Notes de révision
du cours de mathématiques

MSPI 1

Nicolas LAILLET - Walter NGAMBOU
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Lycée Pasteur, 2024–2025
Version du 22 avril 2025

Chapitre 21
Matrices 2 : matrices et applications linéaires

Table des matières

Remerciements à Nicolas LAILLET

Ce chapitre met en lumière la puissance de l'algèbre linéaire en dimension finie.

1 Représentation matricielle

1.1 Matrice de vecteurs

Définition 1.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, x un vecteur de E, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. La matrice de x dans $\mathcal{E}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Soient $(y_1, \dots, y_p)$ p vecteurs de E. Alors pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il existe un unique n-uplet $(a_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tel que

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i.$$

On appelle matrice dans la base $\mathcal{E}$ de $(y_1, \dots, y_p)$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(y_1, \dots, y_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires. Décomposons alors f_1, f_2 et f_3 dans la base $\mathcal{E}$.
$$f_1 = \frac{3}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2$$
$$f_2 = \frac{1}{2} e_1 - \frac{5}{2} e_2$$
$$f_3 = 1\, e_1 + 0 e_2.$$
Ainsi,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
De même,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. **Déjà une remarque, pour la suite...** On remarque que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$
Mais, on remarque que f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On peut donc essayer de représenter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(e_1, e_2)$. Pour ce faire, on remarque que
$$e_1 = \frac{5}{7} f_1 - \frac{1}{7} f_2$$
$$e_2 = \frac{1}{6} f_1 - \frac{3}{7} f_2,$$
donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(e_1, e_2) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$
On remarque alors que
$$A \times B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 \dots$$
on verra cette propriété bientôt !
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, soit $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{F} = (1, (X-1), (X-1)^2)$, $\mathcal{G} = (L_0, L_1, L_2)$ la base d'interpolation de Lagrange associée à $(0, 1, 2)$.

Soit $P = X^2 + 2X - 1$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(0)}{2}(X-1)^2 = 2 + 4(X-1) + 1(X-1)^2,$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_2 + P(2)L_2,$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On a une propriété utile, de calcul.

Propriété 1.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, x un vecteur de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

1. Si $(X, Y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X) + \mu \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Y).$$

2. Si $(X_1, \dots, X_p) \in E^p$ et $(Y_1, \dots, Y_p) \in E^p$, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X_1 + \mu Y_1, \dots \lambda X_n + \mu Y_n) = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_p) + \mu \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Y_1, \dots, Y_p).$$

3. Si $(X_1, \dots, X_p) \in E^p$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_p) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1) \Big| \cdots \Big| \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X_p) \Big),$$

où la barre verticale signifie que l'on a concaténé les vecteurs pour en faire une matrice.

►***Démonstration.***
On ne fait la preuve que pour le premier point, le second se fait de même. Si on écrit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors

$$\lambda X + \mu Y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i,$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\lambda X + \mu Y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X) + \mu \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Y),$$

d'où le résultat, la généralisation à p vecteurs se faisant facilement. ***QED*** ◄

Chose importante : on peut alors interpréter toute matrice comme une matrice de vecteurs dans une certaine base.

Propriété 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. L'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{c} E^p \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

►***Démonstration.***
Comme la linéarité a été démontrée précédemment, il suffit de montrer la bijectivité. Mais, comme φ est une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il suffit de montrer que φ est injective. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ p

éléments de E^p tels que $\varphi(x_1,\dots,x_p)=0_{n,p}$. Alors, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$,

$$x_i = 0.e_1+\cdots+0.e_n = 0_E,$$

donc $(x_1,\dots,x_p)=(0_E,\dots,0_E)$, donc $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{0_{E^p}\}$ donc φ est injective donc bijective. ***QED*** ◄

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 2.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F, $u\in\mathscr{L}(E,F)$. La matrice de l'application u dans la base $\mathcal{E}$ au départ et $\mathcal{F}$ à l'arrivée, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1),\dots,u(e_n)).$$

Lorsque u est un endomorphisme et que l'on choisit la même base au départ et à l'arrivée, on notera le plus souvent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$.

`Exemple 1.2` *Fondamentaux*.

(i) Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, définie par

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(-14x+5y+8z,-24x+8y+14z)$$

Soit $\mathcal{E}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=(e_1,e_2,e_3)$ et $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=(f_1,f_2)$, les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Alors

▷ $f(e_1)=\begin{pmatrix}-14\\-24\end{pmatrix}=-14f_1-24f_2$,

▷ $f(e_2)=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}=5f_1+8f_2$,

▷ $f(e_3)=\begin{pmatrix}8\\14\end{pmatrix}=8f_1+14f_2$,

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}=\begin{pmatrix}-14&5&8\\-24&8&14\end{pmatrix}.$$

(ii) On considère

$$\varphi:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Soit $\mathcal{E}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=(e_1,e_2)$ et $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=(f_1,f_2)$. Alors

▷ $\varphi(e_1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0.e_1+0.e_2$, $\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1.e_1+0.e_2$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

▷ $\varphi(e_1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0.f_1+0.f_2$, $\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}=\begin{pmatrix}0&\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}$.

(iii) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $\psi:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]\\ P\mapsto P'\end{array}\right.$ Soit $\mathcal{E}=(1,X,X^2,X^3)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(iv) Soit $\tau:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]\\ P\mapsto P(X+1)\end{array}\right.$, $\mathcal{E}=(1,X,X^2,X^3)$ et $\mathcal{F}=(1,X+1,(X+1)^2,(X+$

$1)^3$). Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 3.
Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n.$$

`Remarque 1.3.`
Attention, il faut avoir la même base au départ et à l'arrivée !

Pour le moment, on ne voit pas trop l'utilité des matrices d'applications. Attendons encore un petit moment, avec une dernière proposition.

Théroème 4.
Soient E et F deux espaces vectoriels, de dimensions respectives p et n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \qquad u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

► ***Démonstration.*** ⊛.

▷ **Linéarité.** Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda u + v) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}((\lambda u + v)(e_1), (\lambda u + v)(e_2), \dots, (\lambda u + v)(e_p)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\lambda u(e_1) + v(e_1), \lambda u(e_2) + v(e_2), \dots, \lambda u(e_p) + v(e_n)) \\ &= \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_p)) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(v(e_1), \dots, v(e_p)) \end{aligned}$$

(par la proposition 1).

D"où la linéarité de Φ.

▷ **Bijectivité de Φ.** Comme $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = np = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))$, il suffit de montrer que Φ est injective.
Soit $u \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = 0_{p,n}$.
Donc $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ ont tous des coordonnées nulles dans la base $(f_1, \dots, f_n)$, donc sont nuls. Donc u est nulle sur une base de $\mathcal{E}$, donc U est nulle.
Donc Φ est injective entre deux espaces de même dimension, donc u est bijective.

Donc u est un isomorphisme d'espaces vectoriels. ***QED*** ◄

Poussons les choses un peu plus loin : comment interpréter le produit matriciel ? (c'est la propriété fondamentale de ce chapitre)

Propriété 5.
Soient E, F et G deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, soit et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors

1. $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$

2. $\forall u \in \mathscr{L}(E, F), \forall v \in \mathscr{L}(F, G),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$.

► ***Démonstration.***

⊛ 1. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$.
Notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$,

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. Alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i a_{ki} \right) f_k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ni} x_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x). \end{aligned}$$

2. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(v \circ u(e_1), \ldots, v \circ u(e_p)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_1)), \ldots, v(u(e_p))) \\ &= \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_1))) \Big| \cdots \Big| \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_1))) \Big), \end{aligned}$$

la barre verticale signifie que l'on a construit la matrice en concaténant les vecteurs.
Or, si l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v)$, si $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(v(u(e_i)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_i)) = A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_i)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) &= \Big(A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1)) \Big| \cdots \Big| A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_p)) \Big) \\ &= A \times \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1)) \Big| \cdots \Big| \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_p)) \Big) \\ &\quad \text{(par produit par blocs)} \\ &= A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u). \end{aligned}$$

QED ◄

Corollaire 6.
Soit (E, F) deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension p, $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}$.

►***Démonstration.***

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u est inversible, alors $u \circ u^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $u^{-1} \circ u = \mathrm{id}_E$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(u \circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathrm{id}_F) = \mathrm{I}_p,$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_p,$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible, alors on dispose de A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que

$$A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times A = \mathrm{I}_n.$$

Soit v l'unique élément de $\mathscr{L}(F, E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(v)$ (possible par le théorème d'isomorphisme vu précédemment). Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v \circ u) = A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E),$$

donc, par injectivité de l'isomorphisme Φ, $v \circ u = \mathrm{id}_E$. De même, $u \circ v = \mathrm{id}_F$, donc u est inversible et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}$.

QED ◄

Propriété 7.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{E}$, alors l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \quad u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'algèbres, ce qui signifie qu'on a de plus $\Phi(u \circ v) = \Phi(u) \circ \Phi(v)$.

Remarque 1.4.
Attention ! Il faut avoir la même base au départ et à l'arrivée (cf. la translation pour les polynômes)

Exemple 1.5.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ pour tous i et j. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Pour ce faire, une jolie méthode est de remarquer que si

$$\tau : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \mapsto P(X+1) \end{array} \right.$$

si $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau) = A$.
Or, τ est inversible, $\tau^{-1} : P \mapsto P(X-1)$, donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\tau^{-1})$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\tau^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i},$$

donc le coefficient (i,j) de A^{-1} est $(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$. (attention au décalage de numérotation).

Remarque 1.6.
Le fait que l'on ait un automorphisme d'algèbre permet d'interpréter matriciellement les propriétés de certains endomorphismes. SI $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$,

- ▷ u est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$,
- ▷ u est une symétrie si et seulement si $A^2 = \mathrm{I}_n$,
- ▷ u est nilpotente si et seulement s'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.

Exo 1.1

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. Le représenter dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ au départ et à l'arrivée. Montrer que cet endomorphisme est nilpotent.

Il est intéressant, dès maintenant, de penser à représenter un endomorphisme dans une **bonne base.**

Propriété 8.
Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si u est un projecteur de E, soit $r = \mathrm{rg}\,(u)$, $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,(u)$, $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Comme u est un projecteur, $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) = E$ et donc $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ est une base de E.
   Alors
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_r), u(f_{r+1}), \dots, u(f_n)) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$
   où l'on a écrit la matrice par blocs.
2. Si u est une symétrie de E, $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_E) = E$. Soit $(e_1, \dots, e_s)$ base de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $(f_{s+1}, \dots, d_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_E)$.
   Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_s, f_{s+1} \dots, f_n)$ est une base de E, et
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & -\mathrm{I}_{n-s} \end{pmatrix}.$$

1.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 3.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est

$$\hat{A} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array} \right.$$

Propriété 9.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{B}_n$ et $\mathscr{B}_p$ les bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(\hat{A})$.

Définition 4.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit le noyau/l'image/le rang de A comme l'image/le noyau/le rang de $\hat{A}$.

Méthode 1.
Pour déterminer l'image/le noyau/le rang d'une matrice, on fait exactement ce qu'on a fait pour les applications linéaires sur $\mathbb{K}^n$!

Propriété 10.
Étant donnés les isomorphismes établis précédemment, si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$, une base de $\mathrm{Ker}\,(M)$ nous donne les coordonnées d'une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ dans $\mathcal{E}$. De même pour l'image.

Propriété 11.
Une matrice carrée est inversible à droite si et seulement si elle est inversible à gauche.

►***Démonstration.***
Ceci bien simplement du fait qu'un endomorphisme est injective ssi il est surjectif ssi il est bijectif. ***QED*** ◄

1.3.0.1 Un premier bilan. Une matrice peut s'interpréter comme...

- ▷ la matrice d'une famille de vecteurs dans une base,
- ▷ la matrice d'une application linéaire dans certaines bases au départ et à l'arrivée,
- ▷ la matrice de l'application linéaire canoniquement associée.

De plus, on a vu que si la matrice était une matrice carrée inversible, alors elle pouvait être interprétée comme la matrice d'un isomorphisme.
Y a-t-il l'analogue pour l'interprétation en tant que matrice de vecteurs ? OUI

2 Changement de base, équivalence, similitude

Exo 2.2

Soit, dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E}$ la base canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $u : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Calculer

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}),\ B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}),\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(X),$$
$$C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u),\ D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u),\ E = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u),$$

puis calculer les produits

$$A \times B,\ B \times C,\ B \times C \times A, B \times X.$$

Commentaire ?

2.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Propriété 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ est inversible.
Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$.

►***Démonstration.*** *(*).*

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\mathcal{F}$ est une base de E. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_n)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E(f_1), \dots, \mathrm{id}_E(f_n))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E)\end{aligned}$$

(on interprète une matrice comme matrice d'une application linéaire !)

Or, comme id_E est bijective, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E)$ est inversible, d'inverse

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{id}_E^{-1}) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{id}_E)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathrm{id}_E(e_1), \dots, \mathrm{id}_E(e_n))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ est inversible, c'est-à-dire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_n)$ est inversible.
(idée intéressante !) Soit φ l'unique endomorphisme de E tel que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = f_i$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi).$$

Or, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ est inversible, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ est inversible, donc φ est bijective. Donc $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de E, d'où $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E. On a alors, par le premier sens, aussi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}).$$

QED ◄

`Remarque 2.1.`
Ainsi, si E est un $\mathbb{K}$-evdf n, si $\mathcal{E}$ est une base de E, toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ peut être vue comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$ où $\mathcal{E}'$ est une base de E (par la proposition précédente et la proposition 2).

Définition 5.
Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, notée $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ ou $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ est la matrice de la famille $\mathcal{E}'$ dans la famille $\mathcal{E}$

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}').$$

Propriété 13.
Soit E un $\mathbb{K}$-evdf, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)$. Alors

$$X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} X'.$$

De même, si $(x_1, \dots, x_p)$ sont p vecteurs,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x_1, \dots, x_p).$$

►***Démonstration.***

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E(x))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E(e'_1),\dots,\mathrm{id}_E(e'_n))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')\\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x).\end{aligned}$$

QED ◄

Méthode 2.
Penser à ce type de schéma :

$$\mathcal{E} \leftarrow P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \leftarrow \mathcal{E}'$$

($P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ prend des vecteurs écrits dans $\mathcal{E}'$ et renvoie des vecteurs écrits dans $\mathcal{E}$)

Exemple 2.2.

Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{E}$ est la base canonique et $\mathcal{E}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, alors $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Si $x = 2e'_1 + e'_2$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)\\ &= \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Propriété 14.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux bases de E, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ deux bases de F.

1. $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{id}_E)$

2. $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$

3. si F est un espace vectoriel $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

4. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)\times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Méthode 3.
Il aut encore penser aux schéma avec des petites flèches ! On a vu que

$$\mathcal{E} \leftarrow P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \leftarrow \mathcal{E}'$$
$$\mathcal{E}' \leftarrow P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \leftarrow \mathcal{E}$$
$$\mathcal{F} \leftarrow P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \leftarrow \mathcal{F}'$$
$$\mathcal{F}' \leftarrow P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \leftarrow \mathcal{F}$$

Mais, si on pense aux bases dans lesquelles sont écris les différents vecteurs, on a aussi

$$\mathcal{F} \leftarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \leftarrow \mathcal{E}$$

(la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ prend des éléments écrits dans la base $\mathcal{E}$ et renvoie des éléments écrits dans la base $\mathcal{F}$) De même,

$$\mathcal{F}' \leftarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) \leftarrow \mathcal{E}'$$

D'où la formule en faisant coïncider les flèches !

►***Démonstration.*** *(*)*.

1. On note $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1,\dots,e'_n)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E(e'_1),\dots,\mathrm{id}_E(e'_n))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(e'_1,\dots,e'_n)\\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\end{aligned}$$

2. Là, on utilise le résultat démontré sur les inverses d'applications linéaires.

$$\begin{aligned}(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1} &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E))^{-1}\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{id}_E^{-1})\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{id}_E)\\ &= P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

3. Encore une fois, on fait apparaître la composée d'applications linéaires, en écrivant que

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\mathrm{id}_F \circ u \circ \mathrm{id}_E)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E)\\ &= P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\end{aligned}$$

4. On adapte facilement au cas d'endomorphismes.

QED ◄

2.2 Matrices équivalentes et rang

Définition 6.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p})(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Propriété 15.
La relation d'équivalence entre matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

►***Démonstration.***
Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $A \sim B$ s'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

▷ **Réflexivité.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = \mathrm{I}_n \times A \times \mathrm{I}_p$, donc $A \sim A$.

▷ **Symétrie.** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, telles que $A \sim B$. Alors on dispose de $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. ALors $B = P^{-1}AQ^{-1}$, avec P^{-1} dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q^{-1} dans $GL_p(\mathbb{K})$, donc $B \sim A$.

▷ **Transitivité.** Soient (A, B, C) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on dispose de $(P, R) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$, de $(Q, S) \in (GL_p(\mathbb{K}))^2$ telles que $A = PBQ$ et $B = RCS$. ALors $A = PRCSQ = (PR) \times C \times (SQ)$, et $PR \in GL_n(\mathbb{K})$, $SQ \in GL_p(\mathbb{K})$. Donc $A \sim C$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence. ***QED*** ◄

`Remarque 2.3.`
La notation $\sim$ n'est là que pour la preuve, elle n'est pas officielle pour parler d'équivalence entre matrices.

Propriété 16.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont équivalentes si et seulement s'il existe $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de E et de F telles que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$.

►***Démonstration.***
On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A e B sont équivalentes, on dispose de P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. Alors

$$B = P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)Q^{-1}.$$

<u>(Méthode : notre but est d'**interpréter** P^{-1} et Q^{-1} comme des matrices de passage entre bases !)</u>
Soit $\mathcal{F}'$ la base de F telle que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$: par la proposition 2, il existe une unique famille $\mathcal{F}'$ de F telle que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$. Comme P est inversible,

$\mathcal{F}'$ est une base.
En particulier,

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}.$$

Soit $\mathcal{E}'$ la base de E telle que

$$Q^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

(on fait de même que précédemment) On en déduit alors que

$$B = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u),$$

donc B est la matrice de u dans la base $\mathcal{E}'$ au départ et $\mathcal{F}'$ à l'arrivée.

$\Leftarrow$ Si B est la matrice de u dans une base $\mathcal{E}'$ au départ et $\mathcal{F}'$ à l'arrivée, alors

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} A P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'},$$

avec $P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ deux matrices inversibles. Donc B est équivalente à A.

D'où l'équivalence ! ***QED*** ◄

Définition 7.
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $r \leqslant \min(n,p)$. On définit

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

`Exemple 2.4.`
Ainsi,

$$J_{3,4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 17.
Soient (E,F) deux $\mathbb{K}$-evdf, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min(n,p)$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est de rang r si, et seulement s'il existe $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F, telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{p,n,r}.$$

►***Démonstration.*** *(*).*
Raisonnons par double implication (la directe étant encore la plus dure).

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que u est de rang r. On retrouve l'idée déjà importante de choisir une base **adaptée** à u.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Par le théorème du rang, on sait que $\dim(S) = r$.
Soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base de S, $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_r,\dots,e_n)$ est donc une base de E.
Mais alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(u) &= \mathrm{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_r),u(e_{r+1}),\dots,u(e_n)) \\ &= \mathrm{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_r)) \text{ car } (e_{r+1},\dots,e_n) \text{ sont dans } \mathrm{Ker}\,(u). \end{aligned}$$

Donc $(u(e_1),\dots,u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ (on vient de montrer qu'elle était génératrice, et elle est de cardinal égal à la dimension de $\mathrm{Im}\,(u)$).
Donc $(u(e_1),\dots,u(e_r))$ est une famille libre de f, que l'on complète en une basee $\mathcal{F} = (u(e_1),\dots,u(e_r),f_{r+1},\dots,f_p)$ de F.
Mais alors, dans la base $\mathcal{E}$ au départ et la base $\mathcal{F}$ à l'arrivée, la matrice de u est exactement $J_{p,n,r}$!

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{p,n,r}$. Alors si l'on écrit $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_p)$, cela signifie que

$$u(e_1) = f_1,\ u(e_2) = f_2,\ \dots, u(e_r) = f_r,\ u(e_{r+1}) = 0_F,\ \dots, u(e_n) = 0_F.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_r,0_F,\dots,0_F) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_r),$$

qui est un sous-espace vectoriel de dimension r, car $(f_1, \dots, f_r)$ est libre. Donc $\mathrm{rg}\,(u) = r$.

QED ◄

On déduit plusieurs corollaires de ce résultat.

Propriété 18.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min(n, p)$. Alors A est de rang r si et seulement si A est équivalente à $J_{p,n,r}$.
2. Soient (E, F) deux $\mathbb{K}$-evdf, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min(n, p)$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, pour toutes bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F,
   $$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)).$$
3. Soit F un $\mathbb{K}$-evdf n, $(x_1, \dots, x_p)$ p vecteurs de F, $\mathcal{F}$ une base de F. Alors
   $$\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p)).$$
4. Soit A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes. Alors
   $$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_p),$$
   où $C_1, \dots, C_p$ sont vus comme des éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
5. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.
6. Une matrice carrée de taille N est inversible si, et seulement si elle est de rang n.

►***Démonstration.*** *(*)*.

1. Notons u l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(u)$ et, si $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,
   $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$
   Or, par la proposition précédente, on dispose de $\mathcal{E}'$ une base de E, $\mathcal{F}'$ une base de F telles que
   $$J_{p,n,r} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u).$$
   Donc A et $J_{p,n,r}$ sont deux matrices représentant u dans des bases différentes au départ et à l'arrivée, donc A et $J_{p,n,r}$ sont équivalentes.
2. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$. Soit s le rang de A. Alors, par le point précédent, A est équivalente à $J_{p,n,s}$.
   Donc on dispose d'une base $\mathcal{E}'$ de E et $\mathcal{F}'$ de F telles que
   $$J_{p,n,s} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u),$$
   donc, par la proposition précédente, u est de rang s. Donc $r = s$. Donc $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(u)$.
3. On va utiliser une bonne application linéaire. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans F définie par, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $\varphi(e_i) = x_i$. Alors
   $$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_p) &= \mathrm{rg}\,(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \\ &= \mathrm{rg}\,(\varphi) \\ &= \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)) \\ &= \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \\ &= \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_p)), \end{aligned}$$
   d'où le résultat désiré !
4. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A. Soit $E_1, \dots, E_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors
   $$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u(E_1), \dots, u(E_p)) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_p).$$
5. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A et B sont équivalentes. Si u est l'application linéaire canoniquement associé à A, alors A représente u dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ au départ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à l'arrivée, et, comme A et B sont équi-

valentes, B représente aussi u dans des bases différentes au départ et à l'arrivée.
Donc par le point précédent,

$$\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(u) \text{ et } \text{rg}\,(B) = \text{rg}\,(u),$$

donc $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A et B sont de même rang, alors, par le premier point, A et B sont toutes deux équivalentes à $J_{p,n,r}$, donc sont équivalentes, par transitivité.

6. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est inversible, $A = A \times \mathrm{I}_n \times \mathrm{I}_n$ donc A est équivalente à $\mathrm{I}_n = J_{n,n,n}$ donc A est de rang n.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A est de rang n, alors $A = P \times J_{n,n,n} \times Q = Q \times Q$ avec P et Q inversibles. Donc A est inversible.

QED ◄

Propriété 19 (Interprétation du pivot de Gauss).
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Si B est obtenue à partir de A, à l'aide d'opérations sur les lignes et/ou sur les colonnes, alors A et B sont équivalentes.
2. si $\text{rg}\,(A) = r$, alors on peut obtenir $J_{p,n,r}$ à l'aide d'opérations sur les lignes et/ou les colonnes de A.

►***Démonstration.***

1. On rappelle que les opérations sur les lignes sont des multiplications à gauche par des matrices de transvection/permutations/dilatations, et que celles sur les colonnes sont obtenues par des multiplications à droite par des matrices de transvection/permutations/dilatations.
2. Deux approches possibles, qui utilisent un peu ou beaucoup le chapitre 15 :
   - ▹ ou bien on dit que toute matrice peut s'échelonner en ligne, puis on poursuit les opérations pour transformer la matrice en $J_{p,n,r}$.
   - ▹ ou bien on dit que toute matrice est équivalente à $J_{p,n,r}$ et que les matrices inversibles sont engendrées par les matrices élémentaires.

QED ◄

Il y a donc **beaucoup** de manières d'interpréter le rang d'une matrice ! On va en rajouter deux dernières !

Propriété 20.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A^T)$
2. Si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A,

$$\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(L_1, \dots, L_n).$$

►***Démonstration.***

1. Soit r le rang de A. Alors A est équivalente à $J_{n,p,r}$, i.e. il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$, Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que
$$A = PJ_{n,p,r}Q.$$
Mais alors
$$A^T = Q^T \times J_{n,p,r}^T \times P^T = Q^T \times J_{p,n,r} \times P^T.$$
Comme Q^T et P^T sont inversibles, A^T est donc équivalente à $J_{p,n,r}$, donc est de rang r.
2. On en déduit, si $C'_1, \dots, C'_n$ sont les colonnes de A^T, que
$$\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A^T) = \text{rg}\,(C'_1, \dots, C'_n) = \text{rg}\,(L_1, \dots, L_n),$$
car $L_1, \dots, L_n$ sont obtenues simplement en transposant $C'_1, \dots, C'_n$.

QED ◄

Définition 8.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice extraite de A est une matrice B vérifiant

$$\exists I \subset [\![1, n]\!],\ \exists J \subset [\![1, p]\!],\ B = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}.$$

Remarque 2.5.

1. Exemple, si $A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 & 8 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 15 & -2 & 13 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, alors

- ▷ $B = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$ est extraite de A : $I = \{1, 3\}$ et $J = \{1, 4\}$,
- ▷ $C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est extraite de A : $I = \{1, 2\}$ et $J = \{3, 4, 6\}$.

2. La notion de matrice extraite a un équivalent en python, c'est le slicing !

Propriété 21.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}\,(A)$ est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A.

►***Démonstration.***
Notons $r = \mathrm{rg}\,(A)$. On va montrer qu'il existe une matrice carrée extraite de A, inversible de taille r, et que toute matrice carrée extraite de A de taille strictement supérieure à r n'est pas inversible.

▷ **Existence d'une matrice extraite de taille r.** Soient $(C_1, \ldots, C_p)$ les colonnes de A. Alors

$$r = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, \ldots, C_p),$$

donc $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)) = r$. Donc, par le théorème de la base extraite, il existe $(j_1, \ldots, j_r) \in [\![1, p]\!]^r$ tels que $(C_{j_1}, \ldots, C_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.
En particulier, Donc, si B est la matrice constituée des colonnes $(C_{j_1}, \ldots, C_{j_r})$,

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B).$$

Soient alors $(L'_1, \ldots, L'_n)$ les lignes de B, on sait que

$$r = \mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(L'_1, \ldots, L'_n) = \dim(\mathrm{Vect}(L'_1, \ldots, L'_n)).$$

On dispose donc, toujours par le théorème de la base extraite, de r indices $(i_1, \ldots, i_r) \in [\![1, n]\!]^r$ tels que

$$\mathrm{Vect}(L'_1, \ldots, L'_n) = \mathrm{Vect}(L'_{i_1}, \ldots, L'_{i_r}),$$

donc

$$r = \mathrm{rg}\,(L'_{i_1}, \ldots, L'_{i_r}) = \mathrm{rg}\,(C),$$

où C est la matrice de lignes $L'_{i_1}, \ldots, L'_{i_r}$.
Cette matrice C est carrée, de taille r, et inversible car de rang r. De plus elle est extraite de A : on a pris les colonnes $(j_1, \ldots, j_r)$ et les lignes $(i_1, \ldots, i_r)$.
Donc A possède une matrice extraite de taille r, inversible.

▷ **Non-inversibilité des plus grandes matrices.** Soit B estraite de A, carré, de taille $s > r$. Soient $(C_1, \ldots, C_p)$ les colonnes de A. Soient $(D_1, \ldots, D_r)$ les colonnes de B.
Alors on dispose de $(j_1, \ldots, j_s)$ telles que pour tout k dans $[\![1, s]\!]$, D_k soit une colonne extraite de C_{j_k} (en sélectionnant certaines lignes uniquement disons $(i_1, \ldots, i_s)$.)
Or, $\mathrm{rg}\,(C_1, \ldots, C_p) = r$, et $(C_{j_1}, \ldots, C_{j_s})$ est une famille de cardinal $s > r$, donc elle est liée. Donc on dispose de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que

$$\lambda_1 C_{j_1} + \cdots + \lambda_s C_{j_s} = 0_{n,1}.$$

Donc, en sélectionnant les lignes $(i_1, \ldots, i_s)$, on obtient

$$\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_s D_s = 0_{s,1},$$

donc les colonnes de B sont liées dont B n'est pas inversible !

QED ◄

2.3 Matrices semblables et trace

Nous finissons par une relation plus forte que celle d'équivalence, c'est la relation de similitude.

Définition 9.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Propriété 22.
La relation de similitude est une relation d'équivalence.

►***Démonstration.***
Notons $A \sim B$ si A est semblable à B.

- ▷ **Réflexivité.** Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = \mathrm{I}_n A \mathrm{I}_n^{-1}$, donc $A \sim a$.
- ▷ **Symétrie.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $A \sim B$. ALors on dispose de $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Donc

  $$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1},$$

  donc $B \sim A$.
- ▷ **Transitivité.** Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on dispose de P et Q matrices inversibles telles que $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$. Donc

  $$A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1},$$

  donc $A \sim C$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence. ***QED*** ◄

Propriété 23.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A et B sont semblables, alors A et B sont équivalentes.
2. Si A est semblable à $\lambda \mathrm{I}_n$< alors $A = \lambda \mathrm{I}_n$.
3. Si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$,

   $$A^k = PB^kP^{-1}.$$

►***Démonstration.***

1. Si A et B sont semblables, on dispose de P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. P^{-1} est inversible donc A est bien équivalente à B.
2. Si A est semblable à $\lambda \mathrm{I}_n$, on dispose de P inversible telle que $A = P\lambda \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda P \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda \mathrm{I}_n$.
3. On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{Q}_k : A^k = PB^kP^{-1}$.
   Initialisation. $A^0 = \mathrm{I}_n$ et $PB^0P^{-1} = \mathrm{I}_n$, d'où l'initialisation.
   Hérédité. Soit k tel que $A^k = PB^kP^{-1}$. Alors

   $$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= PBP^{-1}PB^kP^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= PB\mathrm{I}_nB^kP^{-1} \\ &= PB^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

   d'où l'hérédité et le résultat.

QED ◄

`Remarque 2.6.`
Attention, la réciproque du 1 est fausse ! En effet, toute matrice inversible est équivalente à I_n, mais seule I_n est semblable à I_n.

Propriété 24.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{E}$ une base de E. Soit

$u \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A et B sont sembalbles si et seulement s'il existe $\mathcal{E}'$ une base de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$.

►***Démonstration.*** *(*).*

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que A et B soient semblables. On dispose alors de P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
P est inversible. Soit $\mathcal{E}'$ l'unique base de E telle que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$. Alors $B = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ donc $P^{-1} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$. Ainsi,

$$B = P^{-1}AP = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que l'on dispose de $\mathcal{E}'$ une base de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$. Alors par les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \\ &= P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}, \end{aligned}$$

donc A et B sont semblables.

QED ◄

Propriété 25.
Deux matrices semblables ont même trace.

►***Démonstration.***
Soient A et B deux matrices semblables, de taille n. Soit P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1} \times PB) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n B) = \mathrm{tr}(B).$$

QED ◄

`Remarque 2.7.`

Attention ! La réciproque est très fausse ! Exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors A, B et C sont toutes trois de trace nulle, mais A est de rang 2, B de rang 1 et C de rang nul, donc aucune de ces matrices sont équivalentes, donc (contraposée du 1 de la prop 23) ne sont pas semblables !

Définition 10.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$.
La quantité $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{E}$ de E choisie.
On appelle alors cette quantité trace de u, notée $\mathrm{tr}(u)$.

►***Démonstration.***
Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ sont semblables donc ont même trace. ***QED*** ◄

Propriété 26.
Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}\,(p)$.

►***Démonstration.***
Si $r = \mathrm{rg}\,(p)$, si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(p)$ alors, comme $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p)) = r$. ***QED*** ◄