

FIN ↘

## CHAPITRE 21

### MATRICES 2 : MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

#### Table des matières

<b>1</b>	<b>Représentation matricielle</b>	<b>1</b>
1.1	Matrice de vecteurs . . . . .	1
1.2	Matrice d'une application linéaire . . . . .	5
1.3	Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . . . .	14
1.3.0.1	Un premier bilan. . . . .	15
<b>2</b>	<b>Changement de base, équivalence, similitude</b>	<b>15</b>
2.1	Matrice de passage d'une base à une autre . . . . .	16
2.2	Matrices équivalentes et rang . . . . .	20
2.3	Matrices semblables et trace . . . . .	31

Ce chapitre met en lumière la puissance de l'algèbre linéaire en dimension finie.

# 1 Représentation matricielle

## 1.1 Matrice de vecteurs

### Définition 1.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $x$  un vecteur de  $E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . La matrice de  $x$  dans  $\mathcal{E}$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Soient  $(y_1, \dots, y_p)$   $p$  vecteurs de  $E$ . Alors pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , il existe un unique  $n$ -uplet  $(a_{ik})_{1 \leq i \leq n}$  tel que

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i.$$

On appelle matrice dans la base  $\mathcal{E}$  de  $(y_1, \dots, y_p)$  la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(y_1, \dots, y_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1.

1. Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , si  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , alors  $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  car  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas colinéaires. Décomposons alors  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  dans la base  $\mathcal{E}$ .

$$f_1 = \frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$$

$$f_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{5}{2}e_2$$

$$f_3 = 1e_1 + 0e_2.$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Déjà une remarque, pour la suite...** On remarque que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Mais, on remarque que  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas colinéaires, donc  $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc essayer de représenter  $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(e_1, e_2)$ . Pour ce faire, on remarque que

$$e_1 = \frac{5}{7}f_1 - \frac{1}{7}f_2$$

$$e_2 = \frac{1}{6}f_1 - \frac{3}{7}f_2,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(e_1, e_2) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que

$$A \times B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = I_2 \dots$$

on verra cette propriété bientôt !

3. Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , soit  $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ ,  $\mathcal{F} = (1, (X-1), (X-1)^2)$ ,  $\mathcal{G} = (L_0, L_1, L_2)$  la base d'interpolation de Lagrange associée à  $(0, 1, 2)$ .

Soit  $P = X^2 + 2X - 1$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(0)}{2}(X-1)^2 = 2 + 4(X-1) + 1(X-1)^2,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{G}}(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On a une propriété utile, de calcul.

**Propriété 1.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $x$  un vecteur de  $E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

1. Si  $(X, Y) \in E^2$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{E}}(X) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{E}}(Y).$$

2. Si  $(X_1, \dots, X_p) \in E^p$  et  $(Y_1, \dots, Y_p) \in E^p$ , si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X_1 + \mu Y_1, \dots, \lambda X_p + \mu Y_p) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_p) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{E}}(Y_1, \dots, Y_p).$$

3. Si  $(X_1, \dots, X_p) \in E^p$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_p) = \left( \text{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1) \middle| \cdots \middle| \text{Mat}_{\mathcal{E}}(X_p) \right),$$

où la barre verticale signifie que l'on a concaténé les vecteurs pour en faire une matrice.

**► Démonstration.**

On ne fait la preuve que pour le premier point, le second se fait de même. Si on écrit  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

et  $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , alors

$$\lambda X + \mu Y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) e_i,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X + \mu Y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{E}}(X) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{E}}(Y),$$

d'où le résultat, la généralisation à  $p$  vecteurs se faisant facilement.

**QED**◀

Chose importante : on peut alors interpréter toute matrice comme une matrice de vecteurs dans une certaine base.

### Propriété 2.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evdf  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ . L'application

$$\varphi : \begin{cases} E^p \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

### ► Démonstration.

Comme la linéarité a été démontrée précédemment, il suffit de montrer la bijectivité. Mais, comme  $\varphi$  est une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il suffit de montrer que  $\varphi$  est injective. Soit  $(x_1, \dots, x_p)$   $p$  éléments de  $E^p$  tels que  $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0_{n,p}$ . Alors, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$x_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n = 0_E,$$

donc  $(x_1, \dots, x_p) = (0_E, \dots, 0_E)$ , donc  $\ker(\varphi) = \{0_{E^p}\}$  donc  $\varphi$  est injective donc bijective. **QED**◀

## 1.2 Matrice d'une application linéaire

### Définition 2.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . La matrice de l'application  $u$  dans la base  $\mathcal{E}$  au départ et  $\mathcal{F}$

à l'arrivée, notée  $\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$  est la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Lorsque  $u$  est un endomorphisme et que l'on choisit la même base au départ et à l'arrivée, on notera le plus souvent  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ .

Exemple 1.2 *Fondamentaux.*

(i) Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ , définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-14x + 5y + 8z, -24x + 8y + 14z)$$

Soit  $\mathcal{E} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (f_1, f_2)$ , les bases canoniques

respectives de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\bullet f(e_1) = \begin{pmatrix} -14 \\ -24 \end{pmatrix} = -14f_1 - 24f_2,$$

$$\bullet f(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5f_1 + 8f_2,$$

$$\bullet f(e_3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 8f_1 + 14f_2,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -14 & 5 & 8 \\ -24 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

(ii) On considère

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit  $\mathcal{E} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2)$  et  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (f_1, f_2)$ . Alors

$$\bullet \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2, \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2, \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bullet \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2, \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2, \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(iii) Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , on considère  $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$  Soit  $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Soit  $\tau : \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{array}$ ,  $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$  et  $\mathcal{F} = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété 3.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evdf  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E) = I_n.$$

Remarque 1.3.

Attention, il faut avoir la même base au départ et à l'arrivée !

Pour le moment, on ne voit pas trop l'utilité des matrices d'applications. Attendons encore un petit moment, avec une dernière proposition.

**Théorème 4.**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, de dimensions respectives  $p$  et  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

► **Démonstration.**  $\otimes$ .

• **Linéarité.** Soient  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\begin{aligned} & \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda u + v) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}}((\lambda u + v)(e_1), (\lambda u + v)(e_2), \dots, (\lambda u + v)(e_p)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\lambda u(e_1) + v(e_1), \lambda u(e_2) + v(e_2), \dots, \lambda u(e_p) + v(e_n)) \\ &= \lambda \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_p)) + \text{Mat}_{\mathcal{F}}(v(e_1), \dots, v(e_p)) \end{aligned}$$

(par la proposition 1).

D'où la linéarité de  $\Phi$ .

- **Bijektivité de  $\Phi$ .** Comme  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))$ , il suffit de montrer que  $\Phi$  est injective.

Soit  $u \in \ker(\Phi)$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = 0_{p,n}$ .

Donc  $(u(e_1), \dots, u(e_p))$  ont tous des coordonnées nulles dans la base  $(f_1, \dots, f_n)$ , donc sont nuls. Donc  $u$  est nulle sur une base de  $\mathcal{E}$ , donc  $u$  est nulle.

Donc  $\Phi$  est injective entre deux espaces de même dimension, donc  $\Phi$  est bijective.

Donc  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**QED** ◀

Poussons les choses un peu plus loin : comment interpréter le produit matriciel ? (c'est la propriété fondamentale de ce chapitre)

### Propriété 5.

Soient  $E, F$  et  $G$  deux espaces vectoriels de bases respectives  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , soit  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Alors

1.  $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E, \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$
2.  $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ .

### ► Démonstration.

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ .

Notons  $p = \dim(E)$ ,  $n = \dim(F)$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, x = \sum_{i=1}^p x_i e_i. \text{ Alors}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^p x_i u(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \sum_{k=1}^n a_{ki} f_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^p x_i a_{ki} \right) f_k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{ni}x_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x). \end{aligned}$$

2. Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) &= \text{Mat}_{\mathcal{G}}(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_p)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_1)), \dots, v(u(e_p))) \\ &= \left( \text{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_1))) \middle| \cdots \middle| \text{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_p))) \right), \end{aligned}$$

la barre verticale signifie que l'on a construit la matrice en concaténant les vecteurs.

Or, si l'on note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v)$ , si  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_i))) = \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_i)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_i)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) &= \left( A \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1)) \middle| \cdots \middle| A \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_p)) \right) \\ &= A \times \left( \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1)) \middle| \cdots \middle| \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_p)) \right) \\ &\quad \text{(par produit par blocs)} \\ &= A \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_p)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u). \end{aligned}$$

**QED**◀**Corollaire 6.**

Soit  $(E, F)$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimension  $p$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Alors  $u$  est inversible si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$  est inversible. On a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)^{-1}$ .

**► Démonstration.**

⇒ Si  $u$  est inversible, alors  $u \circ u^{-1} = \text{Id}_F$  et  $u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$ , donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}}(u \circ u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\text{Id}_F) = I_p,$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u^{-1} \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E) = I_p,$$

donc  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$  est inversible, d'inverse  $\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1})$ .

⇐ Si  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$  est inversible, alors on dispose de  $A$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  tel que

$$A \times \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \times A = I_n.$$

Soit  $v$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(F, E)$  tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(v)$  (possible par le théorème d'isomorphisme vu précédemment). Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(v \circ u) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E),$$

donc, par injectivité de l'isomorphisme  $\Phi$ ,  $v \circ u = \text{Id}_E$ . De même,  $u \circ v = \text{Id}_F$ , donc  $u$  est inversible et  $\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)^{-1}$ .

**QED**◀

**Propriété 7.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , de base  $\mathcal{E}$ , alors l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres, ce qui signifie qu'on a de plus  $\Phi(u \circ v) = \Phi(u) \circ \Phi(v)$ .

Remarque 1.4.

Attention ! Il faut avoir la même base au départ et à l'arrivée (cf. la translation pour les polynômes)

Exemple 1.5.

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$  définie par  $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$  pour tous  $i$  et  $j$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

Pour ce faire, une jolie méthode est de remarquer que si

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

si  $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^n)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau) = A$ .

Or,  $\tau$  est inversible,  $\tau^{-1} : P \mapsto P(X-1)$ , donc  $A$  est inversible d'inverse  $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau^{-1})$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors

$$\tau^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i},$$

donc le coefficient  $(i, j)$  de  $A^{-1}$  est  $(-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}$ . (attention au décalage de numérotation).

Remarque 1.6.

Le fait que l'on ait un automorphisme d'algèbre permet d'interpréter matriciellement les propriétés de certains endomorphismes. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ ,

- $u$  est un projecteur si et seulement si  $A^2 = A$ ,
- $u$  est une symétrie si et seulement si  $A^2 = I_n$ ,

- $u$  est nilpotente si et seulement s'il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0_n$ .

### Exo 1.1

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X] : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ . Le représenter dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  au départ et à l'arrivée. Montrer que cet endomorphisme est nilpotent.

Il est intéressant, dès maintenant, de penser à représenter un endomorphisme dans une **bonne base**.

#### Propriété 8.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evdf  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Si  $u$  est un projecteur de  $E$ , soit  $r = \text{rg}(u)$ ,  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im}(u)$ ,  $(f_{r+1}, \dots, f_n)$  une base de  $\ker(u)$ . Comme  $u$  est un projecteur,  $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$  et donc  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$  est une base de  $E$ .

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_r), u(f_{r+1}), \dots, u(f_n)) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix},$$

où l'on a écrit la matrice par blocs.

2. Si  $u$  est une symétrie de  $E$ ,  $\ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \text{Id}_E) = E$ . Soit  $(e_1, \dots, e_s)$  base de  $\ker(u - \text{Id}_E)$  et  $(f_{s+1}, \dots, f_n)$  une base de  $\ker(u + \text{Id}_E)$ .

Alors  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_s, f_{s+1}, \dots, f_n)$  est une base de  $E$ , et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_s & 0_{s, n-s} \\ 0_{n-s, s} & -I_{n-s} \end{pmatrix}.$$

### 1.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

#### Définition 3.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . L'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est

$$\hat{A} : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

#### Propriété 9.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{B}_p$  les bases canoniques de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ . Alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(\hat{A})$ .

#### Définition 4.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On définit le noyau/l'image/le rang de  $A$  comme l'image/le noyau/le rang de  $\hat{A}$ .

#### Méthode 1.

Pour déterminer l'image/le noyau/le rang d'une matrice, on fait exactement ce qu'on a fait pour les applications linéaires sur  $\mathbb{K}^n$  !

#### Propriété 10.

Étant donnés les isomorphismes établis précédemment, si  $M = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ , une base de  $\ker(M)$  nous donne les coordonnées d'une base de  $\ker(u)$  dans  $\mathcal{E}$ . De même pour l'image.

#### Propriété 11.

Une matrice carrée est inversible à droite si et seulement si elle est inversible à gauche.

**► Démonstration.**

Ceci bien simplement du fait qu'un endomorphisme est injective ssi il est surjectif ssi il est bijectif.

**QED**◀

**1.3.0.1 Un premier bilan.** Une matrice peut s'interpréter comme...

- la matrice d'une famille de vecteurs dans une base,
- la matrice d'une application linéaire dans certaines bases au départ et à l'arrivée,
- la matrice de l'application linéaire canoniquement associée.

De plus, on a vu que si la matrice était une matrice carrée inversible, alors elle pouvait être interprétée comme la matrice d'un isomorphisme.

Y a-t-il l'analogie pour l'interprétation en tant que matrice de vecteurs ? OUI

## 2 Changement de base, équivalence, similitude

### Exo 2.2

Soit, dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{E}$  la base canonique,  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Calculer

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}), \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}), \quad Y = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(X),$$

$$C = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u), \quad D = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u), \quad E = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u),$$

puis calculer les produits

$$A \times B, \quad B \times C, \quad B \times C \times A, \quad B \times X.$$

Commentaire ?

## 2.1 Matrice de passage d'une base à une autre

### Propriété 12.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

Alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$  est inversible.

Dans ce cas,  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ .

### ► Démonstration. (\*)

⇒ On suppose que  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} & \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_n) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E(f_1), \dots, \text{Id}_E(f_n)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{Id}_E) \end{aligned}$$

(on interprète une matrice comme matrice d'une application linéaire !)

Or, comme  $\text{Id}_E$  est bijective,  $\text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{Id}_E)$  est inversible, d'inverse

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\text{Id}_E^{-1}) &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\text{Id}_E(e_1), \dots, \text{Id}_E(e_n)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

⇐ On suppose que  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$  est inversible, c'est-à-dire que  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_n)$  est inversible.

(idée intéressante !) Soit  $\varphi$  l'unique endomorphisme de  $E$  tel que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi(e_i) = f_i$ .

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi).$$

Or,  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$  est inversible, donc  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$  est inversible, donc  $\varphi$  est bijective.

Donc  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  est une base de  $E$ , d'où  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E$ . On a alors, par le premier sens, aussi

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}).$$

**QED** ◀

Remarque 2.1.

Ainsi, si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -evdf  $n$ , si  $\mathcal{E}$  est une base de  $E$ , toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{K})$  peut être vue comme  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$  où  $\mathcal{E}'$  est une base de  $E$  (par la proposition précédente et la proposition 2).

### Définition 5.

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ . La matrice de passage de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}'$ , notée  $P_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$  ou  $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$  est la matrice de la famille  $\mathcal{E}'$  dans la famille  $\mathcal{E}$

$$P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}').$$

### Propriété 13.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evdf,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ ,  $x \in E$ ,  $X = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$ ,  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)$ . Alors

$$X = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} X'.$$

De même, si  $(x_1, \dots, x_p)$  sont  $p$  vecteurs,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x_1, \dots, x_p).$$

► **Démonstration.**

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E(x)) \\
 &= \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x) \\
 &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E(e'_1), \dots, \text{Id}_E(e'_n)) \\
 &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') \\
 &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x).
 \end{aligned}$$

**QED** ◀

### Méthode 2.

Penser à ce type de schéma :

$$\mathcal{E} \leftarrow P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \leftarrow \mathcal{E}'$$

( $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$  prend des vecteurs écrits dans  $\mathcal{E}'$  et renvoie des vecteurs écrits dans  $\mathcal{E}$ )

Exemple 2.2.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $\mathcal{E}$  est la base canonique et  $\mathcal{E}' = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , alors  $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Si  $x = 2e'_1 + e'_2$ ,

alors  $\text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(x) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Propriété 14.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  deux bases de  $F$ .

1.  $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(\text{Id}_E)$
2.  $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$
3. si  $F$  est un espace vectoriel  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux bases de  $F$ , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

4. Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

### Méthode 3.

Il faut encore penser aux schémas avec des petites flèches ! On a vu que

$$\mathcal{E} \leftarrow P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \leftarrow \mathcal{E}'$$

$$\mathcal{E}' \leftarrow P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \leftarrow \mathcal{E}$$

$$\mathcal{F} \leftarrow P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \leftarrow \mathcal{F}'$$

$$\mathcal{F}' \leftarrow P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \leftarrow \mathcal{F}$$

Mais, si on pense aux bases dans lesquelles sont écrits les différents vecteurs, on a aussi

$$\mathcal{F} \leftarrow \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \leftarrow \mathcal{E}$$

(la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$  prend des éléments écrits dans la base  $\mathcal{E}$  et renvoie des éléments écrits dans la base  $\mathcal{F}$ ) De même,

$$\mathcal{F}' \leftarrow \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u) \leftarrow \mathcal{E}'$$

D'où la formule en faisant coïncider les flèches !

► **Démonstration.** (\*).

1. On note  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E) &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\text{Id}_E(e'_1), \dots, \text{Id}_E(e'_n)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(e'_1, \dots, e'_n) \\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \end{aligned}$$

2. Là, on utilise le résultat démontré sur les inverses d'applications linéaires.

$$\begin{aligned} (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1} &= (\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E))^{-1} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(\text{Id}_E^{-1}) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(\text{Id}_E) \\ &= P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

3. Encore une fois, on fait apparaître la composée d'applications linéaires, en écrivant que

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u) &= \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(\text{Id}_F \circ u \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E) \\ &= P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \end{aligned}$$

4. On adapte facilement au cas d'endomorphismes.

**QED** ◀

## 2.2 Matrices équivalentes et rang

### Définition 6.

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont dites équivalentes s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in GL_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBQ$ .

**Propriété 15.**

La relation d'équivalence entre matrices est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**► Démonstration.**

Si  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , notons  $A \sim B$  s'il existe  $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBQ$ .

- **Réflexivité.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors  $A = I_n \times A \times I_p$ , donc  $A \sim A$ .
- **Symétrie.** Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , telles que  $A \sim B$ . Alors on dispose de  $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBQ$ . Alors  $B = P^{-1}AQ^{-1}$ , avec  $P^{-1}$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $Q^{-1}$  dans  $GL_p(\mathbb{K})$ , donc  $B \sim A$ .
- **Transitivité.** Soient  $(A, B, C)$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$  telles que  $A \sim B$  et  $B \sim C$ . Alors on dispose de  $(P, R) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ , de  $(Q, S) \in (GL_p(\mathbb{K}))^2$  telles que  $A = PBQ$  et  $B = RCS$ . Alors  $A = PRCSQ = (PR) \times C \times (SQ)$ , et  $PR \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $SQ \in GL_p(\mathbb{K})$ . Donc  $A \sim C$ .

Donc  $\sim$  est une relation d'équivalence.

**QED** ◀

Remarque 2.3.

La notation  $\sim$  n'est là que pour la preuve, elle n'est pas officielle pour parler d'équivalence entre matrices.

**Propriété 16.**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ . Soit  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement s'il existe  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{F}'$  deux bases de  $E$  et de  $F$  telles que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u)$ .

**► Démonstration.**

On raisonne par double implication.

⇒ Si  $A$  et  $B$  sont équivalentes, on dispose de  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $Q$  dans  $GL_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBQ$ . Alors

$$B = P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) Q^{-1}.$$

(Méthode : notre but est d'**interpréter**  $P^{-1}$  et  $Q^{-1}$  comme des matrices de passage entre bases !)

Soit  $\mathcal{F}'$  la base de  $F$  telle que  $P = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$  : par la proposition 2, il existe une unique famille  $\mathcal{F}$  de  $F$  telle que  $P = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$ . Comme  $P$  est inversible,  $\mathcal{F}$  est une base.

En particulier,

$$P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}.$$

Soit  $\mathcal{E}'$  la base de  $E$  telle que

$$Q^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

(on fait de même que précédemment) On en déduit alors que

$$B = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u),$$

donc  $B$  est la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{E}'$  au départ et  $\mathcal{F}'$  à l'arrivée.

⇐ Si  $B$  est la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{E}'$  au départ et  $\mathcal{F}'$  à l'arrivée, alors

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} A P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'},$$

avec  $P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}$  et  $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$  deux matrices inversibles. Donc  $B$  est équivalente à  $A$ .

D'où l'équivalence!

**QED** ◀

### Définition 7.

Soient  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , avec  $r \leq \min(n, p)$ . On définit

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.4.

Ainsi,

$$J_{3,4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Propriété 17.

Soient  $(E, F)$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf,  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(F)$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq \min(n, p)$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Alors  $u$  est de rang  $r$  si, et seulement s'il existe  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ , telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = J_{p,n,r}.$$

### ► Démonstration. (\*)

Raisonnons par double implication (la directe étant encore la plus dure).

⇒ On suppose que  $u$  est de rang  $r$ . On retrouve l'idée déjà importante de choisir une base **adaptée** à  $u$ .

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker(u)$ . Par le théorème du rang, on sait que  $\dim(S) = r$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $S$ ,  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker(u)$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r, \dots, e_n)$  est donc une base de  $E$ .

Mais alors

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_r), u(e_{r+1}), \dots, u(e_n)) \\ &= \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_r)) \text{ car } (e_{r+1}, \dots, e_n) \text{ sont dans } \ker(u). \end{aligned}$$

Donc  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une base de  $\text{Im}(u)$  (on vient de montrer qu'elle était génératrice, et elle est de cardinal égal à la dimension de  $\text{Im}(u)$ ).

Donc  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une famille libre de  $f$ , que l'on complète en une base  $\mathcal{F} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_p)$  de  $F$ .

Mais alors, dans la base  $\mathcal{E}$  au départ et la base  $\mathcal{F}$  à l'arrivée, la matrice de  $u$  est exactement

$J_{p,n,r}$  !

⇐ Supposons qu'il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{F}$  de  $F$  telles que  $\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{p,n,r}$ . Alors si l'on écrit  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ , cela signifie que

$$u(e_1) = f_1, u(e_2) = f_2, \dots, u(e_r) = f_r, u(e_{r+1}) = 0_F, \dots, u(e_n) = 0_F.$$

Ainsi,

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_r, 0_F, \dots, 0_F) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_r),$$

qui est un sous-espace vectoriel de dimension  $r$ , car  $(f_1, \dots, f_r)$  est libre. Donc  $\text{rg}(u) = r$ .

**QED** ◀

On déduit plusieurs corollaires de ce résultat.

### Propriété 18.

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq \min(n, p)$ . Alors  $A$  est de rang  $r$  si et seulement si  $A$  est équivalente à  $J_{p,n,r}$ .

2. Soient  $(E, F)$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf,  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(F)$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq \min(n, p)$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour toutes bases  $\mathcal{E}$  de  $E$  et  $\mathcal{F}$  de  $F$ ,

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)).$$

3. Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -evdf  $n$ ,  $(x_1, \dots, x_p)$   $p$  vecteurs de  $F$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ . Alors

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_p)).$$

4. Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $C_1, \dots, C_p$  ses colonnes. Alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p),$$

où  $C_1, \dots, C_p$  sont vus comme des éléments de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .

5. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

6. Une matrice carrée de taille  $N$  est inversible si, et seulement si elle est de rang  $n$ .

► **Démonstration.** (\*).

1. Notons  $u$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(u)$  et, si  $\mathcal{E}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{F}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

Or, par la proposition précédente, on dispose de  $\mathcal{E}'$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}'$  une base de  $F$  telles que

$$J_{p,n,r} = \text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u).$$

Donc  $A$  et  $J_{p,n,r}$  sont deux matrices représentant  $u$  dans des bases différentes au départ et à l'arrivée, donc  $A$  et  $J_{p,n,r}$  sont équivalentes.

2. Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ . Soit  $s$  le rang de  $A$ . Alors, par le point précédent,  $A$  est équivalente à

$$J_{p,n,s}.$$

Donc on dispose d'une base  $\mathcal{E}'$  de  $E$  et  $\mathcal{F}'$  de  $F$  telles que

$$J_{p,n,s} = \text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u),$$

donc, par la proposition précédente,  $u$  est de rang  $s$ . Donc  $r = s$ . Donc  $\text{rg}(A) = \text{rg}(u)$ .

3. On va utiliser une bonne application linéaire. Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^p$ . Soit  $\varphi$

l'application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $F$  définie par, pour tout  $i$  dans  $[[1, p]]$ ,  $\varphi(e_i) = x_i$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{rg}(x_1, \dots, x_p) &= \text{rg}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \\ &= \text{rg}(\varphi) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\varphi)) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_p)), \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

**4.** Soit  $u$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Soit  $E_1, \dots, E_p$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ . Alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u) = \text{rg}(u(E_1), \dots, u(E_p)) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p).$$

**5.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

$\Rightarrow$  Si  $A$  et  $B$  sont équivalentes. Si  $u$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , alors  $A$  représente  $u$  dans les bases canoniques de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  au départ et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à l'arrivée, et, comme  $A$  et  $B$  sont équivalentes,  $B$  représente aussi  $u$  dans des bases différentes au départ et à l'arrivée.

Donc par le point précédent,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u) \text{ et } \text{rg}(B) = \text{rg}(u),$$

donc  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

$\Leftarrow$  Si  $A$  et  $B$  sont de même rang, alors, par le premier point,  $A$  et  $B$  sont toutes deux équivalentes à  $J_{p,n,r}$ , donc sont équivalentes, par transitivité.

**6.** Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$\Rightarrow$  Si  $A$  est inversible,  $A = A \times I_n \times I_n$  donc  $A$  est équivalente à  $I_n = J_{n,n,n}$  donc  $A$  est de rang  $n$ .

⇐ Si  $A$  est de rang  $n$ , alors  $A = P \times J_{n,n,n} \times Q = Q \times Q$  avec  $P$  et  $Q$  inversibles. Donc  $A$  est inversible.

**QED** ◀

**Propriété 19** (Interprétation du pivot de Gauss).

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

1. Si  $B$  est obtenue à partir de  $A$ , à l'aide d'opérations sur les lignes et/ou sur les colonnes, alors  $A$  et  $B$  sont équivalentes.
2. si  $\text{rg}(A) = r$ , alors on peut obtenir  $J_{p,n,r}$  à l'aide d'opérations sur les lignes et/ou les colonnes de  $A$ .

► **Démonstration.**

1. On rappelle que les opérations sur les lignes sont des multiplications à gauche par des matrices de transvection/permutations/dilatations, et que celles sur les colonnes sont obtenues par des multiplications à droite par des matrices de transvection/permutations/dilatations.
2. Deux approches possibles, qui utilisent un peu ou beaucoup le chapitre 15 :
  - ou bien on dit que toute matrice peut s'échelonner en ligne, puis on poursuit les opérations pour transformer la matrice en  $J_{p,n,r}$ .
  - ou bien on dit que toute matrice est équivalente à  $J_{p,n,r}$  et que les matrices inversibles sont engendrées par les matrices élémentaires.

**QED** ◀

Il y a donc **beaucoup** de manières d'interpréter le rang d'une matrice ! On va en rajouter deux dernières !

**Propriété 20.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

1.  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$
2. Si  $L_1, \dots, L_n$  sont les lignes de  $A$ ,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n).$$

► **Démonstration.**

1. Soit  $r$  le rang de  $A$ . Alors  $A$  est équivalente à  $J_{n,p,r}$ , i.e. il existe  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$ ,  $Q$  dans  $GL_p(\mathbb{K})$  telles que

$$A = PJ_{n,p,r}Q.$$

Mais alors

$$A^T = Q^T \times J_{n,p,r}^T \times P^T = Q^T \times J_{p,n,r} \times P^T.$$

Comme  $Q^T$  et  $P^T$  sont inversibles,  $A^T$  est donc équivalente à  $J_{p,n,r}$ , donc est de rang  $r$ .

2. On en déduit, si  $C'_1, \dots, C'_n$  sont les colonnes de  $A^T$ , que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}(C'_1, \dots, C'_n) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n),$$

car  $L_1, \dots, L_n$  sont obtenues simplement en transposant  $C'_1, \dots, C'_n$ .

**QED** ◀

**Définition 8.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Une matrice extraite de  $A$  est une matrice  $B$  vérifiant

$$\exists I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \exists J \subset \llbracket 1, p \rrbracket, B = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}.$$

Remarque 2.5.

1. Exemple, si  $A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 & 8 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 15 & -2 & 13 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ , alors

•  $B = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$  est extraite de  $A : I = \{1, 3\}$  et  $J = \{1, 4\}$ ,

•  $C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  est extraite de  $A : I = \{1, 2\}$  et  $J = \{3, 4, 6\}$ .

2. La notion de matrice extraite a un équivalent en python, c'est le slicing !

### Propriété 21.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{rg}(A)$  est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de  $A$ .

#### ► Démonstration.

Notons  $r = \text{rg}(A)$ . On va montrer qu'il existe une matrice carrée extraite de  $A$ , inversible de taille  $r$ , et que toute matrice carrée extraite de  $A$  de taille strictement supérieure à  $r$  n'est pas inversible.

• **Existence d'une matrice extraite de taille  $r$ .** Soient  $(C_1, \dots, C_p)$  les colonnes de  $A$ . Alors

$$r = \text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p),$$

donc  $\dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = r$ . Donc, par le théorème de la base extraite, il existe  $(j_1, \dots, j_r) \in \llbracket 1, p \rrbracket^r$  tels que  $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$  est une base de  $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .

En particulier, Donc, si  $B$  est la matrice constituée des colonnes  $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ ,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B).$$

Soient alors  $(L'_1, \dots, L'_n)$  les lignes de  $B$ , on sait que

$$r = \text{rg}(B) = \text{rg}(L'_1, \dots, L'_n) = \dim(\text{Vect}(L'_1, \dots, L'_n)).$$

On dispose donc, toujours par le théorème de la base extraite, de  $r$  indices  $(i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r$  tels que

$$\text{Vect}(L'_1, \dots, L'_n) = \text{Vect}(L'_{i_1}, \dots, L'_{i_r}),$$

donc

$$r = \text{rg}(L'_{i_1}, \dots, L'_{i_r}) = \text{rg}(C),$$

où  $C$  est la matrice de lignes  $L'_{i_1}, \dots, L'_{i_r}$ .

Cette matrice  $C$  est carrée, de taille  $r$ , et inversible car de rang  $r$ . De plus elle est extraite de  $A$  : on a pris les colonnes  $(j_1, \dots, j_r)$  et les lignes  $(i_1, \dots, i_r)$ .

Donc  $A$  possède une matrice extraite de taille  $r$ , inversible.

- **Non-inversibilité des plus grandes matrices.** Soit  $B$  extraite de  $A$ , carré, de taille  $s > r$ .

Soient  $(C_1, \dots, C_p)$  les colonnes de  $A$ . Soient  $(D_1, \dots, D_r)$  les colonnes de  $B$ .

Alors on dispose de  $(j_1, \dots, j_s)$  telles que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, s \rrbracket$ ,  $D_k$  soit une colonne extraite de  $C_{j_k}$  (en sélectionnant certaines lignes uniquement disons  $(i_1, \dots, i_s)$ .)

Or,  $\text{rg}(C_1, \dots, C_p) = r$ , et  $(C_{j_1}, \dots, C_{j_s})$  est une famille de cardinal  $s > r$ , donc elle est liée. Donc on dispose de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \neq (0, \dots, 0)$  tels que

$$\lambda_1 C_{j_1} + \dots + \lambda_s C_{j_s} = 0_{n,1}.$$

Donc, en sélectionnant les lignes  $(i_1, \dots, i_s)$ , on obtient

$$\lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_s D_s = 0_{s,1},$$

donc les colonnes de  $B$  sont liées dont  $B$  n'est pas inversible !

**QED** ◀

## 2.3 Matrices semblables et trace

Nous finissons par une relation plus forte que celle d'équivalence, c'est la relation de similitude.

### Définition 9.

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites semblables s'il existe une matrice  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

### Propriété 22.

La relation de similitude est une relation d'équivalence.

#### ► Démonstration.

Notons  $A \sim B$  si  $A$  est semblable à  $B$ .

- **Réflexivité.** Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A = I_n A I_n^{-1}$ , donc  $A \sim a$ .
- **Symétrie.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  telles que  $A \sim B$ . Alors on dispose de  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ . Donc

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1},$$

donc  $B \sim A$ .

- **Transitivité.** Soient  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$  telles que  $A \sim B$  et  $B \sim C$ . Alors on dispose de  $P$  et  $Q$  matrices inversibles telles que  $A = PBP^{-1}$  et  $B = QCQ^{-1}$ . Donc

$$A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1},$$

donc  $A \sim C$ .

Donc  $\sim$  est une relation d'équivalence.

**QED** ◀

**Propriété 23.**

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A$  et  $B$  sont équivalentes.
2. Si  $A$  est semblable à  $\lambda I_n$ , alors  $A = \lambda I_n$ .
3. Si  $A = PBP^{-1}$  avec  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

**► Démonstration.**

1. Si  $A$  et  $B$  sont semblables, on dispose de  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .  $P^{-1}$  est inversible donc  $A$  est bien équivalente à  $B$ .
2. Si  $A$  est semblable à  $\lambda I_n$ , on dispose de  $P$  inversible telle que  $A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_n$ .
3. On démontre par récurrence la proposition  $\mathcal{Q}_k : A^k = PB^kP^{-1}$ .

**Initialisation.**  $A^0 = I_n$  et  $PB^0P^{-1} = I_n$ , d'où l'initialisation.

**Hérédité.** Soit  $k$  tel que  $A^k = PB^kP^{-1}$ . Alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= PBP^{-1}PB^kP^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= PB I_n B^k P^{-1} \\ &= PB^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

**QED** ◀

Remarque 2.6.

Attention, la réciproque du 1 est fautive ! En effet, toute matrice inversible est équivalente à  $I_n$ , mais seule  $I_n$  est semblable à  $I_n$ .

**Propriété 24.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ ,  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Alors  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement s'il existe  $\mathcal{E}'$  une base de  $E$  telle que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ .

**► Démonstration. (\*)**

⇒ Supposons que  $A$  et  $B$  soient semblables. On dispose alors de  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

$P$  est inversible. Soit  $\mathcal{E}'$  l'unique base de  $E$  telle que  $P = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$ . Alors  $B = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$  donc  $P^{-1} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ . Ainsi,

$$B = P^{-1}AP = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u).$$

⇐ Supposons que l'on dispose de  $\mathcal{E}'$  une base de  $E$  telle que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ . Alors par les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) (P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}})^{-1}, \end{aligned}$$

donc  $A$  et  $B$  sont semblables.

**QED** ◀**Propriété 25.**

Deux matrices semblables ont même trace.

**► Démonstration.**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables, de taille  $n$ . Soit  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ . Alors

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1} \times PB) = \operatorname{tr}(I_n B) = \operatorname{tr}(B).$$

**QED**◀

Remarque 2.7.

Attention ! La réciproque est très fautive ! Exemple, si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont toutes trois de trace nulle, mais  $A$  est de rang 2,  $B$  de rang 1 et  $C$  de rang nul, donc aucune de ces matrices sont équivalentes, donc (contrairement au 1 de la prop 23) ne sont pas semblables !

### Définition 10.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

La quantité  $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{E}$  de  $E$  choisie.

On appelle alors cette quantité trace de  $u$ , notée  $\operatorname{tr}(u)$ .

### ► Démonstration.

Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont deux bases de  $E$ ,  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$  et  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$  sont semblables donc ont même trace.

**QED**◀

### Propriété 26.

Soit  $p$  un projecteur d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors  $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$ .

### ► Démonstration.

Si  $r = \operatorname{rg}(p)$ , si  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $\operatorname{Im}(p)$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $\ker(p)$  alors, comme  $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p)$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

Donc  $\text{tr}(p) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{E}}(p)) = r$ .

**QED** ◀

DEBUT ↘