaire. Alors si (i, j, h) sont trois entiers, avec $j \neq h$, on a $F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk} = F_{ij} - E_{hj}$. De plus, comme F_{hk}^{-1} est inversible,

$$\varphi(F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk}) = \varphi(F_{ij}F_{hk}F_{hk}^{-1}) = \varphi(F_{ij}),$$

donc

$$\varphi(F_{ij}) = \varphi(F_{ij} - E_{hj}) = \varphi(F_{ij}) - \varphi(E_{hj}),$$

donc $\varphi(E_{hj}) = 0$.

Si maintenant $i \neq j$,

$$F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji} = F_{ij} + E_{ij} + E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi(F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji}) &= \varphi(F_{ij} + E_{ij} + E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}) = \varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}) - \varphi(E_{ji}) \\ &= \varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}).\end{aligned}$$

Or, F_{ji}^{-1} est inversible donc $\varphi(F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji}) = \varphi(F_{ij}F_{ji}F_{ji}^{-1}) = \varphi(F_{ij})$, donc $\varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}) = \varphi(F_{ij})$ donc $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$.

Donc si $i \neq j$ $\varphi(E_{ij}) = 0$ et $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$, donc φ est un multiple de la trace.

DEBUT ↖