

FIN ↘

CHAPITRE 18

DÉNOMBREMENT

Table des matières

1	Intuitions	1
2	Cardinal d'un ensemble fini	3
2.1	Définitions	3
2.2	Opérations entre ensembles	7
3	Méthodes combinatoires	12
3.1	Un problème introductif	12
3.2	Listes	13
3.3	Arrangements	14
3.4	Parties d'un ensemble – combinaisons	16
3.5	Exercice-bilan : tirages non ordonnés avec répétition	21
4	Corrections des « exos »	23

Dernière(s) mise(s) à jour

Réunion de parties : démonstration naturelle de la propriété 10.

1 Intuitions

Rappels sur l'ensemble ordonné des entiers naturels

1. Le nombre zéro est le plus petit des entiers naturels et le nombre un est le plus petit des entiers naturels autres que le nombre zéro. Plus généralement, pour tout entier naturel n , le nombre $n + 1$ est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à n .
2. *Propriété du plus petit élément.* Si une partie des entiers naturels est non vide alors elle possède un plus petit élément (premier élément dans l'ordre ascendant), lequel est unique.
3. *Propriété du plus grand élément.* Si une partie des entiers naturels est non vide et qu'elle est majorée (ne possède pas d'éléments arbitrairement grands) alors elle possède un plus grand élément (dernier élément dans l'ordre ascendant), lequel est le plus petit de ses majorants.
4. *Principe de récurrence.* Si une partie des entiers naturels possède zéro et que pour qu'elle possède un entier il est suffisant qu'elle possède tous les entiers strictement plus petits, alors cette partie est l'ensemble des entiers naturels tout entier.

Ensembles finis et nombres d'éléments

5. Un ensemble non vide est un *ensemble fini* si, et seulement si, on peut ranger un à un ses éléments dans leur totalité d'un premier à un dernier ; autrement dit, si, et seulement si, on peut totalement énumérer ses éléments.
6. Étant donné un entier naturel n non nul, si on choisit $n + 1$ fois exactement un élément parmi n éléments distincts, alors au moins un de ces n éléments est choisi plus d'une fois.

7. Par conséquent, étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, si on choisit p fois un élément parmi n éléments distincts et qu'on obtient ainsi p éléments distincts, alors p est inférieur à n .
8. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini non vide est l'unique entier naturel n non nul tel qu'on peut ranger un à un les éléments de l'ensemble dans leur totalité, d'un premier à un n -ième et dernier, en les numérotant de 1 à n ou de 0 à $n - 1$.
9. Deux ensembles finis non vides sont au même nombre d'éléments si, et seulement si, ces deux ensembles se correspondent un à un. En exemple, c'est ainsi que je sais que les doigts de mon bras droit sont autant (au même nombre) que les doigts de mon bras gauche, tous ces doigts réunis me servant présentement à écrire ceci.

La totalité et les parties

10. Pour qu'un ensemble soit fini, il est nécessaire et suffisant que ses parties finies ne possèdent des éléments distincts qu'en des nombres inférieurs à une certaine borne. Plus précisément, le nombre d'éléments, fini ou infini, de l'ensemble tout entier est égal au plus grand nombre d'éléments distincts qu'on peut y trouver ; i.e. au nombre maximal d'éléments de toute partie finie.
11. Si l'ensemble tout entier est fini alors la partie est finie et le nombre d'éléments de la partie est inférieur au nombre d'éléments du tout.
12. Si l'ensemble tout entier est fini et que la partie est au même nombre d'éléments que le tout, alors cette partie est exactement ce tout.
13. Si deux parties finies sont disjointes, alors leur réunion est une partie finie, et son nombre d'éléments est égal à la somme des nombres d'éléments de ces deux parties. Plus généralement, si des parties finies sont disjointes entre elles et en nombre fini, alors leur réunion est une partie finie, et son nombre d'éléments est égal à la somme des nombres d'éléments de ces parties.
14. Un ensemble fini étant mis en parties disjointes dont chacun possède le même nombre d'éléments, le nombre d'éléments par partie, multiplié par le nombre de parties, produit le nombre total d'éléments.

15. L'indicateur d'appartenance de l'élément à la partie vaut 1 si c'est « oui » et 0 si c'est « non »). Ainsi, le nombre d'éléments de toute partie finie est égal à la somme des indicateurs d'appartenance à la partie de chaque élément de l'ensemble tout entier.

2 Cardinal d'un ensemble fini

2.1 Définitions

La preuve de la proposition suivante n'a pas vraiment d'intérêt : faites des flèches entre des patates pour vous convaincre que c'est la bonne chose !

Lemme 1.

Toute application partant de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et arrivant dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est non injective.

Commentaire.

Une proposition très similaire est le « principe des tiroirs de Dirichlet » : Si l'on doit ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir contenant deux chaussettes. Plus précisément, on peut énoncer la proposition ainsi :

Corollaire 2.

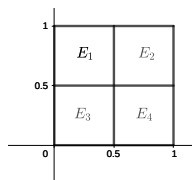
Soit E un ensemble, $(A_1, \dots, A_n)$ un recouvrement de E . Si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ sont $n+1$ éléments de E , alors il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$ et tels que $(x_i, x_j) \in A_k^2$.

Remarque 2.1.

Rappel : $(A_1, \dots, A_n)$ est un recouvrement de E si $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Exemple 2.2.

Si l'on prend 5 points A, B, C, D, E dans $[0, 1]^2$, deux au moins sont à une distance inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Pour ce faire on remarque que $[0, 1]^2 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, donc parmi les 5 points, deux sont au moins dans un même E_i , donc à distance au plus la diagonale d'un E_i , i.e. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exo 2.1

Soient $(x_0, \dots, x_{50})$ une suite strictement croissante de 51 entiers tous compris entre 1 et 100 (inclus). Démontrer que

$$\prod_{i=0}^{49} (x_{i+1} - x_i - 1) = 0.$$

Remarque 2.3.

Quel est le lien entre le principe des tiroirs et les applications : un lien auquel on peut penser est que si

$$f : E \rightarrow F,$$

et si, pour tout y , $f^{-1}(\{y\})$ est l'**image réciproque** de y par f (i.e. l'ensemble des x dans E tels que $f(x) = y$), alors

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}).$$

Ainsi, si F a moins d'éléments que E , il y a au moins deux éléments de E qui appartiennent à un même $f^{-1}(\{y\})$, i.e. deux éléments de E qui ont la même valeur par f , donc f n'est pas injective.

Propriété 3.

- (i) S'il existe une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ alors $p \leq q$. Et réciproquement.
- (ii) S'il existe une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ alors $p = q$. Et réciproquement.

Définition 1.

Soit E un ensemble. E est dit fini s'il existe un entier naturel tel que E soit en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cet entier est alors unique et est appelé cardinal de E . On note $n = |E|$, $n = \text{Card}(E)$ ou $n = \#(E)$ (notation à grand-papa).

Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Exemple 2.4.

1. Les parties finies de $\mathbb{N}$ sont ses parties majorées.

2. Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$,

(a) si $m < n$ alors il y a exactement $n - m - 1$ entiers compris entre m et n exclus :

$$\text{Card}\{x \in \mathbb{Z} : m < x < n\} = n - m - 1.$$

(b) si $m \leq n$ alors il y a exactement $n - m$ entiers compris entre m et n inclus :

$$\text{Card}\{x \in \mathbb{Z} : m \leq x \leq n\} = n - m + 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En montrant que la fonction $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{U}_n$, $k \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est surjective et injective, on conclut que $\mathbb{U}_n$ est fini et $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.

Remarque 2.5.

On peut étendre la définition du cardinal d'un ensemble à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ en posant :

$$\text{Card}(E) = \max\{\text{Card}(A) : A \in \mathcal{P}_f(E)\}.$$

Où $\mathcal{P}_f(E)$ désigne l'ensemble des parties finies de d'un ensemble E .

Propriété 4.

Qu'on donne un ensemble E . Alors E est fini si, et seulement si, l'ensemble des cardinaux des parties finies de E est une partie majorée de $\mathbb{N}$.

Corollaire 5.

Toute partie d'un ensemble fini est finie et de cardinal inférieur au cardinal de l'ensemble.

Remarque 2.6.

On a aussi

$$\text{Card}(A) = \min\{\text{Card}(B) : B \in \mathcal{P}_f(E), B \supset A\}.$$

On en déduit une proposition fondamentale.

Propriété 6.

Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et q .

- (i) Il existe une injection de E dans F si, et seulement si, $p \leq q$.
- (ii) Il existe une surjection de E dans F si, et seulement si, $p \geq q$.
- (iii) Il existe une bijection de E dans F si, et seulement si, $p = q$.

Propriété 7.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si, et seulement si, elle est injective ou surjective.

Remarque 2.7.

Cette proposition permet de bien raccourcir certains raisonnements ! Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$ impair, si on considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n \\ \omega \mapsto \omega^2 \end{cases},$$

on montre que φ est injective pour conclure que φ est bijective.

Propriété 8.

Soient E un ensemble fini et F un ensemble, φ une injection de E dans F . Alors $\varphi(E)$ est un ensemble fini de même cardinal que E .

2.2 Opérations entre ensembles

Notation *Réunion disjointe*.

Désormais, dès que l'on note $A \sqcup B$, cela signifie que la réunion est **disjointe**, i.e. que $A \cap B = \emptyset$.

On notera aussi $\bigsqcup_{i=1}^n A_i$ pour une réunion disjointe d'un nombre quelconque d'ensembles.

Propriété 9.

Soit E un ensemble, A et B deux parties finies de E . Alors $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \cup B$ sont des parties finies de E . Plus précisément,

1. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
2. Si $A \subset B$, $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$.
3. De manière générale,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

► Démonstration.**1. (non exigible)**

Ce qui suit revient simplement à dire que si $x_1, \dots, x_m$ sont les éléments distincts de A et que $y_1, \dots, y_n$ sont les éléments distincts de B alors, en posant $z_1 = x_1, \dots, z_m = x_m, z_{m+1} = y_1, \dots, z_{m+n} = y_n$, on obtient tous les éléments distincts de $A \sqcup B$.

Voie 1 : On raisonne par récurrence. On montre que : pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute partie A de cardinal m , pour toute partie B de cardinal n disjointe de A , $A \sqcup B$ est une partie finie et de cardinal $m + n$; cela quel que soit l'entier naturel n .

Voie 2 : On énumère les éléments par une bijection. Soit $n = \text{Card}(A)$ et $p = \text{Card}(B)$, soit φ une bijection de A dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et ψ une bijection de B dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Posons

$$\theta : \begin{cases} A \sqcup B \rightarrow \llbracket 1, p + n \rrbracket \\ x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ n + \psi(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{cases}$$

θ est bien définie car $A \cap B = \emptyset$ (donc aucun élément n'a deux images).

- θ est injective : soient x et x' dans $A \sqcup B$ tels que $\theta(x) = \theta(x')$.
 - si $(x, x') \in A^2$, alors $\varphi(x) = \varphi(x')$ donc $x = x'$ car φ est une bijection,
 - si $(x, x') \in B^2$, alors $\psi(x) = \psi(x')$ donc $x = x'$ car ψ est une bijection,
 - sinon, $x \in A$ et $x' \in B$, donc $\theta(x) \leq n$ et $\theta(x') > n$, impossible !

On conclut donc que $x = x'$, donc θ est injective.

- θ est surjective : soit $k \in \llbracket 1, n + p \rrbracket$.
 - si $k \leq n$, on pose $x = \varphi^{-1}(k)$. $x \in A \subset A \sqcup B$ et $\theta(x) = \varphi(x) = k$,
 - si $k \geq n + 1$, $k - n \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On pose $x = \psi^{-1}(k - n)$. C'est un élément de $B \subset A \sqcup B$ et $\theta(x) = n + k - n = k$.

D'où la surjectivité de θ et, ainsi, sa bijectivité.

2. Remarquons que, si $A \subset B$,

$$B = A \sqcup (B \setminus A).$$

Le résultat s'en déduit immédiatement.

3. Écrivons que

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B).$$

Alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \setminus A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

QED ◀

Exo 2.2

Combien y a-t-il de nombres à 3 chiffres divisibles ni par 2, ni par 3 ?

Propriété 10.

Soient E un ensemble, $A_1, \dots, A_n$ des parties finies de E . Alors :

1. La réunion des A_i est une partie finie de E .
2. Si les A_i sont deux à deux disjoints alors

$$\text{Card} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i).$$

3. Dans tous les cas,

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i);$$

Et s'il y a égalité alors les A_i sont deux à deux disjoints.

► **Démonstration.**

3. Écrivons

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$

où les $B_1, \dots, B_n$ sont des parties disjointes respectivement incluses dans $A_1, \dots, A_n$.

En effet. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- si $i = 1$ posons $B_i = A_i$
- sinon, posons $B_i = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i$ et remarquons que

$$\begin{aligned} B_i &= A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1}) \\ &= (A_i \cup A_{i-1} \cup \dots \cup A_1) \setminus (A_{i-1} \cup \dots \cup A_1). \end{aligned}$$

Commentaire.

La démonstration exposée en salle a eu pour seul but de faire connaître un cas d'usage de la symétrie d'une proposition par permutation de ses variables. C'est la démonstration ici présente qui est naturelle et à retenir. En effet, c'est la partition qui vient à l'esprit lorsqu'on effectue un test d'appartenance à une réunion ou lorsqu'on cherche à vérifier une conjonction deux propositions ou d'un plus grand nombre. De plus, cette dernière démonstration s'adapte parfaitement pour la propriété portant sur la dimension d'une somme finie de s.e.v. de dimensions finies (2ème année).

QED ◀

Exo 2.3

Si des parties finies sont non vides et disjointes et que leur réunion est une partie finie, alors ces parties sont en nombre fini.

Lemme 11 (Lemme des bergers).

Soit un ensemble à N éléments, mis en p parties disjointes de n éléments chacune. Alors les trois entiers sont liés par la relation $n \times p = N$.

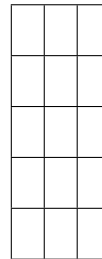
Propriété 12 (Produit cartésien).

Soient $(E_1, \dots, E_n)$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \dots \times \text{Card}(E_n).$$

Remarque 2.8.

Ceci doit vous paraître logique : si vous cherchez $\text{Card}(\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 1, 5 \rrbracket)$, vous cherchez combien il y a de cases dans ce quadrillage : c'est bien $3 \times 5 = 15$.

**Propriété 13 (Hors-Programme, Formule du crible).**

Soient E un ensemble, $A_1, \dots, A_n$ des parties finies de E . Alors

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Exo 2.4

Essayer d'appliquer la formule du crible pour $n = 3$ et retrouver

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) \\ &\quad - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \text{Card}(A_1 \cap A_3) - \text{Card}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

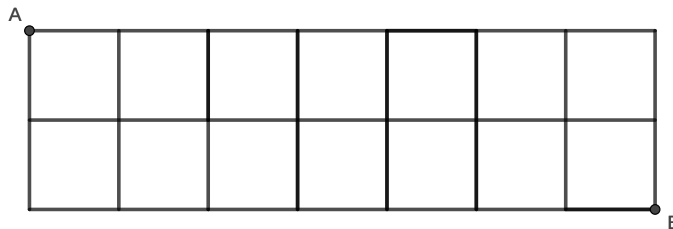
3 Méthodes combinatoires

3.1 Un problème introductif

Nous allons présenter un problème, en voir plusieurs solutions et voir comment rédiger un raisonnement de dénombrement.

On se déplace sur la grille suivante (on se déplace sur les traits et non sur les cases). On suppose qu'il y a p cases en longueur mais 2 cases en hauteur.

On ne peut qu'aller à droite ou descendre. Combien y a-t-il de chemins qui relient A à B ?



Essayez de trouver une réponse avant de passer à la page suivante.

Voici plusieurs possibilités de réponse :

1. Choisir un chemin, c'est :

- choisir le premier point où on descend ($k \in \llbracket 0, p \rrbracket$),
- **puis** choisir le second point où l'on descend : il y en a $p + 1 - k$.

D'où $\sum_{k=0}^p (p + 1 - k) = \frac{(p + 1)(p + 2)}{2}$ choix possibles.

2. un chemin qui va de A à B vérifie l'une des propriétés suivantes :

- ou bien il descend d'un coup de deux cases : choisir un tel chemin, c'est choisir le point en lequel on descend, d'où $p + 1$ possibilités.

- ou bien il descend en deux endroits distincts. Choisir un tel chemin, c'est choisir deux points distincts entre 0 et p , i.e. $\binom{p+1}{2}$, i.e. $\frac{p(p+1)}{2}$.

D'où, au total, $p+1 + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

3. un chemin de A à B est un chemin de longueur $p+2$. Choisir un chemin de longueur $p+2$ de A à B , c'est choisir une suite d'instructions parmi « Bas » ou « Droite », en ne demandant que 2 fois d'aller en bas. C'est donc choisir une suite de lettre « DDDDBDDDBDDD » de longueur $p+2$, qui contient uniquement 2 « B » : il y a $\binom{p+2}{2} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}$ possibilités.

Bilan. Les mots-clefs de dénombrement permettent ensuite de bien mener ses calculs :

- « choisir... c'est choisir... » : cela signifie que l'on établit une bijection,
- « puis » : si le nombre après le « puis » est indépendant du choix précédent, on multiplie les quantités. Sinon on a une somme indexée sur le premier choix.
- « ou bien » : on fait une réunion disjointe

Parfois, vous aurez aussi à éliminer les doublons : c'est que vous raisonnez sur des réunions non disjointes ou bien que vous appliquez le lemme des bergers.

3.2 Listes

Définition 2 : *et prop.*

Soit E un ensemble à n éléments. Une p -liste ou un p -uplet est une famille de p éléments de E , i.e. un élément de E^p .

Il y a n^p p -listes sur E .

Les p -listes servent à modéliser les tirages successifs, avec remise.

Exemple 3.1.

Combien y a-t-il de mots de 8 lettres formés avec les lettres du mot MPSI ? Un mot est une suite de lettres : on ne tient pas compte du sens.

Il y en a 4^8 .

3.3 Arrangements

Définition 3 : *et prop.*

Soit E un ensemble à n éléments. Un p -arrangement de E est une famille de p éléments de E deux à deux distincts.

Il y a $A_n^p = (n-0)(n-1)\cdots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments de E .

Les arrangements servent à modéliser les tirages successifs, sans remise.

► **Démonstration.**

Choisir un arrangement, c'est choisir la valeur du premier nombre (n choix), puis celle du second ($n-1$ choix), etc, jusqu'au p -ième nombre ($n-p+1$) choix. **QED** ◀

Exo 3.5

Combien de codes à quatre chiffres distincts peut-on faire ? À quatre chiffres non nécessairement distincts ?

Propriété 14.

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n .

- (i) Il y a n^p applications de E dans F
- (ii) Si $n \geq p$, il y a A_n^p injections de E dans F . Sinon il n'y en a aucune.
- (iii) Si $n = p$, il y a $n!$ bijections de E dans F .

► **Démonstration.**

1. Choisir une application de $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ dans F , c'est

- choisir l'image de e_1 (n possibilités),

- **puis** choisir l'image de e_2 (n possibilités),
- ...
- **puis** choisir l'image de e_p (n possibilités).

D'où $n \times \cdots \times n = n^p$ possibilités.

2. Choisir une injection de $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ dans F , c'est

- choisir l'image de e_1 (n possibilités),
- **puis** choisir l'image de e_2 ($n - 1$ possibilités),
- ...
- **puis** choisir l'image de e_p ($n - p + 1$ possibilités).

D'où $n \times (n - 1) \cdots \times (n - p + 1) = A_n^p$ possibilités.

3. Entre deux ensembles de même cardinal, l'injectivité équivaut à la bijectivité : ceci assure le résultat.

QED ◀

Propriété 15.

Soit E de cardinal n . Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n .

► Démonstration.

Preuve avec les mains. Choisir une partie A de $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, c'est

- choisir si $e_1 \in A$ (2 possibilités),
- **puis** choisir si $e_2 \in A$ (2 possibilités),
- ...
- **puis** choisir si $e_n \in A$ (2 possibilités),

d'où $2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ possibilités.

Preuve rigoureuse. On sait depuis le chapitre 5 que l'application

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$$

est bijective. Donc $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(\{0, 1\}^E) = 2^{\text{Card}(E)}$.

QED ◀

3.4 Parties d'un ensemble – combinaisons

Définition 4 : *et prop.*

Une combinaison à p éléments d'un ensemble fini E à n éléments est une partie de E à p éléments.

Il y en a $\binom{n}{p} = \frac{(n-0)(n-1)\cdots(n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Les combinaisons servent à modéliser les tirages simultanés.

Remarque 3.2.

Si E est de cardinal n , si l'on note $\mathcal{A}_{p,n}$ l'ensemble des p arrangements de E et $\mathcal{C}_{p,n}$ l'ensemble des p -combinaisons de E , on considère

$$f : \begin{cases} \mathcal{A}_{p,n} \rightarrow \mathcal{C}_{p,n} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \{x_1, \dots, x_p\} \end{cases}$$

Il faut bien différencier un p -uplet, qui est ordonnée, et un ensemble, qui ne l'est pas : $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$ mais $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$.

Pour toute p -combinaison $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ d'éléments de E , il existe $p!$ arrangements dont l'image par f vaut B : il s'agit de toutes les permutations des éléments $x_1, \dots, x_n$!

Ainsi, le lemme des bergers nous dit que

$$A_n^p = p! \binom{n}{p}$$

Exo 3.6

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « FEUILLE » ?

Exo 3.7

Un glacier vend 10 parfums de glace différents. Il propose des cônes 3 boules, superposées les

unes sur les autres : le cornet

pistache
framboise
vanille

 est donc différent du cornet

pistache
vanille
framboise

. Il propose

aussi des coupes 3 boules, où les 3 boules sont placées en cercle : l'ordre n'a donc pas d'importance.

En supposant que les 3 boules choisies sont différentes, combien y a-t-il de cornets/de coupes possibles ?

Et si l'on enlève l'hypothèse des 3 boules différentes ?

Propriété 16.

Démonstrations combinatoires de

1. la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. la formule $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
3. la formule de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
4. (lemme des chefs) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
5. la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

► Démonstration.

Soit E un ensemble à n éléments. On note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments.

1. On remarque que pour tout X dans E à k éléments, $\overline{X}$ est une partie de E à $n-k$ éléments.

Ainsi, l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}_k(E) \rightarrow \mathcal{P}_{n-k} \\ X \mapsto \overline{X} \end{cases}$$

est bijective, donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. On remarque que $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E)$, donc

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{P}_k(E)),$$

donc

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

3. • **Raisonnement élémentaire** : soit x un élément de E . Choisir une partie à k éléments de E , c'est

- **ou bien** décider que cette partie contient x : il reste donc une partie à $k-1$ éléments de $E \setminus \{x\}$ à choisir, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k-1}$,
- **ou bien** décider que cette partie ne contient pas x : il reste donc une partie à k éléments de $E \setminus \{x\}$ à choisir, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k}$.

$$\text{D'où } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

• **Raisonnement rigoureux** : considérons les deux parties de $\mathcal{P}_k(E)$ suivantes

$$\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{P}_k(E), x \in F\} \text{ et } \mathcal{B} = \{F \in \mathcal{P}_k(E), x \notin F\}.$$

alors $\mathcal{P}_k(E) = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$. Or,

— l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) \rightarrow \mathcal{A} \\ F \mapsto F \sqcup \{x\} \end{cases}$$

$$\text{est bijective, donc } \text{Card}(\mathcal{A}) = \text{Card}(\mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\})) = \binom{n-1}{k-1},$$

— l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_k(E \setminus \{x\}) \rightarrow \mathcal{B} \\ F \mapsto F \end{array} \right.$$

est bijective, donc $\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{P}_k(E \setminus \{x\})) = \binom{n-1}{k}$.

On en déduit que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

4. • Preuve « Père Castor, raconte-nous une histoire » On choisit, dans une population de n personnes, un conseil de k personnes, qui élisent parmi elles une cheffe.

- soit on choisit d'abord la personne à la tête de la population (n possibilités), puis le conseil (il y a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités parmi les personnes restantes). D'où $n \binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
- soit on choisit d'abord le conseil, $\binom{n}{k}$ possibilités, puis le conseil choisit une personne (k possibilités), d'où $k \binom{n}{k}$ possibilités.

• **Preuve rigoureuse :** On considère la partie

$$\mathcal{C} = \{(x, F), F \in \mathcal{P}_k(E), x \in F\}.$$

— On peut écrire que

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{x \in E} \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$$

Notons, à x fixé, $\mathcal{E}_x = \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$. Alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) \rightarrow \mathcal{E}_x \\ G \mapsto G \sqcup \{x\} \end{array} \right.$$

est une bijection. Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{E}_x) = \binom{n-1}{k-1}$. D'où

$$\text{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{x \in E} \binom{n-1}{k-1} = \text{Card}(E) \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

— On peut aussi écrire que

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \{(x, F), x \in F\}.$$

Notons, à F fixé, $\mathcal{D}_F = \{(x, F), x \in F\}$. Alors l'application

$$\psi : \begin{cases} F \rightarrow \mathcal{D}_F \\ x \mapsto (x, F) \end{cases}$$

est bijective, donc $\text{Card}(\mathcal{D}_F) = \text{Card}(F) = k$, d'où

$$\text{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{F \in \mathcal{P}_k(E)} k = \text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) \cdot k = \binom{n}{k} k$$

D'où, par unicité du cardinal, $n \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} k$.

5. Preuve élémentaire : Soit E un ensemble, A une partie de E à a éléments, B une partie de E à b éléments, telles que $A \cap B = \emptyset$. Choisir une partie de $A \sqcup B$ à n éléments, c'est

- fixer le nombre k d'éléments de A qu'elle va contenir ($a+1$ possibilités, k varie de 0 à a),
- puis, pour chaque k fixé, c'est choisir k éléments de A , i.e. $\binom{a}{k}$ possibilités, puis $n-k$ éléments de B , i.e. $\binom{b}{n-k}$ possibilités.

D'où $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$ parties de $A \sqcup B$ à n éléments, d'où

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$

QED ◀

Exo 3.8

Rédiger une preuve rigoureuse de la formule de Vandermonde.

Résumons. On a trois objets importants

1. les listes : n^p = ordonné, avec répétition
2. les arrangements : $\frac{n!}{(n-p)!}$ = ordonné, sans répétition
3. les combinaisons : $\binom{n}{p}$ = non ordonné, sans répétition

3.5 Exercice-bilan : tirages non ordonnés avec répétition

Sept personnes sont dans un bar à cocktails. Le bar propose 10 variétés de cocktails. Combien y a-t-il de choix possibles ?

La question est vague, et va dépendre du point de vue : celui du serveur ou celui de la barmaid.

Du point de vue du serveur, chacune des 7 personnes a 10 choix possibles, d'où 10^7 possibilités : il s'agit d'une 7-liste à valeur dans un ensemble à 10 éléments.

Du point de vue de la barmaid, c'est plus délicat : elle ne voit pas les personnes. Elle se demande juste : « combien y a-t-il de manières de sélectionner 7 cocktails, avec éventuellement des doublons, parmi les 10 que je mets à ma carte ? »

De manière plus générale, étant donné un ensemble à n éléments, de combien de manière puis-je sélectionner p éléments de cet ensemble ?

Premier point de vue (Preuve « Père Castor, raconte-nous une histoire »)

Les cases et les petits bâtons.

On peut imaginer que la barmaid a un tableau avec les cocktails :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Choisir 7 cocktails, c'est juste choisir de mettre des petits bâtons dans les cases. Par exemple :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Mais, la barmaid est tellement habituée à ses tableaux et ses bâtons qu'elle décide de noter les choses autrement, pour gagner de la place sur ses feuilles de commandes : au lieu de noter les cases, elle note un – dès qu'on passe à une autre case. Ainsi, la commande ci-dessus devient :

|| - - | - - - ||| - - | - -

Quand on y pense, quelle que soit la commande, elle comprendra 7 bâtons et 9 tirets. Choisir une commande, c'est choisir la place des bâtons ou des tirets parmi les 16 caractères que comprend une commande : d'où $\binom{16}{7}$ possibilités.

De manière générale, il y a $\binom{n+p-1}{p}$ possibilité de choisir p éléments, sans ordre, avec remise, dans un ensemble à n éléments.

Deuxième approche : les applications croissantes

Exo 3.9

On cherche à établir d'une autre manière le résultat précédent. Soit E un ensemble à n éléments. On se demande de combien de manières on peut sélectionner, sans tenir compte de l'ordre, et avec répétition, p éléments de E .

1. Démontrer que le nombre recherché correspond au nombre d'applications croissantes (pas strictement) de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Démontrer que l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est en bijection avec l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$. On construira explicitement la bijection.
3. Démontrer qu'il y a $\binom{a}{b}$ applications **strictement** croissantes de $\llbracket 1, b \rrbracket$ dans $\llbracket 1, a \rrbracket$.
4. En déduire le résultat voulu.

4 Corrections des « exos »

Correction 1. Exo 1. On considère les 51 nombres $(x_0, \dots, x_{50})$. Ces 51 nombres sont tous dans $\llbracket 1, 100 \rrbracket = \bigcup_{k=1}^{50} \llbracket 2k-1, 2k \rrbracket$. Comme on met 51 nombres dans 50 ensembles, deux nécessairement sont dans le même ensemble. Donc il existe $i \neq j$, disons $i < j$, tels que $x_j - x_i \leq 1$. Comme la suite est strictement croissante, $1 \leq x_{i+1} - x_i \leq x_j - x_i \leq 1$, donc $x_{i+1} = x_i + 1$, donc $x_{i+1} - x_i - 1 = 0$. Ainsi,

$$\prod_{k=0}^{49} (x_{k+1} - x_k - 1) = 0.$$

Correction 2. Exo 2. Notons $A_n = \{k \in \llbracket 100, 999 \rrbracket, n|k\}$. Alors A_2 possède $\left\lfloor \frac{999 - 100 + 1}{2} \right\rfloor = 450$ éléments, A_3 possède $\frac{999 - 102}{3} + 1 = 300$ éléments, et A_6 en possède 150. De plus, par le théorème de Gauss, $A_2 \cap A_3 = A_6$. Ainsi, si l'on note B l'ensemble des nombres divisibles ni par 2, ni par 3,

$$\begin{aligned} \text{Card}(B) &= \text{Card}(\llbracket 100, 999 \rrbracket) - \text{Card}(A_2 \cup A_3) \\ &= 900 - \text{Card}(A_2) - \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_6) \\ &= 900 - 450 - 300 + 150 = 300. \end{aligned}$$

Il y a donc 300 nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3.

Correction 3. Exo 3. On note $(A_i)_{i \in I}$ une telle famille de parties non vides et disjointes d'un ensemble E . On suppose que leur réunion est une partie finie de E .

On montre alors que l'ensemble I ne possède des éléments distincts qu'en nombre inférieur à une certaine borne, i.e. que l'ensemble des cardinaux de ses parties finies est majoré.

En effet, appelons n le cardinal de la réunion des A_i . Que soit donné J une partie finie de I , quelle qu'elle soit. Alors la réunion des A_j , pour $j \in J$, étant une partie de la réunion des A_i , le cardinal de la première réunion est inférieur au cardinal de la dernière. Or les A_j sont disjointes, donc le cardinal de leur réunion est égal à la somme de leurs cardinaux; puis comme ces parties sont non vides, leurs

cardinaux sont tous supérieurs à 1. Donc J ne possède pas plus de n éléments.

D'où I est finie (et possède au plus n éléments).

Correction 4. Exo 4. Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= (-1)^{1+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq 3} \text{Card}(A_{i_1}) + (-1)^{2+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &\quad + (-1)^{3+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})\end{aligned}$$

Là, i_1, i_2, i_3 sont juste des **noms** de variables ! On aurait pu mettre, i, j et k ! Ainsi,

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq 3} \text{Card}(A_{i_1}) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3),$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) &= \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &= \text{Card}(A_1 \cap A_2) + \text{Card}(A_1 \cap A_3) + \text{Card}(A_2 \cap A_3),\end{aligned}$$

et, enfin,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=i_1+1}^2 \sum_{i_3=i_2+1}^3 \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Ici, il n'y a qu'un triplet possible !

Ceci nous permet d'avoir la formule désirée !

Correction 5. Exo 5. Déjà, avec répétition éventuelle, il y a 10000 codes possibles à 4 chiffres. (10 possibilités par chiffre)

Sans répétition, il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = A_10^4$ codes possibles.

Correction 6. Exo 6. Choisir une anagramme de FEUILLE, c'est

- choisir la position du « F » : 7 choix possibles,
- puis choisir la position des deux « E » : $\binom{6}{2}$ choix possibles (dans les 6 emplacements restants, on en choisit 2, peu importe l'ordre !)
- puis choisir la position du « U » : 4 choix possibles
- puis choisir la position du « I » : 3 choix possibles
- les deux positions restantes sont celles des deux « L »

D'où $7 \times \frac{6 \times 5}{2} \times 4 \times 3 = 7 \times 6 \times 5 \times 2 \times 3 = 1260$ anagrammes possibles.

Correction 7. Exo 7.

1. pour les cornets avec 3 boules distinctes, choisir un tel cornet, c'est choisir un 3-arrangement dans un ensemble à 10 éléments, d'où $10 \times 9 \times 8$ cornets possibles,
2. pour les cornets avec 3 boules quelconques, choisir un tel cornet, c'est choisir une 3-liste, d'où 1000 possibilités,
3. pour les coupes avec 3 boules distinctes, choisir une telle coupe, c'est choisir une combinaison à 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments. D'où $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ possibilités,
4. pour les coupes avec 3 boules quelconques, choisir une telle coupe, c'est
 - **ou bien** la choisir avec 3 boules distinctes, d'où 120 possibilités,
 - **ou bien** la choisir avec 3 boules identiques, d'où 10 possibilités,
 - **ou bien** la choisir avec 2 boules identiques (10 possibilités) puis une troisième différente (9 possibilités) d'où 90 possibilités

D'où, au total, 220 possibilités.

Correction 8. Exo 8. On fixe A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b . On fixe n un entier. On note $\mathcal{P}_n(A \sqcup B)$ l'ensemble des parties de $A \sqcup B$ de cardinal n . On note, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$\mathcal{A}_k = \{F \in \mathcal{P}_n(A \sqcup B), \text{Card}(F \cap A) = k\}$. Alors comme $\mathcal{P}_n(A \sqcup B) = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{A}_k$,

$$\text{Card}(\mathcal{P}_n(A \sqcup B)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{A}_k).$$

Or, l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B) \rightarrow \mathcal{A}_k \\ (G, H) \mapsto G \sqcup H \end{cases}.$$

est une bijection, donc $\text{Card}(\mathcal{A}_k) = \text{Card}(\mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B)) = \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$.

Correction 9. Exo 9.

1. Choisir une application croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est choisir p valeurs de $\llbracket 1, n \rrbracket$, éventuellement répétées : un fois que ces valeurs ont été choisies, il n'y a qu'une application croissante correspondante. Il suffit en effet de les ordonner $(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p)$, et de poser $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(p) = a_p$.
2. On appelle A l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et B l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$. Alors l'application

$$\varphi : \begin{cases} A \rightarrow B \\ f \mapsto g : \begin{cases} \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket \\ x \mapsto f(x) + x - 1 \end{cases} \end{cases}$$

est une application qui va bien de A dans B : si f est croissante, $\varphi(f)$ est strictement croissante :
si $x < y$,

$$\varphi(f)(x) = f(x) + x - 1 < f(y) + y - 1 = \varphi(f)(y).$$

De plus, $\varphi(f)$ est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

L'application φ est, de plus, bijective. Si $g \in B$, on pose

$$f : x \mapsto g(x) - (x - 1).$$

Déjà, comme $g(1) \geq 1$, $f(1) \geq 1$. Ensuite, comme g est strictement croissante, on sait que si $x \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$f(x+1) - f(x) = g(x+1) - g(x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

donc f est croissante. Elle est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ car $g(p) \leq n + p - 1$, donc $f(p) \leq n + p - 1 - (p - 1) = n$.

Ainsi, A et B sont en bijection, donc ont même cardinal !

3. Choisir une application strictement croissante de $\llbracket 1, b \rrbracket$ dans $\llbracket 1, a \rrbracket$, c'est simplement choisir l'ensemble de ses valeurs : elles sont toutes distinctes et, si C est une partie de $\llbracket 1, a \rrbracket$ à b éléments, il y a une unique application strictement croissante dont l'ensemble des valeurs est C .

Ainsi, il y a autant d'applications strictement croissante de $\llbracket 1, b \rrbracket$ dans $\llbracket 1, a \rrbracket$ que de parties de $\llbracket 1, a \rrbracket$ à b éléments, i.e. $\binom{a}{b}$.

4. D'où $\binom{n+p-1}{p}$ applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

DEBUT ↙