19.1 Existence de bases finies

1. Existence d'une base de cardinal n et isomorphisme à $\mathbb{K}^n$: un $\mathbb{K}$-e.v. admet une base finie de cardinal n si, et seulement si, il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2. Définition d'un espace de dimension finie comme espace admettant une base finie.

3. Lemme de la base intermédiaire : si $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in L}$ est une famille libre finie et que $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in G}$ est une famille génératrice finie, avec $L \subset G$, alors on peut trouver un ensemble B contenant L et contenu dans G tel que $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in B}$ est une base finie.

4. Condition suffisante d'existence d'une base finie en termes de familles libres : si les cardinaux des familles finies libres d'un e.v. sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'e.v. admet une base finie, de cardinal majoré par cet entier.

5. Extraction d'une base : théorème de la base extraite : de toute famille finie génératrice on peut extraire une base, laquelle est finie.

6. Caractérisation de la dimension finie en termes de familles génératrices.

7. Complétion en une base : théorème de la base incomplète : étant donné une famille finie libre et une famille finie génératrice, on peut obtenir une base finie en complétant la famille libre par des vecteurs de la famille génératrice.

8. Lemme fondamental de la dimension : si un espace admet une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

9. Cardinaux des familles libres finies et des familles génératrices finies : dans un e.v., quel qu'il soit, le cardinal de toute famille finie libre est inférieur au cardinal de toute famille finie génératrice.

10. Caractérisation de la dimension finie en termes de familles libres.

19.2 Dimension d'un espace

11. Cardinaux des bases finies.

12. Définition de la dimension d'un e.v. de dimension finie.

13. Invariance de la dimension par isomorphisme.

14. Caractérisation dimensionnelle des bases parmi les familles libres ou génératrices.

15. Dimension du produit cartésien d'un couple d'espaces.

16. Dimension du produit cartésien d'une suite finie d'espaces.

19.3 Dimension d'un sous-espace

17. Dimension d'un sous-espace.

18. Caractérisation dimensionnelle de l'égalité de deux sous-espaces de dimensions finies.

19. Dimension d'une somme directe, en lien avec la dimension d'un produit cartésien.

20. Définition d'une base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe.

21. Existence de supplémentaires.

22. Dimension d'une somme quelconque, formule de Grassmann.

23. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

19.4 Espace des applications linéaires de E dans F

24. (*Rappel*) Détermination d'une application linéaire par son action sur une base, finie ou infinie.

25. Copies de $(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ et dimension.

26. Forme géométrique du théorème du rang.

19.5 Rang d'une famille finie de vecteurs

27. Définition du rang d'une famille finie de vecteurs comme l'entier naturel égal au cardinal maximal d'une famille libre (finie) extraite.

28. Lien entre rang et dimension.

29. Rang et liberté, engendrement.

30. (*Rappel*) Invariance par opérations élémentaires de l'espace engendré par une famille de vecteurs, de la qualité génératrice et de la qualité libre.

31. Invariance par opérations élémentaires du rang d'une famille finie de vecteurs.

32. Liste échelonnée de vecteurs **non nuls** de $\mathbb{K}^n$: liberté.

33. (*Rappel*) Méthode du pivot pour échelonner en colonnes une matrice.

34. Méthode du pivot pour trouver simultanément la <u>dimension</u> d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ défini par une liste génératrice, une <u>base</u> de ce sous-espace et un <u>sous-espace de coordonnées supplémentaire</u> à ce sous-espace.

35. Méthode du pivot pour <u>extraire</u> d'une liste de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ une base de l'espace engendré, ou pour <u>compléter</u> en une base une liste libre de vecteurs de ce sous-espace.

36. (*Rappel*) Opérations élémentaires, produit matriciel et équivalences en colonnes.

37. Méthode du pivot pour <u>paramétriser</u> l'ensemble des relations de liaison d'une liste de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, ou trouver une base d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ défini par un système d'équations.

19.6 Rang d'une application linéaire de rang fini

38. Définition d'une application linéaire de rang fini.

39. Lien entre rang et dimension au départ, à l'arrivée.

40. Rang d'une composée.

41. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

42. Lien entre les dimensions du noyau et de l'image : théorème du rang.

43. (*Exo*) Formule de Grassmann par le théorème du rang.

44. Application linéaire entre espaces de même dimension.

45. Inversibilité d'un endomorphisme en dimension finie.

19.7 Formes linéaires et intersection d'hyperplans

46. (*Rappel*) Définition d'une droite vectorielle comme sous-espace engendré par un vecteur **non nul** (image d'une application linéaire non nulle qui à tout scalaire attribue un vecteur).

47. Dimension et droites : en dimension quelconque, les droites sont les sous-espaces de dimension 1.

48. Alternative de l'addition d'une droite (à un sous-espace).

49. Dimension et somme de d droites.

50. (*Rappel*) Définition d'un hyperplan vectoriel comme sous-espace noyau d'une forme linéaire **non nulle** (noyau d'une application non nulle qui à tout vecteur attribue un scalaire).

51. (*Rappel*) Lien entre droites et hyperplans : si une droite est non incluse dans un hyperplan alors les deux sous-espaces sont supplémentaires ; réciproquement, si deux sous-espaces sont supplémentaires et que l'un est une droite alors l'autre est un hyperplan.

52. (*Rappel*) Équations d'un hyperplan : étant donné une forme linéaire définissant un hyperplan, les formes linéaires qui s'annulent sur cet hyperplan constituent une droite vectorielle engendrée par la première.

53. Dimension et hyperplans : en dimension $n \geqslant 1$, les hyperplans sont les sous-espaces de dimension $n-1$.

54. Alternative de la coupe (d'un sous-espace) par un hyperplan.

55. Dimension et intersection de r hyperplans : toute intersection de r hyperplans est de dimension au moins $n-r$. Réciproquement, tout sous-espace de dimension $n-r$ s'exprime comme une intersection de r hyperplans.

56. (*Exo*) Si une liste de r matrices lignes non nulles est échelonnée, alors l'intersection des hyperplans de $\mathbb{K}^n$ qu'elles définissent est de dimension $n-r$.

57. (*Rappel*) Méthode du pivot pour échelonner en lignes une matrice.

58. Méthode du pivot pour trouver simultanément la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ défini par un système d'équations (liste de formes linéaires), un système équivalent d'équations indépendantes et un système de coordonnées libres.

59. Nouvelle méthode du pivot pour extraire d'une liste de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ une base de l'espace engendré, ou pour compléter en une base une liste libre de vecteurs de ce sous-espace.

60. (*Rappel*) Opérations élémentaires, produit matriciel et équivalences en lignes.

61. Méthode du pivot pour trouver un système d'équations définissant un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ représenté par une liste génératrice.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Lemme de la base intermédiaire : si $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in L}$ est une famille libre finie et que $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in G}$ est une famille génératrice finie, avec $L \subset G$, alors on peut trouver un ensemble B contenant L et contenu dans G tel que $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in B}$ est une base finie.

2. Lemme fondamental de la dimension : si un espace admet une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

3. $(\mathscr{F}(E,F),+,.)$ est de dimension infinie, sauf si E ou F est nul.

4. Caractérisation dimensionnelle des bases parmi les familles libres ou génératrices.

5. Dimension d'une somme quelconque, formule de Grassmann (*sans le théorème du rang*.

6. Forme géométrique du théorème du rang.

7. Rang d'une composée.

8. Formule de Grassmann par le théorème du rang.

9. Inversibilité d'un endomorphisme en dimension finie.

10. Dimension et intersection de r hyperplans : toute intersection de r hyperplans est de dimension au moins $n-r$.

11. Pratique des méthodes du pivot sur des listes de matrices colonnes (resp. lignes) de n scalaires pour $n \in \{1;2;3;4\}$. Conséquences théoriques.